

Zur Approximation der Gleichungen von Navier-Stokes

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

am Institut für Mathematik

des Fachbereiches Mathematik und Naturwissenschaften
der Universität Kassel

vorgelegt von

Dipl.-Math. Nazgul Asanalieva

Institut für Mathematik

Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften

Universität Kassel

2010

Erster Gutachter: Prof. Dr. Werner Varnhorn, Universität Kassel
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Christian Simader, Universität Bayreuth
Tag der Disputation: 12.04.2011

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei denjenigen bedanken, die mich während der Promotion begleitet und unterstützt haben. Besonderer Dank gilt dabei zunächst meinem Doktorvater Prof. Dr. Werner Varnhorn für die hervorragende Betreuung, die zahlreichen und kritischen Fachdiskussionen sowie die umfassende Unterstützung meiner persönlichen und beruflichen Weiterentwicklung.

Den aktiven und ehemaligen Mitgliedern des Instituts für Mathematik der Universität Kassel danke ich für die äußerst freundliche und hilfsbereite Atmosphäre. Hier sind insbesondere Prof. Dr. Maria Specovius-Neugebauer, Dr. Sergej König, Florian Zanger und Dr. Martin Steigemann zu nennen.

Ich danke meinem Mann, Janybek Orozaliev, der mich zu jeder Zeit mit voller Kraft unterstützt hat. Insbesondere in der Endphase meiner Promotion hat er mir den Rücken frei gehalten, obwohl er selbst in den letzten Zügen seiner Promotion war. Dies hat sicherlich zu seinem Schlafdefizit beigetragen, was ich bedauere und zu schätzen weiß. Unser Sohn Adil sorgte für die nötige und wunderschöne Ablenkung und hat unser Leben enorm bereichert.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meinen Eltern, meiner Schwester und meinen Brüdern, die trotz 6000 km Entfernung immer für mich da waren.

Inhaltsverzeichnis

Notation	4
Einleitung	6
1 Funktionenräume	12
1.1 C^m -Räume	12
1.2 L^p -Räume	13
1.3 Sobolevräume	14
1.4 B -wertige Funktionen	17
2 Vorbereitungen	19
2.1 Einige Ungleichungen	19
2.2 Satz von Gauß	22
2.3 Satz von Arzelà-Ascoli	23
2.4 Einbettungssätze	24
2.5 Die stationären Stokes-Gleichungen	26
2.6 Schwache Konvergenz	27
3 Lagrangesche Beschreibung der Strömungen	30
3.1 Darstellung stationärer Strömungen	30
3.2 Darstellung instationärer Strömungen	37
4 Regularisierung	42
4.1 Zeitverschiebung	42
4.2 Lagrangesche Differenzen	44
4.3 Die regularisierten Gleichungen	46

5	Konstruktion der Lösung auf $[0, \varepsilon]$	48
5.1	Helmholtz - Projektion und Stokes - Operator	48
5.2	Galerkinansatz	49
5.3	Beispiel zum Galerkinansatz	51
5.4	Abschätzungen der Galerkinapproximationen	54
5.5	Existenz der Lösung	71
6	Globale Lösungen	81
7	Konvergenz des Verfahrens	88
7.1	Definition einer schwachen Lösung	88
7.2	Konvergenzbeweis	90
	Literatur	102
	Erklärung	104

Notation

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen mit Null
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
\mathbb{R}^n	n -dimensionaler Euklidischer Raum
id	identische Abbildung
\det	Determinante einer Matrix
Ω	Gebiet im \mathbb{R}^n
$\partial\Omega$	Rand des Gebietes Ω
$\bar{\Omega}$	Abschluss des Gebietes Ω
∂_t	partielle Ableitung nach t
∂_i	partielle Ableitung nach x_i
∇	Gradient im \mathbb{R}^n
$\operatorname{div}, \nabla \cdot$	Divergenz im \mathbb{R}^n
Δ	Laplace-Operator im \mathbb{R}^n
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
o	Landau-Symbol
supp	Täger einer Funktion
\cdot	Skalarprodukt im \mathbb{R}^n
(\cdot, \cdot)	Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$
$C^k(\Omega)$	Raum der in Ω k -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen
$C^\infty(\Omega)$	Raum der in Ω beliebig oft partiell differenzierbaren Funktionen
$C_0^k(\Omega)$	$C_0^k(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) : \operatorname{supp} u \text{ kompakt, } \operatorname{supp} u \subset \Omega\}$
$C_{*,\sigma}^{lip}(\bar{\Omega})$	Raum der in $\bar{\Omega}$ Lipschitz-stetigen, am Rand verschwindenden, divergenzfreien Vektorfunktionen
$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$	$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) := \{\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega\}$

$L^p(\Omega)$	Banachraum aller in Ω Lebesgue-messbaren Funktionen u mit endlicher Norm $\ u\ _{0,p}$
$L^\infty(\Omega)$	L^p -Raum für $p = \infty$ mit der wesentlichen Supremumsnorm
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev - Räume
$H^{m,p}(\Omega)$	Sobolev - Räume
$H^m(\Omega)$	$H^m(\Omega) := H^{m,2}(\Omega)$
$\mathcal{H}_0(\Omega)$	Vervollständigung von $\mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty$ bezüglich der Norm $\ \cdot\ $
$\mathcal{H}_1(\Omega)$	Vervollständigung von $\mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty$ bezüglich der Norm $\ \nabla \cdot\ $

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir die Strömung einer zähen, inkompressiblen, instationären Flüssigkeit in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Zur Beschreibung einer solchen Strömung stehen uns grundsätzlich zwei Möglichkeiten zur Verfügung: die Lagrangesche und die Eulersche Darstellung.

Bei der Lagrangeschen Betrachtung beschreibt man die Strömung durch die Bahnkurven einzelner Flüssigkeitspartikel. Hier muss man die einzelnen Teilchen kennzeichnen. Üblicherweise benutzt man dazu ihre Ortskoordinaten \mathbf{x} zu einem bestimmten Zeitpunkt t unter einem vorgegebenem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} .

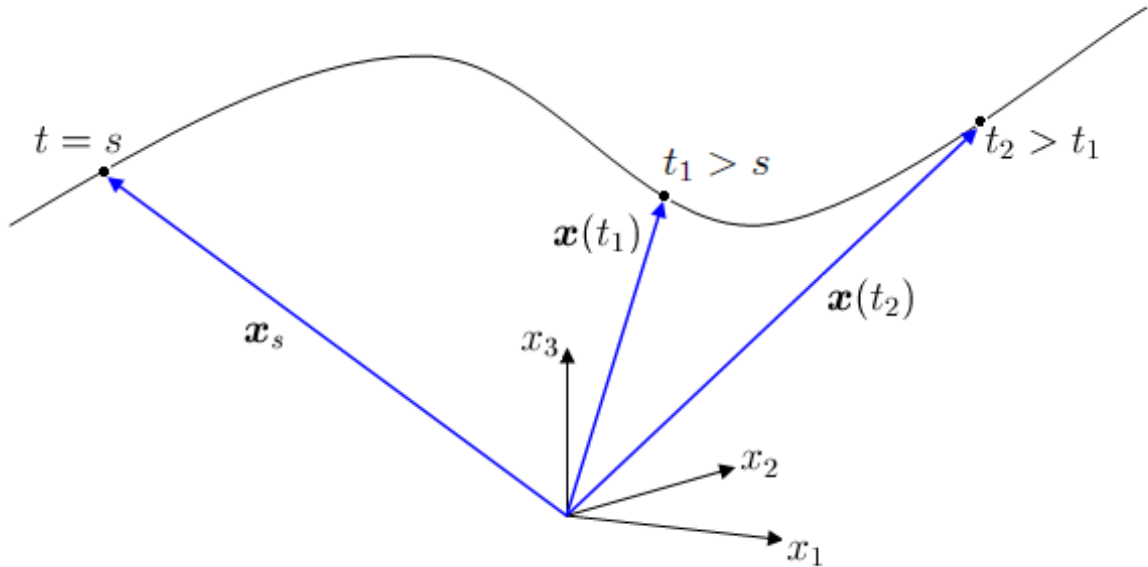


Abbildung 1: Bahnkurve

Verfolgen wir in Abbildung 1 die Bahn eines Fluidteilchens bzw. die Teilchenbahn eines der Strömung beigefügten Teilchens mit fortschreitender Zeit, so wird der Ausgangsort der Teilchenbewegung zur Zeit $t = s$ mit \mathbf{x}_s festgelegt. Zum Zeitpunkt $t_1 > s$ hat sich das Teilchen entlang der skizzierten Bahnkurve an den Ort $\mathbf{x}(t_1)$ bewegt und zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$ zum Ort $\mathbf{x}(t_2)$ usw. Die momentane Position \mathbf{x} des betrachteten Teilchens ist also eine Funktion des Ausgangsortes \mathbf{x}_s , der Ausgangszeit s und der momentanen Zeit t . Die Teilchenbahn schreibt sich damit

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) =: \mathbf{X}(t, s, \mathbf{x}_s)$$

und ergibt sich als Lösung einer Anfangswertaufgabe für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}(t)),$$

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{x}_s,$$

falls das instationäre Geschwindigkeitsfeld $(t, \boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ bekannt ist. Im Falle einer stationären Strömung (\boldsymbol{v} ist unabhängig von t) stimmt die Bahnkurve eines Flüssigkeitspartikels mit den Stromlinien überein und ist unabhängig vom Anfangszeitpunkt. Dies bedeutet, die Kurve $t \mapsto \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{x}_0)$ beschreibt die Bahn eines Flüssigkeitspartikels zur Zeit t , das sich zur Zeit $t = 0$ in $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ befindet und ergibt sich als Lösung einer Anfangswertaufgabe für ein autonomes System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)),$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0.$$

Interessiert man sich nicht für die Bewegung einzelner Fluidteilchen sondern für den Strömungszustand in Abhängigkeit von Ort und Zeit, z.B. für die räumliche und zeitliche Verteilung der Geschwindigkeit einer Strömung im Gegensatz zur Geschwindigkeit bestimmter Teilchen im Laufe der Zeit, so verwendet man die Eulersche Darstellung: Mit Hilfe von Bilanzgleichungen (Massenerhaltung, Impulserhaltung, Drehimpulserhaltung, Energieerhaltung, vgl. [Oer04, Oertel, S. 195]) kann man ein System instationärer nichtlinearer partieller Differentialgleichungen zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes \boldsymbol{v} und einer Druckfunktion p im Zylindergebiet $\Omega_T := (0, T) \times \Omega$ angeben:

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{v} - \nu \Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \nabla p &= \boldsymbol{f} \quad \text{in } \Omega_T, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= 0 \quad \text{in } \Omega_T, \\ \boldsymbol{v}|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \text{in } (0, T), \\ \boldsymbol{v}|_{t=0} &= \boldsymbol{v}_0 \quad \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{N_0}$$

Dies sind die Gleichungen von Navier-Stokes. Sie beschreiben das Verhalten einer zähen, inkompressiblen, instationären Strömung und gelten für viele wichtige Strömungsprobleme, beispielsweise für Luftströmungen weit unterhalb der Schallgeschwindigkeit, für Wasserströmungen, sowie für flüssige Metalle. Die äußere

Kraftdichte \mathbf{f} , die Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 und die (kinematische) Viskositätskonstante $\nu > 0$ sind vorgegebene Daten.

Im Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ konnten für die Navier-Stokes-Gleichungen (N_0) bereits weitreichende Existenz-, Eindeutigkeits- und Regularitätsaussagen bewiesen werden. Im allgemeinen dreidimensionalen Fall, falls also die Daten $\mathbf{f}, \mathbf{v}_0, \nu$ keinen Kleinheitsannahmen unterliegen, hat man bisher lediglich Existenz und Eindeutigkeit zeitlich lokaler starker Lösungen nachgewiesen. Außerdem existieren zeitlich global so genannte schwache Lösungen, deren Regularität für den Nachweis der Eindeutigkeit im dreidimensionalen Fall allerdings nicht ausreicht. Somit bleibt die Lücke zwischen der zeitlich lokalen, eindeutigen starken Lösung und den zeitlich globalen, nicht eindeutigen schwachen Lösungen von (N_0) im Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ weiterhin offen. Das renommierte Clay Mathematics Institute hat dieses Problem zu einem von sieben Millenniumsproblemen erklärt und für seine Lösung eine Million US-Dollar ausgelobt (siehe [adr, Clay Mathematics Institute]).

In der vorliegenden Arbeit wird ein neues Approximationsverfahren für die Navier-Stokes-Gleichungen entwickelt, das auf einer Kopplung der Eulerschen und Lagrangeschen Beschreibung zäher Strömungen beruht. Ausgangspunkt ist hier ein im Fall konservativer äußerer Kräfte ($\mathbf{f} = 0$) in [Var07, Varnhorn] entwickeltes Verfahren, das lediglich für eine sehr spezielle Klasse von Anfangswerten \mathbf{v}_0 anwendbar ist. Die Hauptresultate dieser Arbeit sind:

- Bereits eine einzige, am nichtlinearen Term der Navier-Stokes-Gleichungen (N_0) vorgenommene Lagrangesche Differenzennäherung führt in Verbindung mit einer Zeitverschiebung um $\varepsilon > 0$ zu einem zeitlich global lösbaren System (N_ε) , $\varepsilon > 0$.
- Die Lösung \mathbf{v}^ε von (N_ε) ist eindeutig bestimmt, stark $H^2(\Omega)$ -stetig gleichmäßig in $[0, T]$ und erfüllt die Energiegleichung.
- Die Folge (\mathbf{v}^ε) besitzt für $\varepsilon \rightarrow 0$ einen Häufungspunkt \mathbf{v} , der (N_0) im schwachen Sinne löst und der Energieungleichung genügt.

In den ersten zwei Kapiteln der Arbeit werden zunächst die für die Theorie benötigten Grundlagen formuliert. Dazu gehören die wichtigsten Funktionenräume mit ihren Eigenschaften sowie einige fundamentale Ungleichungen und Einbettungssätze.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Lagrangeschen Darstellung stationärer und instationärer Strömungen. Speziell wird für die Bahnkurve $t \mapsto \mathbf{x}(t) =: \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ eines Flüssigkeitspartikels in einer stationären Strömung die wichtige Eigenschaft der Maßtreue der Abbildung $\mathbf{X}(t, \cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$, nämlich

$$\det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

explizit hergeleitet. Diese Eigenschaft impliziert für $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ mit (\cdot, \cdot) als Skalarprodukt die Beziehung

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{X}(t, \cdot), \mathbf{g} \circ \mathbf{X}(t, \cdot)) = (\mathbf{f}, \mathbf{g}),$$

die wir bei unseren Abschätzungen häufig verwenden.

Im vierten Kapitel entwickeln wir ein Approximationsverfahren, wobei wir den nichtlinearen konvektiven Term $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ der Gleichungen von Navier - Stokes stückweise linearisieren. Dazu wird das Intervall $[0, T]$ durch $t_k := k \varepsilon$ mit $\varepsilon := \frac{T}{N} > 0$ in $N \in \mathbb{N}$ gleichlange Teilintervalle der Länge ε zerlegt.

Die Herleitung des Approximationsverfahrens lässt sich wie folgt veranschaulichen: Zunächst verwenden wir für die Linearisierung von $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ eine Zeitverschiebung um $\varepsilon > 0$ in der Form

$$\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{v}(t) \approx \mathbf{v}(t - \varepsilon) \cdot \nabla \mathbf{v}(t).$$

Dann approximieren wir den Term $\mathbf{v}(t - \varepsilon) \cdot \nabla \mathbf{v}(t)$ mit zentralen Lagrangeschen Differenzen:

$$\mathbf{v}(t - \varepsilon) \cdot \nabla \mathbf{v}(t) =: \mathbf{v}(s) \cdot \nabla \mathbf{v}(t) \approx \frac{1}{2\varepsilon} \left(\mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_s(\varepsilon, \cdot) - \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_s^{-1}(\varepsilon, \cdot) \right) =: L_\varepsilon^s \mathbf{v}(t),$$

wobei $\mathbf{X}_s(\varepsilon, \cdot)$ aus der Lagrangeschen Darstellung der **stationären** Strömung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_s(\mathbf{x}(t)) := \mathbf{v}(s, \mathbf{x}(t)),$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

gewonnen wird.

Schließlich verwenden wir zur Vereinfachung des Aufwandes eine lineare Interpolation und approximieren $L_\varepsilon^s \mathbf{v}(t)$ für $t \in [t_k, t_{k+1}]$ durch

$$L_\varepsilon^s \mathbf{v}(t) \approx \frac{t - t_k}{\varepsilon} L_\varepsilon^k \mathbf{v}(t) + \frac{t_{k+1} - t}{\varepsilon} L_\varepsilon^{k-1} \mathbf{v}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t - t_k}{2\varepsilon^2} \left(\mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k(\varepsilon, \cdot) - \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}(\varepsilon, \cdot) \right) \\
&\quad + \frac{t_{k+1} - t}{2\varepsilon^2} \left(\mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_{k-1}(\varepsilon, \cdot) - \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_{k-1}^{-1}(\varepsilon, \cdot) \right) =: Z_\varepsilon^k \mathbf{v}(t).
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass zur Approximation des konvektiven Termes $\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{v}(t)$ für alle $t \in [t_k, t_{k+1}]$ lediglich die beiden Abbildungen $\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_k : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ und deren Inverse zu bestimmen sind. Somit liegt das folgende Problem vor: Sei $\varepsilon := \frac{T}{N} > 0$. Gesucht sind ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ und eine Druckfunktion p als Lösung der regularisierten Navier - Stokes - Gleichungen

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + Z_\varepsilon \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_T, \\
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } \Omega_T, \\
\mathbf{v}|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \text{in } (0, T), \\
\mathbf{v}|_{t \leq 0} &= \mathbf{v}_0 \quad \text{in } \Omega.
\end{aligned} \tag{N_\varepsilon}$$

Dabei setzen wir für jedes $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$,

$$Z_\varepsilon \mathbf{v}(t) := Z_\varepsilon^k \mathbf{v}(t).$$

Im fünften Kapitel befassen wir uns mit dem Beweis der Existenz einer Lösung des oben beschriebenen Problems auf dem ersten Zeitintervall $[0, \varepsilon]$. Den Beweis führen wir mit Hilfe eines Galerkinansatzes auf der Basis der Eigenfunktionen des Stokes - Operators $-P\Delta$ wie in [Hey80, Heywood]. Es werden zunächst geeignete a-priori Abschätzungen für die Galerkinnäherungslösungen hergeleitet, die dann mit Hilfe von Kompaktheitsschlüssen über elementare funktionalanalytische Methoden zu einer eindeutig bestimmten auf $[0, \varepsilon]$ stark $H^2(\Omega)$ -stetigen Lösung von (N_ε) führen.

Im sechsten Kapitel wird gezeigt, dass sich der Lösungsprozess aus dem fünften Kapitel auf den folgenden Teilintervallen wiederholen lässt: Alle bei den Daten geforderten Regularitätsannahmen lassen sich auf die Lösung des Systems (N_ε) und damit auf die resultierenden autonomen Systeme zur Bestimmung der benötigten Bahnkurven übertragen, so dass der schrittweise Lösungsprozess auf die nächsten Teilintervalle fortgesetzt werden kann. Dies führt schließlich zu einer eindeutigen klassischen Lösung des System (N_ε) in $[0, T]$ für jedes $\varepsilon > 0$. Die Autonomie der Systeme zur Bestimmung der Bahnkurven spielt hier eine wesentliche Rolle.

Anschließend betrachten wir im letzten Kapitel die Konvergenz der approximierten Lösung gegen eine schwache Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen im Sinne

von Hopf. Durch Entwicklung geeigneter, vom Zeitverschiebungsparameter $\varepsilon > 0$ unabhängiger Normschränken gelingt es, aus der Folge $(\boldsymbol{v}^\varepsilon)_\varepsilon$ der Näherungslösungen eine konvergente Teilfolge zu extrahieren, deren Grenzwert mit $\varepsilon \rightarrow 0$ eine globale schwache Lösung der Gleichungen von Navier-Stokes darstellt. Hier erfordert insbesondere der Grenzübergang im nichtlinearen Term (Theorem 7.5) ein trickreiches Arsenal von Abschätzungen.

1 Funktionenräume

In diesem Kapitel werden wir die benötigten Funktionenräume und ihre wichtigsten Eigenschaften einführen. Dies sind die Räume der stetigen und differenzierbaren Funktionen, die Räume der integrierbaren Funktionen, auch Lebesgue-Räume genannt, und die Sobolev-Räume, die bei der funktionalanalytischen Behandlung von Differentialgleichungen eine fundamentale Rolle spielen. Im Folgenden ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets ein beschränktes Gebiet, d.h. eine beschränkte, offene, zusammenhängende Menge.

1.1 C^m -Räume

Für $m \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet $C^m(\Omega)$ den Raum der Funktionen

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x}),$$

für die $\partial^\alpha u$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\alpha| \leq m$ existiert und stetig in Ω ist. Dabei ist $C^0(\Omega) =: C(\Omega)$ der Raum der stetigen Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Mit

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

bezeichnet man den Raum der in Ω beliebig oft differenzierbaren Funktionen.

Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit \overline{M} ihren Abschluss. Damit definiert man den Träger einer Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\text{supp } u := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Für $m \in \mathbb{N}_0$ oder $m = \infty$ bezeichnet die Menge $C_0^m(\Omega)$ den Raum aller m -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit einem in Ω enthaltenen kompakten Träger:

$$C_0^m(\Omega) := \{u \in C^m(\Omega) : \text{supp } u \text{ kompakt, } \text{supp } u \subset \Omega\}.$$

Die entsprechenden Räume für Vektorfelder $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_n(\mathbf{x}))$ sind in kanonischer Weise definiert:

$$\mathbf{C}^m(\Omega) := \{(u_1, \dots, u_n) : u_j \in C^m(\Omega), j = 1, \dots, n\},$$

$$C_0^m(\Omega) := \{(u_1, \dots, u_n) : u_j \in C_0^m(\Omega), j = 1, \dots, n\}.$$

Weiter definieren wir für $m \in \mathbb{N}_0$ oder $m = \infty$ den Raum der m -mal stetig differenzierbaren, divergenzfreien Vektorfelder mit kompaktem Träger in Ω :

$$C_{0,\sigma}^m(\Omega) := \{(u_1, \dots, u_n) : u_j \in C_0^m(\Omega), j = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \partial_i u_i = 0\}.$$

1.2 L^p -Räume

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(\Omega)$ der Raum der in Ω Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Dieser Raum besteht aus Äquivalenzklassen fast überall gleichen Funktionen. Wie üblich unterscheiden wir nicht zwischen den Äquivalenzklassen und deren Repräsentanten.

Definition 1.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $1 \leq p < \infty$. Mit $L^p(\Omega)$ bezeichnet man den Raum aller Äquivalenzklassen von Lebesgue-messbaren reellen Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die über eine endliche Norm

$$\|u\|_{0,p} = \|u\|_{L^p} = \|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

verfügen.

Für $p = \infty$ ist $L^\infty(\Omega)$ der Raum aller Äquivalenzklassen fast überall Lebesgue-messbarer Funktionen u mit einer endlichen Norm

$$\|u\|_{0,\infty} = \|u\|_{L^\infty} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x})|.$$

Für $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist $\mathbf{L}^p(\Omega)$ der entsprechende Raum der Vektorfelder:

$$\mathbf{L}^p(\Omega) := \{(u_1, \dots, u_n) : u_j \in L^p(\Omega), j = 1, \dots, n\}$$

und

$$\|\mathbf{u}\|_{0,p} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} := \left(\sum_{j=1}^n \|u_j\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

für $1 \leq p < \infty$ bzw.

$$\|\mathbf{u}\|_{0,\infty} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} := \sup_j \|u_j\|_{0,\infty}$$

für $p = \infty$ seine Norm.

Die L^p -Räume besitzen wichtige Eigenschaften:

- Alle L^p -Räume ($1 \leq p \leq \infty$) sind Banachräume.
- Für $1 < p < \infty$ sind die Dualräume der L^p -Räume wieder L^p -Räume, konkret gilt: Der Dualraum von $L^p(\Omega)$ ist der Raum $L^q(\Omega)$, wobei q die Gleichung $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ erfüllt [Alt06, Alt, S.126].
- Die Teilmenge $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$.
- Für $p = 2$ erhalten wir den wichtigen Hilbertraum $L^2(\Omega)$, ausgestattet mit Skalarprodukt

$$(u, v) := \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

und Norm

$$\|u\| = \|u\|_{0,2} = \|u\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

für $u, v \in L^2(\Omega)$. Für Vektorfelder $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ hat man

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{j=1}^n (u_j, v_j) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$$

mit $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n u_j v_j$.

- Es gilt ein Variationslemma ([Rey79, Reymond]):

Lemma 1.2 (Lemma von Du Bois-Reymond) Sei $u \in L^2(\Omega)$ und

$$\int_{\Omega} uv d\mathbf{x} = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

dann ist $u(\mathbf{x}) = 0$ f.ü. in Ω .

1.3 Sobolevräume

Definition 1.3 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, α ein Multiindex und $u, w \in L^1(\Omega)$. Dann heißt $\partial^\alpha u := w$ die α -te schwache Ableitung von u in Ω , falls

$$\int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w \varphi d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt.

Die schwachen Ableitungen sind in $L^1(\Omega)$ eindeutig bestimmt und stimmen mit den klassischen Ableitungen überein, falls diese existieren und sich in $L^1(\Omega)$ befinden.

Definition 1.4 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$. Wir definieren den Sobolevraum $W^{m,p}(\Omega)$ als Menge aller Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ aus $L^p(\Omega)$, deren schwache Ableitungen $\partial^\alpha u$ für $|\alpha| \leq m$ existieren und zum Raum $L^p(\Omega)$ gehören, d.h.

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Für $1 \leq p < \infty$ ist dabei

$$\|u\|_{m,p} = \|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{0,p}^p \right)^{1/p}$$

und für $p = \infty$

$$\|u\|_{m,\infty} = \|u\|_{W^{m,\infty}} = \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{0,\infty}$$

die Norm in $W^{m,p}(\Omega)$.

Der Sobolevraum $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ von Vektorfunktionen $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) := \{(u_1, \dots, u_n) : u_j \in W^{m,p}(\Omega), j = 1, \dots, n\}$$

mit der Norm

$$\|\mathbf{u}\|_{m,p} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{m,p}} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{j=1}^n \|u_j\|_{m,p}^p \right)^{1/p}.$$

Wir betrachten jetzt eine wichtige Konvergenzeigenschaft in Sobolevräumen: Sei $(u_n)_n \subset W^{m,p}(\Omega)$ eine Cauchy-Folge in $W^{m,p}(\Omega)$. Aufgrund der Definition der Sobolevnorm ist daher die Folge $(\partial^\alpha u_n)_n$ für alle $|\alpha| \leq m$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. Da dieser Raum vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen ein Grenzelement $u_\alpha \in L^p(\Omega)$. Sei nun eine Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig gewählt. Da insbesondere $\partial^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha$ in $L^1(\Omega)$ gilt, können wir in

$$\int_{\Omega} u_n \partial^\alpha \phi \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (\partial^{\alpha u_n}) \phi \, d\mathbf{x}$$

den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durchführen und erhalten

$$\int_{\Omega} u \partial^\alpha \phi \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \phi \, d\mathbf{x}.$$

Also ist $\partial^\alpha u = u_\alpha$, und es folgt $u_n \rightarrow u$ in $W^{m,p}(\Omega)$.

Definition 1.5 Die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{m,p}$ bezeichnen wir mit $W_0^{m,p}(\Omega)$. Entsprechend ist der Raum $\mathbf{W}_0^{m,p}(\Omega)$ definiert durch

$$\mathbf{W}_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}.$$

Für $m = 0$ gilt $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ und $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, weil $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ liegt. Somit folgt für alle $m \in \mathbb{N}_0$ die Inklusion

$$W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Wir verwenden auch die Bezeichnungen

$$\|\nabla u\|_{0,p} := \left(\sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_{0,p}^p \right)^{1/p}, \quad \|\nabla^2 u\|_{0,p} := \left(\sum_{i,j=1}^n \|\partial_i \partial_j u\|_{0,p}^p \right)^{1/p}$$

für $1 \leq p < \infty$, und

$$\|\nabla u\|_{0,\infty} := \max_{j=1,\dots,n} \|\partial_j u\|_{0,\infty}, \quad \|\nabla^2 u\|_{0,\infty} := \max_{i,j=1,\dots,n} \|\partial_i \partial_j u\|_{0,\infty}$$

für $p = \infty$. Mit diesen Bezeichnungen hat man

$$\|u\|_{1,p}^p = \|u\|_{0,p}^p + \|\nabla u\|_{0,p}^p,$$

bzw.

$$\|u\|_{2,p}^p = \|u\|_{0,p}^p + \|\nabla u\|_{0,p}^p + \|\nabla^2 u\|_{0,p}^p.$$

Für $p = 2$ ist der Raum $W^{m,2}(\Omega)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v), \quad u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

Definition 1.6 Mit $H^{m,p}(\Omega)$ bezeichnet man die Vervollständigung der Menge $\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ bzgl. der Sobolevnorm $\|\cdot\|_{m,p}$, d.h. wir setzen

$$H^{m,p}(\Omega) := \overline{C^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}.$$

Für Vektorfelder definieren wir entsprechend

$$\mathbf{H}^{m,p}(\Omega) := \overline{\mathbf{C}^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}.$$

Satz 1.7 (N. Meyers, J.Serrin) Für $1 \leq p < \infty$ gilt

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega).$$

Beweis: siehe [MS64, Meyers, Serrin, S. 1055-1056]

Für $p = 2$ setzen wir $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ mit $\|u\|_m := \|u\|_{m,2}$ und $\|u\| := \|u\|_{0,2}$. Für Vektorfelder verwenden wir die entsprechenden Bezeichnungen.

Für unsere Arbeit sind noch zwei Räume von großer Bedeutung:

Definition 1.8 Die Vervollständigung von $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|$ bezeichnen wir mit $\mathcal{H}^0(\Omega)$ und bzgl. der Dirichlet-Norm $\|\nabla \cdot\|$ mit $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

Der Raum $\mathcal{H}^1(\Omega)$ ist mit dem Skalarprodukt $(\nabla \cdot, \nabla \cdot)$ und der Norm $\|\nabla \cdot\|$ versehen und ein abgeschlossener Teilraum von $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$, also wieder ein Hilbertraum. Man kann $\mathcal{H}^1(\Omega)$ auch folgendermaßen darstellen:

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}.$$

Dabei ist $\nabla \cdot \mathbf{u}$ als L^2 -Funktion wohldefiniert.

1.4 B -wertige Funktionen

Sei B einer oben definierten Räume $\mathbf{C}^m(\Omega)$, $\mathbf{L}^p(\Omega)$, $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$, $\mathbf{H}^m(\Omega)$ mit der Norm $\|\cdot\|_B$. Wir betrachten jetzt die Funktion $\phi : I \rightarrow B$, $t \mapsto \phi(t)$ für alle $t \in I \subset \mathbb{R}$. Diese Funktion ϕ heißt stetig, falls für alle $t_0 \in I$

$$\|\phi(t) - \phi(t_0)\|_B \rightarrow 0$$

für $t \rightarrow t_0$ gilt. Den Raum solcher Funktionen bezeichnen wir mit $C(I, B)$. Mit $C_0(I, B)$ bezeichnen wir denjenigen Teilraum von $C(I, B)$, dessen Funktionen einen kompakten Träger in I besitzen. Existiert für $\phi \in C(I, B)$ eine Funktion $\dot{\phi} \in C(I, B)$ mit

$$\left\| \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} - \dot{\phi}(t) \right\|_B \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

so heißt $\dot{\phi}$ Ableitung von ϕ . Mit $C^1(I, B)$ bezeichnen wir denjenigen Teilraum von $C(I, B)$, dessen Funktionen ϕ eine Ableitung $\dot{\phi} \in C(I, B)$ besitzen.

Normieren wir $C_0(I, B)$ durch

$$\left(\int_I \|\phi(t)\|_B^p dt \right)^{1/p},$$

so bezeichnen wir die Vervollständigung von $C_0(I, B)$ bezüglich dieser Norm mit $L^p(I, B)$. Für $p = \infty$ gilt $\phi \in L^\infty(I, B)$, falls $\|\phi(t)\|_B$ fast überall messbar und beschränkt ist.

Im Falle $B = \mathbf{L}^q(\Omega)$ bzw. $B = \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ schreiben wir

$$\|\phi\|_{0,q,p} := \left(\int_I \|\phi(t)\|_{0,q}^p dt \right)^{1/p}$$

bzw.

$$\|\phi\|_{0,q,\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} \|\phi(t)\|_{0,q}.$$

für die Norm in $L^p(I, \mathbf{L}^q(\Omega))$ bzw. in $L^\infty(I, \mathbf{L}^q(\Omega))$. Gilt $B = \mathbf{H}^m(\Omega)$, so schreiben wir analog

$$\|\phi\|_{m,p} := \left(\int_I \|\phi(t)\|_m^p dt \right)^{1/p}$$

für die Norm in $L^p(I, \mathbf{H}^m(\Omega))$, $1 \leq p \leq \infty$.

2 Vorbereitungen

2.1 Einige Ungleichungen

Als Erstes führen wir die **Poincaré-Ungleichung** ein, die eine fundamentale Rolle für die Abschätzungen von Lösungen partieller Differentialgleichungen in einem beschränkten Gebiet spielt:

Lemma 2.1 (Ungleichung von Poincaré) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 < p < \infty$ und sei $d = d(\Omega) := \sup_{x, y \in \Omega} |x - y|$ der Durchmesser von Ω . Dann gilt

$$\|u\|_{L^p} \leq c \|\nabla u\|_{L^p}$$

für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit einer nur von p, d abhängigen Konstanten $c = c(p, d) > 0$.

Als Nächstes formulieren wir eine wichtige Ungleichung in L^p -Räumen:

Lemma 2.2 (Höldersche Ungleichung) Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $p' := \frac{p}{p-1}$ mit $1 \leq p \leq \infty$ der zu p konjugierte Index. Dabei setzen wir $p' = \infty$ für $p = 1$, und $p' = 1$ für $p = \infty$. Ist $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^{p'}(\Omega)$, dann ist $uv \in L^1(\Omega)$ und es gilt die Höldersche Ungleichung

$$\|uv\|_{0,1} \leq \|u\|_{0,p} \|v\|_{0,p'}.$$

Die folgende allgemeine Formulierung folgt als Korollar:

Korollar 2.3 Es seien $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p_j \leq \infty$ und $u_j \in L^{p_j}(\Omega)$ für $j = 1, \dots, m$. Gilt dann

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j} =: \frac{1}{r} \leq 1,$$

so folgt $\prod_{j=1}^m u_j \in L^r(\Omega)$, und es gilt die Abschätzung $\|\prod_{j=1}^m u_j\|_{0,r} \leq \prod_{j=1}^m \|u_j\|_{0,p_j}$.

Lemma 2.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) Sei X ein linearer Raum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_X$. Dann gilt die Beziehung

$$|(a, b)_X|^2 \leq (a, a)_X (b, b)_X$$

für alle $a, b \in X$.

Unter Verwendung der Norm $\|a\|_X^2 := (a, a)_X$ ergibt sich daraus

$$|(a, b)_X| \leq \|a\|_X \|b\|_X.$$

Lemma 2.5 (Youngsche Ungleichung) Sei $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit $u(0) = 0$, und sei u^{-1} ihre Umkehrfunktion. Dann gilt für alle $a, b \geq 0$:

$$ab \leq \int_0^a u(x) dx + \int_0^b u^{-1}(y) dy.$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $u(a) = b$ ist.

Beweis: siehe [Wit06, Witkowski].

Setzt man hier $u(x) := x^{p-1}$, so gilt $u^{-1}(y) = y^{q-1}$. In diesem Fall erhält man

Lemma 2.6 Sind $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a, b \geq 0$, so gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $ap = bq$.

Eine gewichtete Version dieser Abschätzung ist ebenfalls gültig. Man erhält sie hieraus für $a := (\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}|x|$ und $b := (\varepsilon p)^{-\frac{1}{p}}|y|$:

Lemma 2.7 Für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$|xy| \leq \varepsilon |x|^p + \frac{(p\varepsilon)^{1-q}}{q} |y|^q.$$

Das folgende Lemma erlaubt es, aus der impliziten Information einer Integralungleichung explizite Schranken herzuleiten.

Lemma 2.8 (Gronwall) Gegeben seien ein Intervall $I := [a, b]$ sowie stetige Funktionen $u, \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $\beta : I \rightarrow [0, \infty)$. Weiter gelte die Integralungleichung

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds$$

für alle $t \in I$. Dann gilt die Abschätzung

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\sigma)d\sigma} ds \quad (2.1)$$

für alle $t \in I$.

Korollar 2.9 Sind die Funktionen α , β Konstanten mit $\alpha(t) = A$ und $\beta(t) = B \geq 0$, dann lautet die Abschätzung (2.1)

$$u(t) \leq A + \int_a^t ABe^{B(t-s)} ds = Ae^{B(t-a)}.$$

Die **Besselsche Ungleichung** beschreibt den Sachverhalt, dass ein Vektor u eines Hilbertraumes mindestens so ‘lang’ ist, wie jede seiner Projektionen auf einen endlichdimensionalen Unterraum:

Lemma 2.10 (Besselsche Ungleichung) Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_H$ und Norm $\|\cdot\|_H$, und $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ ein Orthonormalsystem in H . Dann gilt für alle $u \in H$ und jedes $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\|u\|_H^2 \geq \sum_{n=1}^N |(u_n, u)_H|^2.$$

Gilt in der Besselschen Ungleichung das Gleichheitszeichen, so heißt sie Parsevalsche Gleichung und stellt eine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras für Innenprodukträume dar:

Lemma 2.11 (Parsevalsche Gleichung) Sei H ein Innenproduktraum (Prä-hilbertraum) und S ein Orthonormalsystem. S ist genau dann eine Orthonormalbasis von H , wenn für alle $u \in H$ die Parsevalsche Gleichung

$$\|u\|_H^2 = \sum_{s \in S} |(u, s)_H|^2$$

erfüllt ist.

Lemma 2.12 (Ungleichung von Friedrichs) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\Omega)$. Dann gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|u\|^2 \leq \sum_{n=1}^N |(u, u_n)|^2 + \varepsilon \|\nabla u\|^2.$$

Beweis: siehe [Shi73, Shinbrot, S.147]

2.2 Satz von Gauß

Als Nächstes formulieren wir den Satz von Gauß. Dazu benötigen wir noch einige Vorbereitungen:

Definition 2.13 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem Randpunkt $\mathbf{a} \in \partial A$ existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine k -mal stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $A \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \psi(\mathbf{x}) \leq 0\}$ und $\nabla\psi(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in U$. In diesem Fall sagen wir, A hat einen glatten Rand ∂A der Klasse C^k und schreiben $\partial A \in C^k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Definition 2.14 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $\mathbf{a} \in \partial A$. Ein Vektor $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an A im Punkt \mathbf{a} , wenn es eine stetig differenzierbare Kurve

$$\boldsymbol{\psi} : (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \partial A \subset \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0$$

gibt mit $\boldsymbol{\psi}(0) = \mathbf{a}$ und $\boldsymbol{\psi}'(0) = \boldsymbol{\tau}$. Die Gesamtheit aller Tangentialvektoren an A in \mathbf{a} wird mit $T_{\mathbf{a}}A$ bezeichnet. Ein Vektor $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ heißt Normalenvektor von A in \mathbf{a} , wenn er auf $T_{\mathbf{a}}A$ senkrecht steht, d.h., falls $\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{w} = 0$ gilt für alle $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}}A$.

Satz 2.15 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand $\partial A \in C^1$ und $\mathbf{a} \in \partial A$. Dann existiert genau ein Vektor $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{a})$ steht senkrecht auf $T_{\mathbf{a}}(\partial A)$.
2. $\|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{a})\| = 1$.
3. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $\mathbf{a} + t\boldsymbol{\eta}(\mathbf{a}) \notin A$ für alle $t \in (0, \varepsilon)$.

Der Vektor $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{a})$ heißt äußerer Einheitsnormalenvektor von A im Punkt \mathbf{a} .

Satz 2.16 (Satz von Gauß) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand $\partial A \in C^1$, $\boldsymbol{\eta} : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld und $U \supset A$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_A \nabla \cdot \mathbf{F}(x) dx = \int_{\partial A} \mathbf{F}(x) \cdot \boldsymbol{\eta}(x) dS(x).$$

Dabei bezeichnet $dS(x)$ das Flächenelement auf ∂A .

Bemerkung 2.17 Der Gaußsche Integralsatz gilt auch noch, wenn der Rand von A nicht glatt ist, sondern niederdimensionale Singularitäten (Kanten, Ecken, etc.) hat und das Vektorfeld F nicht in einer vollen Umgebung von A stetig differenzierbar ist [For09, Forster].

Satz 2.18 (Greensche Formeln) *Unter den Voraussetzungen des Satzes von Gauß gilt für skalare Funktionen $u \in C^1(\bar{A})$ und $v \in C^2(\bar{A})$ die erste Greensche Formel*

$$\int_A (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial A} u \frac{\partial v}{\partial \eta} dS(x),$$

und für $u, v \in C^2(\bar{A})$ die zweite Greensche Formel

$$\int_A (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial A} \left(u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) dS(x).$$

2.3 Satz von Arzelà-Ascoli

Definition 2.19 *Sei E ein normierter Raum. Eine Menge $A \subseteq E$ heißt relativ kompakt, falls jede Folge $(x_n)_n \subset A$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ enthält. Liegt deren Grenzwert zusätzlich in A , so heißt A kompakt.*

Satz 2.20 *Für einen normierten Raum E sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

1. E ist endlichdimensional.
2. Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von E ist kompakt.
3. Die abgeschlossene Einheitskugel $K_1[0]$ ist kompakt.
4. Jede beschränkte Teilmenge von E ist relativ kompakt.
5. In E gibt es eine relativ kompakte Nullumgebung.

Der folgende Begriff erweitert den Begriff der Stetigkeit einer Funktion auf Funktionenscharen:

Definition 2.21 *Seien X, Y normierte Räume mit den Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$. Sei $F \subset C_b(X, Y)$ eine Teilmenge der Menge $C_b(X, Y)$ beschränkter, stetiger Funktionen, die X auf Y abbilden. Die Funktionenfamilie F heißt gleichgradig stetig im Punkt $x \in X$, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in F : \|x - x'\|_X \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\|_Y \leq \varepsilon.$$

Die Familie F heißt gleichgradig stetig, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ gleichgradig stetig ist.

Beim Beweis der Existenz einer regularisierten Lösung spielt Satz von Arzelà-Ascoli eine wichtige Rolle.

Satz 2.22 (Arzelà-Ascoli) *Sei X ein kompakter normierter Raum, Y ein Banachraum und $F \subseteq C(X, Y)$ eine Teilmenge stetiger Funktionen $f : X \rightarrow Y$, wobei $C(X, Y)$ mit der Supremumsnorm versehen wird. Dann ist F relativ kompakt in $C(X, Y)$ genau dann, wenn F gleichgradig stetig ist und wenn für jedes $x \in X$ die Menge $\{f(x) : f \in F\}$ relativ kompakt in Y ist.*

Beweis: siehe in [HS96, Hirzebruch, Scharlau]

2.4 Einbettungssätze

Erinnern wir kurz an den Begriff der Einbettung:

Definition 2.23 *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ reelle Banachräume. Existiert ein linearer injektiver Operator $j : X \rightarrow Y$, so heißt X eingebettet in Y . Ist dieser Operator zudem stetig, gilt also für eine Konstante $\alpha > 0$ $\|j(x)\|_Y \leq \alpha \|x\|_X$ für alle $x \in X$, so heißt X in Y stetig eingebettet. Wir schreiben dann $X \hookrightarrow Y$. Ist dieser Operator zudem kompakt, d.h. ist er stetig und besitzt jede in X beschränkte Folge (x_n) eine in Y konvergente Teilfolge $(j(x_{n'}))$, so heißt X in Y kompakt eingebettet.*

Bemerkung 2.24 *Ist X in Y stetig eingebettet, so kann jedes Element aus X eindeutig mit einem Element aus Y identifiziert werden. Deswegen kann X als Teilraum von Y aufgefasst werden.*

Das erste Lemma betrifft die Einbettung von $W^{m,q}$ -Räumen in Räume stetiger Funktionen [Soh01, Sohr, S. 54]:

Lemma 2.25 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^m$, $m \in \mathbb{N}$. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $1 < q < \infty$ mit $m - \frac{n}{q} > k$. Dann gilt*

$$W^{m,q}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega}), \quad \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{m,q}(\Omega)}.$$

Dabei ist $C = C(\Omega, m, q) > 0$ eine Konstante.

Das nächste Lemma betrifft die Einbettung zwischen L^p -Räumen im Falle beschränkter Gebiete:

Lemma 2.26 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) ein beschränktes Gebiet und sei $|\Omega|$ sein Volumen. Sei $1 \leq q \leq p \leq \infty$ und $u \in L^p(\Omega)$. Dann gilt $u \in L^q(\Omega)$ mit*

$$\|u\|_{0,q} \leq |\Omega|^{\frac{p-q}{pq}} \|u\|_{0,p}.$$

Für $u \in L^\infty(\Omega)$ gilt $u \in L^q(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{0,q} \leq |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|u\|_{0,\infty}.$$

Der folgende Satz ist fundamental [AJ03, Adams, S. 85]:

Satz 2.27 (Sobolevscher Einbettungssatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und seien $j \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$.*

1. *Ist entweder $mp > n$ oder $m = n$, $p = 1$, dann gilt*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega). \quad (2.2)$$

2. *Ist $mp = n$ und $p \leq q < \infty$, so gilt*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega) \quad (2.3)$$

und insbesondere

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega). \quad (2.4)$$

3. *Ist $mp < n$ und $p \leq q \leq p^* := \frac{np}{n-mp}$. Dann gilt*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega) \quad (2.5)$$

und insbesondere gilt

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Das nächste Lemma beschreibt eine wichtige Interpolationsungleichung [Soh01, Sohr, S.53]:

Lemma 2.28 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ($n \geq 2$) ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $1 < r \leq n$, $1 < q < \infty$, $1 < \gamma < \infty$, $0 \leq \beta \leq 1$ mit*

$$\beta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{n} \right) + (1 - \beta) \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q}.$$

Dann gilt für alle $u \in W^{1,r}(\Omega) \cap L^\gamma(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|u\|_{0,q} \leq C \|u\|_{1,r}^\beta \|u\|_{0,\gamma}^{1-\beta} \leq C \left(\|u\|_{1,r} + \|u\|_{0,\gamma} \right) \quad (2.6)$$

mit einer Konstanten $C = C(\Omega, q, r, \gamma) > 0$.

2.5 Die stationären Stokes-Gleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Wir betrachten die stationären linearen Stokes-Gleichungen zu Bestimmung der Geschwindigkeit $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ und einer Druckfunktion $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ als Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Hier ist \mathbf{f} eine gegebene äußere Kraftdichte und die kinematische Zähigkeit zu Eins normiert.

Mit P bezeichnen wir die orthogonale Projektion von $\mathbf{L}^2(\Omega)$ auf $\mathcal{H}^0(\Omega)$ (vgl. Abschnitt 5.1). Für $\mathbf{f} \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ folgt hiermit aus (2.7)

$$-P\Delta \mathbf{u} = P\mathbf{f} = \mathbf{f}.$$

Die Abbildung $-P\Delta : \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^0(\Omega)$ ist ein symmetrischer Operator, denn für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} (P\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\Delta \mathbf{u}, P\mathbf{v}) = (\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \\ - (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) &= (\mathbf{u}, \Delta \mathbf{v}) = (P\mathbf{u}, \Delta \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, P\Delta \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Außerdem ist $-P\Delta$ wegen

$$(-P\Delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) \geq 0$$

positiv definit und besitzt eine kompakte Inverse $(-P\Delta)^{-1} : \mathcal{H}^0(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^0(\Omega)$ [Hey80, Heywood]. Damit können wir den folgenden Satz aus der Theorie kompakter Operatoren anwenden:

Satz 2.29 *Sei T ein symmetrischer linearer Operator von einem Hilbertraum H in sich. Es existiere T^{-1} und T^{-1} sei kompakt. Dann besitzt T^{-1} ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren $(x_n)_n$ mit zugehörigen Eigenwerten $(\lambda_n)_n$. Es gilt also $T^{-1}x_n = \lambda_n x_n$. Das Orthonormalsystem $(x_n)_n$ ist vollständig in H .*

Beweis: ([Wer07, Werner, p.241])

Für $T = -P\Delta$, $H = \mathcal{H}^0(\Omega)$ sind alle Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, der Operator $(-P\Delta)^{-1}$ besitzt also ein in seinem Bild $\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$ vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen. Dieses Orthonormalsystem ist vollständig in $\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$, aber da $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ dicht in diesem Raum liegt und andererseits auch in $\mathcal{H}^0(\Omega)$ und in $\mathcal{H}^1(\Omega)$ dicht ist, folgt dass $(e_i)_i$ auch in $\mathcal{H}^0(\Omega)$ bzw. in $\mathcal{H}^1(\Omega)$ vollständig bezüglich der jeweils zugehörigen Norm ist.

Zur Lösbarkeit der Stokes-Gleichungen (2.7) existiert ein wichtiges Resultat(vgl. [Cat61, Cattabriga, S.311]):

Satz 2.30 (Cattabriga) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{m+2}$, und sei $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert genau eine Lösung $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{m+2}(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$ von (2.7), und es gilt die Abschätzung*

$$\|\mathbf{u}\|_{m+2} \leq c \|\mathbf{f}\|_m$$

mit einer Konstanten $c = c(\Omega)$.

2.6 Schwache Konvergenz

Definition 2.31 *Der Raum $L(X, \mathbb{K})$ der stetigen linearen Funktionale auf einem normierten Raum heißt der Dualraum von X und wird mit X' bezeichnet.*

Eine wichtige Eigenschaft der Dualräume ist im folgenden Satz formuliert [Wer07, Werner, S.58]:

Satz 2.32 *Der Dualraum eines normierten Raums, versehen mit der Norm*

$$\|x'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)|,$$

ist stets ein Banachraum.

Definition 2.33 Sei X ein normierter Raum, X' sein Dualraum und $X'' := (X')'$ dessen Dualraum. Man nennt X'' den Bidualraum von X .

Die Abbildung

$$i : X \rightarrow X'', \quad (i(x))(x') = x'(x)$$

nennen wir die kanonische Abbildung des normierten Raumes X in seinem Bidualraum. Um die Abhängigkeit von X zu betonen, schreiben wir i_X .

Definition 2.34 Ein Banachraum X heißt reflexiv, wenn i_X surjektiv ist.

Satz 2.35

1. Abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume sind reflexiv.
2. Ein Banachraum X ist genau dann reflexiv, wenn X' reflexiv ist.

Beweis: [Wer07, Werner, S.105]

Definition 2.36 Eine Folge (x_n) in einem normierten Raum X heißt schwach konvergent gegen x , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'(x_n) = x'(x) \quad \forall x' \in X'$$

gilt.

Satz 2.37 In einem reflexiven Raum X besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.

Beweis: [Wer07, Werner, S.107].

Definition 2.38 Es sei H ein Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|_H$ und Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_H$, (v_n) eine Folge in H , $v \in H$. Dann heißt (v_n) schwach konvergent gegen v ($v_n \rightharpoonup v$), falls

$$\forall w \in H : (v_n, w)_H \rightarrow (v, w)_H \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Satz 2.39 Es gilt:

1. Der schwache Grenzwert v ist eindeutig.
2. $v_n \rightarrow v \Rightarrow v_n \rightharpoonup v$.
3. $v_n \rightharpoonup v \Rightarrow \|v\| \leq \liminf \|v_n\|$.
4. $v_n \rightharpoonup v \wedge \|v\| \geq \limsup \|v_n\| \Rightarrow v_n \rightarrow v$.

Beweis:

1. Es gelte $v_n \rightharpoonup v$ und $v_n \rightharpoonup \tilde{v}$. Dann folgt für alle $w \in H$

$$(v - \tilde{v}, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n, w) - \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n, w) = 0.$$

Setzte $w := v - \tilde{v}$, dann folgt $v = \tilde{v}$.

2. $|(v_n, w) - (v, w)| = |(v_n - v, w)| \leq \|v_n - v\| \cdot \|w\| \rightarrow 0$.

3. Es gilt $(v_n, v) \rightarrow \|v\|^2$. Sei (v_{n_k}) Teilfolge mit $\|v_{n_k}\| \rightarrow \liminf \|v_n\|$. Dann:

$$\|v\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (v_{n_k}, v) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_{n_k}\| \cdot \|v\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| \cdot \|v\|.$$

4. $\|v\| \leq \liminf \|v_n\| \leq \limsup \|v_n\| \leq \|v\| \Rightarrow \|v_n\| \rightarrow \|v\|$.

Schließlich geben wir noch einige Spezialfälle reflexiver Räume an, die für uns von großer Bedeutung sind (vgl. [AJ03, Adams, S. 45 und S. 61]):

Satz 2.40 *Für $1 < p < \infty$ ist der Raum $L^p(\Omega)$ reflexiv.*

Satz 2.41 *Der Sobolevraum $W^{m,p}(\Omega)$ ist reflexiv für $1 < p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}_0$.*

Aus diesem Satz ergibt sich auch die Reflexivität von $\mathbf{W}^{m,p}$ für $1 < p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

Satz 2.42 (Schwache Konvergenz in Sobolevräumen) *Sei $u \in L^p(\Omega)$ und $(u_k)_k$ eine in $W^{j,p}(\Omega)$ beschränkte und in $L^p(\Omega)$ gegen u schwach konvergente Folge. Dann gilt*

$$u \in W^{j,p}(\Omega)$$

und für jedes α mit $0 \leq |\alpha| \leq j$ konvergiert die Folge $(\partial^\alpha u_k)_k$ schwach gegen $\partial^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$.

Beweis: siehe [Fri08, Friedmann, S. 16]

3 Lagrangesche Beschreibung der Strömungen

3.1 Darstellung stationärer Strömungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ und $\mathbf{v} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Geschwindigkeitsfeld. Außerdem gelte $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Zu beliebigem $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}$ bezeichne die Funktion

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) =: \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)$$

die Bahnkurve eines Flüssigkeitspartikels zur Zeit t , das sich zur Zeit $t = 0$ in $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}$ befindet. Da wir stationäre Strömungen betrachten, sind die Bahnkurven unabhängig vom Anfangszeitpunkt und ergeben sich als Lösung einer Anfangswertaufgabe für ein autonomes System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ist nun \mathbf{v} zusätzlich Lipschitz-stetig, so existiert eine eindeutig bestimmte globale Lösung $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)$ der Anfangswertaufgabe für jedes $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}$. Aufgrund der Eindeutigkeit dieser Lösung bildet die Menge

$$\mathfrak{R} = \{\mathbf{X}(t, \cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

eine kommutative Gruppe von C^1 -Diffeomorphismen in $\bar{\Omega}$. Insbesondere ist die inverse Abbildung $\mathbf{X}(t, \cdot)^{-1}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ gegeben durch $\mathbf{X}(-t, \cdot)$, und es gilt

$$\mathbf{X}(t, \cdot) \circ \mathbf{X}(-t, \cdot) := \mathbf{X}(t, \mathbf{X}(-t, \cdot)) = \mathbf{X}(t - t, \cdot) = \mathbf{X}(0, \cdot) = id,$$

das heißt $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}(-t, \mathbf{x})) = \mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. Ist \mathbf{v} zusätzlich divergenzfrei, so folgt aus der Liouvilleschen Differentialgleichung

$$\partial_t \det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) = \det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})))$$

die so genannte Maßtreue der Abbildung $\mathbf{X}(t, \cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$:

Lemma 3.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, und sei $\mathbf{v} \in C_{*,\sigma}^{lip}(\bar{\Omega})$ ein divergenzfreies, Lipschitz-stetiges, auf $\partial\Omega$ verschwindendes Vektorfeld. Außerdem sei $\mathfrak{R} = \{\mathbf{X}(t, \cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega} \mid t \in \mathbb{R}\}$ die hieraus resultierende kommutative Gruppe von C^1 -Diffeomorphismen in $\bar{\Omega}$, wie oben definiert. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) = 1.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ unabhängig von t ist. Hierzu erhalten wir durch Entwicklung nach der ersten Zeile die Darstellung

$$\begin{aligned} \det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) &= \det \begin{pmatrix} \partial_1 X_1 & \partial_2 X_1 & \partial_3 X_1 \\ \partial_1 X_2 & \partial_2 X_2 & \partial_3 X_2 \\ \partial_1 X_3 & \partial_2 X_3 & \partial_3 X_3 \end{pmatrix} (t, \mathbf{x}) \\ &= \partial_1 X_1 (\partial_2 X_2 \partial_3 X_3 - \partial_3 X_2 \partial_2 X_3) \\ &\quad + \partial_2 X_1 (\partial_3 X_2 \partial_1 X_3 - \partial_1 X_2 \partial_3 X_3) \\ &\quad + \partial_3 X_1 (\partial_1 X_2 \partial_2 X_3 - \partial_2 X_2 \partial_1 X_3) (t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Analog folgt durch Entwicklung nach der i -ten Zeile ($i = 1, 2, 3$) die Darstellung

$$\det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) =: \sum_{k=1}^3 \partial_k X_i(t, \mathbf{x}) D_{ik}(t, \mathbf{x}). \quad (3.2)$$

Dabei ist D_{ik} definiert durch

$$D_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

mit M_{ik} als Determinante derjenigen 2×2 -Untermatrix, die aus $\nabla \mathbf{X}$ durch Streichen der i -ten Zeile und k -ten Spalte entsteht.

Zur Berechnung der Ableitung $\partial_t(\det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}))$ verwenden wir die Kettenregel und betrachten $\det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ als Funktion von $\partial_k X_i$. Da für $i = 1, 2, 3$ der Wert D_{ik} von $\partial_k X_i$ unabhängig ist, folgt aus (3.2)

$$\frac{\partial \det \nabla \mathbf{X}}{\partial(\partial_k X_i)} = D_{ik}(t, \mathbf{x}).$$

Hieraus resultiert

$$\partial_t \det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \det \nabla \mathbf{X}}{\partial(\partial_k X_i)} \partial_t(\partial_k X_i) = \sum_{k=1}^3 D_{ik}(t, \mathbf{x}) \partial_k(\partial_t X_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^3 D_{ik}(t, \mathbf{x}) \partial_k (v_i \circ \mathbf{X})(t, \mathbf{x}) \\
&= \sum_{k=1}^3 D_{ik}(t, \mathbf{x}) \sum_{j=1}^3 \partial_j v_i(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) \partial_k X_j(t, \mathbf{x}) \\
&= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \partial_k X_j(t, \mathbf{x}) D_{ik}(t, \mathbf{x}) \right) \partial_j v_i(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})).
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$B_{ij} := \sum_{k=1}^3 \partial_k X_j(t, \mathbf{x}) D_{ik}(t, \mathbf{x})$$

für den Term in den Klammern ($i, j = 1, 2, 3$), so gilt mit (3.2) für jedes $i = 1, 2, 3$:

$$B_{ii} = \det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}).$$

Im Falle $i \neq j$ folgt hieraus

$$\begin{aligned}
B_{ij} &= \sum_{k=1}^3 \partial_k X_j (-1)^{i+k} M_{ik} \\
&= (-1)^{i+1} \left(\partial_1 X_j M_{i1} - \partial_2 X_j M_{i2} + \partial_3 X_j M_{i3} \right).
\end{aligned}$$

Durch Entwicklung nach der i -ten Zeile ($i = 1, 2, 3$) erhalten wir die folgenden Darstellungen:

$$M_{i1} = \begin{cases} \partial_2 X_2 \partial_3 X_3 - \partial_3 X_2 \partial_2 X_3, & i = 1 \\ \partial_2 X_1 \partial_3 X_3 - \partial_3 X_1 \partial_2 X_3, & i = 2 \\ \partial_2 X_1 \partial_3 X_2 - \partial_3 X_1 \partial_2 X_2, & i = 3 \end{cases}$$

$$M_{i2} = \begin{cases} \partial_1 X_2 \partial_3 X_3 - \partial_3 X_2 \partial_1 X_3, & i = 1 \\ \partial_1 X_1 \partial_3 X_3 - \partial_3 X_1 \partial_1 X_3, & i = 2 \\ \partial_1 X_1 \partial_3 X_2 - \partial_3 X_1 \partial_1 X_2, & i = 3 \end{cases}$$

$$M_{i3} = \begin{cases} \partial_1 X_2 \partial_2 X_3 - \partial_2 X_2 \partial_1 X_3, & i = 1 \\ \partial_1 X_1 \partial_2 X_3 - \partial_2 X_1 \partial_1 X_3, & i = 2 \\ \partial_1 X_1 \partial_2 X_2 - \partial_2 X_1 \partial_1 X_2, & i = 3. \end{cases}$$

Hieraus folgt für jedes $j \neq i$ die Beziehung

$$\partial_1 X_j M_{i1} - \partial_2 X_j M_{i2} + \partial_3 X_j M_{i3} = 0.$$

Gilt beispielweise $i = 1$ und $j = 2$, so erhält man

$$\begin{aligned} \partial_1 X_2 M_{11} - \partial_2 X_2 M_{12} + \partial_3 X_2 M_{13} &= \partial_1 X_2 \left(\partial_2 X_2 \partial_3 X_3 - \partial_3 X_2 \partial_2 X_3 \right) \\ &\quad - \partial_2 X_2 \left(\partial_1 X_2 \partial_3 X_3 - \partial_3 X_2 \partial_1 X_3 \right) \\ &\quad + \partial_3 X_2 \left(\partial_1 X_2 \partial_2 X_3 - \partial_2 X_2 \partial_1 X_3 \right) = 0. \end{aligned}$$

Somit folgt für jedes $i, j = 1, 2, 3$

$$B_{ij} = \delta_{ij} \det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}).$$

Insgesamt erhalten wir damit die Liouvillesche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^3 B_{ij} \partial_j v_i(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) = \sum_{j=1}^3 \delta_{i,j} \det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \partial_j v_i(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) \\ &= \det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \sum_{j=1}^3 \partial_j v_j(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) \\ &= \det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) = 0 \end{aligned}$$

und damit die behauptete Unabhängigkeit der Funktionaldeterminante $\det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ von t :

$$\det \nabla \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) = \det \nabla \mathbf{X}(0, \mathbf{x}) = \det \nabla \mathbf{x} = 1.$$

□

Die Maßtreue der Abbildung $\mathbf{X}(t, \cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ impliziert für Funktionen $\mathbf{u} \in L^p(\Omega)$ mit $\|\cdot\|_{0,p}$ als $L^p(\Omega)$ -Norm die Gültigkeit von

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \cdot))\|_{0,p} = \|\mathbf{u}\|_{0,p}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (3.3)$$

Insbesondere folgt für $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(\Omega)$ die Beziehung

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{X}(t, \cdot), \mathbf{g} \circ \mathbf{X}(t, \cdot)) = (\mathbf{f}, \mathbf{g}).$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus der Transformationsformel:

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{X}(t, \cdot), \mathbf{g} \circ \mathbf{X}(t, \cdot)) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) \det \nabla \mathbf{X} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (\mathbf{f}, \mathbf{g}).
\end{aligned}$$

Fassen wir unsere Überlegungen zusammen:

Lemma 3.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $\mathbf{v} \in C_{*,\sigma}^{lip}(\bar{\Omega})$ ein divergenzfreies, Lipschitz-stetiges, auf $\partial\Omega$ verschwindendes Geschwindigkeitsfeld. Dann existieren die Bahnkurven*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0) \in \bar{\Omega}$$

als Lösung von

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}(t)), \\
\mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

und sind eindeutig bestimmt. Außerdem sind die Abbildungen $\mathbf{X}(t, \cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ maßtreu.

Ist also das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} einer stationären Strömung in Ω bekannt, so kann der Strömungsverlauf mit Hilfe der Bahnkurven $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ dargestellt werden. Dies entspricht der Lagrangeschen Darstellung einer stationären Strömung.

In der Regel ist jedoch das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} einer Strömung nicht bekannt und muss aus gewissen Bilanzgleichungen bestimmt werden. Im hier vorliegenden Fall handelt es sich dabei um die stationären nichtlinearen Gleichungen von Navier-Stokes: Gesucht ist ein Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}) := (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), v_3(\mathbf{x}))^T$$

und eine (skalare) Druckfunktion $\mathbf{x} \longmapsto p(\mathbf{x})$ als Lösung des folgenden Systems partieller nichtlinearer Differentialgleichungen von Navier-Stokes:

$$\begin{aligned}
-\nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \\
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\
\mathbf{v} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Dabei ist $\nu > 0$ eine gegebene Materialkonstante (kinematische Viskosität) und Δ der Laplace-Operator im \mathbb{R}^3 , der hier auf jede Komponente v_i ($i = 1, 2, 3$) des Spaltenvektors \mathbf{v} angewandt wird. Der Term

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &:= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} := (v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2 + v_3 \partial_3) \mathbf{v} \\ &= \left(v_1 \partial_1 v_k + v_2 \partial_2 v_k + v_3 \partial_3 v_k \right)_{k=1}^3 \end{aligned}$$

ist der so genannte nichtlineare Term, der die Behandlung der Gleichungen so schwierig macht, $\nabla p := (\partial_1 p(\mathbf{x}), \partial_2 p(\mathbf{x}), \partial_3 p(\mathbf{x}))^T$ ist der Druckgradient, und $\mathbf{f} := \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))^T$ ist die vorgegebene äußere Kraftdichte. Vom physikalischen Standpunkt aus bedeuten die ersten drei Gleichungen die Bilanz der Kräfte nach dem Newtonschen Gesetz, und die vierte Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \partial_j v_j(\mathbf{x}) = 0$$

drückt die Inkompressibilität der Flüssigkeit aus. Schließlich besagt die letzte Gleichung, dass die Flüssigkeit am Rand $\partial\Omega$ des Strömungsgebietes Ω haftet. Die Angabe des Geschwindigkeitsfeldes und einer Druckfunktion in jedem festen Punkt des Strömungsgebietes aus den hier vorliegenden Gleichungen bezeichnet man als Eulersche Darstellung einer stationären Strömung.

Es ist seit langem bekannt, dass die Gleichungen (3.5) in einem schwachen Sinn gelöst werden können. Der folgende Begriff der schwachen Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (3.5) geht auf Leray und Hopf zurück ([Lad65, Ladyzhenskaya], [Tem95, Temam], [Soh01, Sohr])

Definition 3.3 Sei $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Eine Vektorfunktion $\mathbf{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung der Gleichungen (3.5), falls

$$\nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi) - (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \varphi) \quad (3.6)$$

für alle $\varphi \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ gilt.

Hierzu gelten die folgenden Existenz-, Eindeutigkeits- und Regularitätsaussagen ([Tem01, Temam], [Soh01, Sohr, S.182]):

Satz 3.4 (Existenz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und sei $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ gegeben. Dann existiert mindestens eine schwache Lösung $\mathbf{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ der Navier-Stokes-Gleichungen (3.5).

Satz 3.5 (Eindeutigkeit) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit einem endlichen Durchmesser $d > 0$ und sei $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ gegeben. Gilt dann

$$\|\mathbf{f}\| < \frac{\nu^2}{K}$$

mit der Konstanten $K = \sqrt{3\sqrt{2}d^3}$, so existiert höchstens eine schwache Lösung $\mathbf{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ der Navier-Stokes Gleichungen (3.5).

Satz 3.6 (Regularität) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{m+2}$ ($m \in \mathbb{N}_0$), und sei $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$. Ist $\mathbf{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ eine schwache Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (3.5), so gilt

$$\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{m+2}(\Omega). \tag{3.7}$$

3.2 Darstellung instationärer Strömungen

In diesem Kapitel betrachten wir instationäre Strömungen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$, $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Zeitintervall und $\mathbf{v} : I \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Geschwindigkeitsfeld. Außerdem gelte $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0$ für alle $t \in I$ und $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.

Zu beliebigem $(s, \mathbf{x}_s) \in I \times \overline{\Omega}$ betrachten wir die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(s) &= \mathbf{x}_s.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Mit

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) =: \mathbf{X}(t, s, \mathbf{x}_s) =: \mathbf{X}_{t,s}(\mathbf{x}_s)$$

bezeichnen wir dann eine Lösung der Anfangswertaufgabe (3.8). Diese beschreibt die Bahnkurve eines Flüssigkeitspartikels, das sich zur Zeit $t = s \in I$ am Ort $\mathbf{x}_s \in \overline{\Omega}$ befindet.

Wir setzen voraus, dass das Vektorfeld $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ bezüglich der Variablen $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ einer Lipschitz-Bedingung genügt. Zusammen mit der Bedingung $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0$ für $(t, \mathbf{x}) \in I \times \partial\Omega$ folgt dann, dass die Lösung $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ von (3.8) für jedes $(s, \mathbf{x}_s) \in I \times \overline{\Omega}$ in ganz I existiert und dort eindeutig bestimmt ist [Wal00, Walter].

Aufgrund der Eindeutigkeit gilt für die Funktionen $\mathbf{X}_{t,s} : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$ die Verkettungsregel

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{t,s} \circ \mathbf{X}_{s,r} &= \mathbf{X}(t, s, \cdot) \circ \mathbf{X}(s, r, \cdot) = \mathbf{X}(t, s, \mathbf{X}(s, r, \cdot)) \\ &= \mathbf{X}(t, r, \cdot) = \mathbf{X}_{t,r}\end{aligned}$$

für alle $t, s, r \in I$. Insbesondere ergibt sich für die inverse Abbildung $\mathbf{X}_{t,s}^{-1}$ die Darstellung

$$\mathbf{X}_{t,s}^{-1} = \mathbf{X}_{s,t}.$$

Genau wie im stationären Fall liefert dann die Liouvillesche Differentialgleichung

$$\partial_t \det \nabla \mathbf{X}(t, s, \mathbf{x}) = \det \nabla \mathbf{X}(t, s, \mathbf{x})(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{X}(t, s, \mathbf{x})))$$

die Maßtreue der Abbildungen $\mathbf{X}(t, s, \cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ für zusätzlich divergenzfreie Felder $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$:

$$\det \nabla \mathbf{X}(t, s, \mathbf{x}) = \det \nabla \mathbf{X}(s, s, \mathbf{x}) = \det \nabla \mathbf{x} = 1.$$

Die Maßtreue der Abbildung $\mathbf{X}_{t,s} : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ impliziert auch hier für Funktionen $\mathbf{u}(t, \cdot) \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ die Gültigkeit von

$$\|\mathbf{u}(t, \mathbf{X}(s, r, \cdot))\|_{0,p} = \|\mathbf{u}(t, \cdot)\|_{0,p}, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (3.9)$$

für jedes $t, s, r \in I$. Für $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ folgt die Beziehung

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{X}(s, r, \cdot), \mathbf{g} \circ \mathbf{X}(s, r, \cdot)) = (\mathbf{f}, \mathbf{g}).$$

Somit erhalten wir in Analogie zum stationären Fall: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega \in C^1$ und $\mathbf{v} : I \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein am Rande $\partial\Omega$ verschwindendes, divergenzfreies, Lipschitz-stetiges Geschwindigkeitsfeld, so existieren die Bahnkurven

$$I \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t, s, \mathbf{x}_s) \in \bar{\Omega}$$

für jedes $s \in I$, $\mathbf{x}_s \in \bar{\Omega}$ als Lösung von

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t)),$$

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_s$$

und sind eindeutig bestimmt. Außerdem sind die Abbildungen $\mathbf{X}_{t,s} : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ für $t, s \in I$ maßtreu. Ist also das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} einer instationären Strömung in Ω bekannt, so kann der Strömungsverlauf mit Hilfe der Bahnkurven $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ dargestellt werden. Dies entspricht der Lagrangeschen Darstellung einer instationären Strömung.

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes $(t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ einer in $\Omega_T := (0, T) \times \Omega$ instationären Strömung verwenden wir die folgenden instationären nichtlinearen Gleichungen von Navier-Stokes:

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_T, \\
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } \Omega_T, \\
\mathbf{v}|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \text{in } (0, T), \\
\mathbf{v}|_{t=0} &= \mathbf{v}_0 \quad \text{in } \Omega.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Diese Gleichungen beschreiben das Verhalten einer zähen, inkompressiblen, instationären, dreidimensionalen Strömung und bilden ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen für vier unbekannte Funktionen, nämlich für die drei Komponenten $v_1(t, \mathbf{x}), v_2(t, \mathbf{x}), v_3(t, \mathbf{x})$ der Geschwindigkeit \mathbf{v} und für den Druck p . Im Unterschied zum stationären Fall (3.5) hängen hier alle Funktionen zusätzlich von der Zeit $t \in (0, T)$ ab, und es ist noch eine Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 zur Zeit $t = 0$ vorgegeben.

Wie im stationären Fall benötigen wir den Begriff der schwachen Lösung der Gleichungen von Navier-Stokes im Sinne von Leray-Hopf (vgl. [Hop51, Hopf], [Lad65, Ladyzhenskaya], [Hey80, Heywood]).

Definition 3.7 (schwache Lösung) Sei $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Seien $\mathbf{f} \in L^2(0, T, \mathcal{H}^0(\Omega))$ und $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ vorgegeben. Eine Funktion

$$\mathbf{v} \in L^2(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, \mathcal{H}^0(\Omega)) \tag{3.11}$$

heißt schwache Lösung Gleichungen von Navier-Stokes (3.10), falls Folgendes gilt:

1.

$$\mathbf{v} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}^0(\Omega) \text{ ist schwach stetig.} \tag{3.12}$$

2.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0\| = 0. \tag{3.13}$$

3. Für jede Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty((0, T), \mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega))$ gilt

$$\int_0^T \left(-(\mathbf{v}, \partial_t \varphi) + \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi) - (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi, \mathbf{v}) \right) dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \varphi) dt. \tag{3.14}$$

Hierzu gelten die folgenden Existenz-, Eindeutigkeits- und Regularitätsaussagen (vgl. [Tem01, Temam], [Soh01, Sohr]):

Satz 3.8 (Existenz) Sei $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Seien

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$$

und

$$\mathbf{v}_0 \in \mathcal{H}^0(\Omega)$$

vorgegeben. Dann existiert mindestens eine schwache Lösung

$$\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}^0(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathcal{H}^1(\Omega)) \quad (3.15)$$

der Navier-Stokes-Gleichungen (3.10) im Sinne von Definition (3.7).

Die Eindeutigkeit schwacher Lösungen der Gleichungen von Navier-Stokes in drei Raumdimensionen ist ein noch offenes Problem. Stellt man jedoch eine gewisse Zusatzbedingung, die so genannte Serrin-Bedingung (siehe [Soh01, Sohr, S.276]), so ist auch die Eindeutigkeit gesichert:

Satz 3.9 (Eindeutigkeit) Sei $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Seien \mathbf{v} und $\tilde{\mathbf{v}}$ schwache Lösungen der Gleichungen von Navier-Stokes im Sinne von Definition (3.7) mit $\mathbf{v}(0) = \tilde{\mathbf{v}}(0)$. Gilt dann die Bedingung

$$\mathbf{v} \in L^s(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega)), \quad 2 < s < \infty, \quad 3 < q < \infty, \quad \frac{2}{s} + \frac{3}{q} = 1, \quad (3.16)$$

so ist $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}$ in $[0, T) \times \Omega$.

Die fundamentale Bedeutung der Serrin-Bedingung (3.16) führt uns zum Begriff einer starken Lösung der Gleichungen von Navier-Stokes im Sinne von Serrin:

Definition 3.10 Sei $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Sei

$$\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}^0(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathcal{H}^1(\Omega))$$

eine schwache Lösung der Gleichungen von Navier-Stokes zu gegebenen Daten $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ und $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ im Sinne von Definition (3.7). Gilt dann die Bedingung (3.16), so heißt \mathbf{v} starke Lösung der Gleichungen von Navier-Stokes.

Wie bereits oben erwähnt, lässt sich die Regularitätseigenschaft (3.16) für schwache Lösungen der Gleichungen von Navier-Stokes in drei Raumdimensionen bisher nicht nachweisen. Unter zusätzlichen Regularitätsannahmen an die Daten lassen

sich jedoch zeitlich lokale starke Lösungen konstruieren. Das erste Resultat in dieser Richtung stammt von Kiselev und Ladyzhenskaya [KL57, Kiselev, Ladyzhenskaya] (siehe auch [Tem01, Temam, S.316-317]):

Satz 3.11 (Lokale Existenz/Eindeutigkeit starker Lösungen) *Sei $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^2$. Seien*

$$\mathbf{f}, \partial_t \mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathcal{H}^0(\Omega))$$

und

$$\mathbf{v}_0 \in \mathcal{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$$

vorgegeben. Dann gibt es eine Zahl $T_* = T_*(\mathbf{v}_0, \mathbf{f}, \nu, \partial\Omega)$, $0 < T_* \leq T$, so dass eine eindeutig bestimmte starke Lösung \mathbf{v} der Navier-Stokes-Gleichungen (3.10) im Sinne von Definition 3.10 mit T ersetzt durch T_* existiert. Diese Lösung \mathbf{v} besitzt die folgenden Eigenschaften:

1.

$$\mathbf{v} \in C([0, T_*), \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega)) \quad (3.17)$$

mit

$$\mathbf{v}_t \in C([0, T_*), \mathcal{H}^0(\Omega)) \cap L^2(0, T_*; \mathcal{H}^1(\Omega)). \quad (3.18)$$

2. Für alle $t \in [0, T_*)$ gilt die Energiegleichung

$$\|\mathbf{v}(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}(\tau)\|^2 d\tau = \|\mathbf{v}_0\|^2 + 2 \int_0^t (\mathbf{f}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) d\tau. \quad (3.19)$$

4 Regularisierung

Die Existenz zeitlich globaler Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen für drei Raumdimensionen ist bis heute nicht bewiesen. Besondere Schwierigkeiten bereitet hier der nichtlineare konvektive Term $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$. In der Literatur gibt es einige Regularisierungsverfahren, bei denen die Navier-Stokes-Gleichungen durch Gleichungen approximiert werden können, die für alle $t \in [0, T]$ eindeutig lösbar sind. In diesem Kapitel bieten wir ein Regularisierungsverfahren an, in dem die nichtlinearen instationären Navier-Stokes-Gleichungen durch eine Schar von Gleichungen ersetzt werden, die von einem Parameter $\varepsilon > 0$ abhängen und eine Zeitverschiebung im nichtlinearen Term bewirken. Der hieraus resultierende regularisierte konvektive Term $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}$ wird dann mit Lagrangeschen Differenzen approximiert, die so gewählt werden können, dass die Energiegleichung nicht verletzt wird.

4.1 Zeitverschiebung

Sei $T > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Für ein festes $\varepsilon := \frac{T}{N}$ fixieren wir auf $[0, T]$ ein äquidistantes Gitter $t_k = k\varepsilon$, $k = 0, 1, \dots, N$. Für den konvektiven nichtlinearen Term

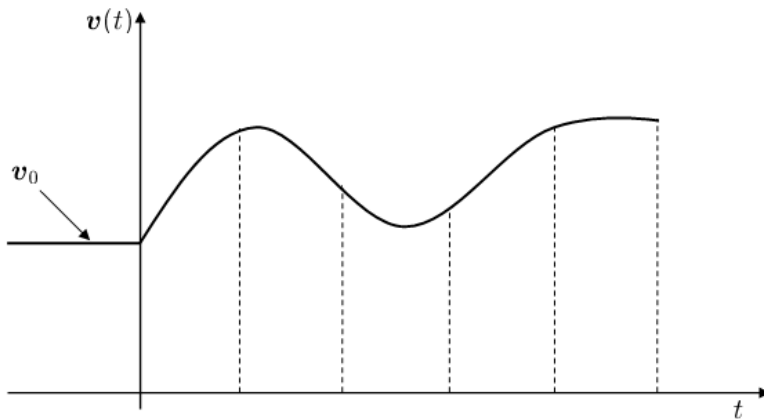


Abbildung 2: Initialisierung

$\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{v}(t)$ verwenden wir eine Zeitverschiebung um ε und setzen approximativ

$$\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{v}(t) \approx \mathbf{v}(t - \varepsilon) \cdot \nabla \mathbf{v}(t).$$

Zur Initialisierung dieser Zeitverschiebung setzen wir voraus, dass der Anfangswert \mathbf{v}_0 für alle $t \leq 0$ zeitlich konstant fortgesetzt ist (siehe Abbildung 2), d.h.

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad t \leq 0.$$

Dies ist aufgrund der Zeitverschiebung notwendig, da sonst für $t \in [0, \varepsilon)$ die Funktion $\mathbf{v}(t - \varepsilon)$ nicht definiert ist.

Zur weiteren Vereinfachung approximieren wir für $t \in [t_k, t_{k+1})$ den verschobenen konvektiven Term $\mathbf{v}(t - \varepsilon) \cdot \nabla \mathbf{v}(t)$ durch $\mathbf{v}(t_{k-1}) \cdot \nabla \mathbf{v}(t)$. Da die hieraus resultierenden Sprünge des konvektiven Termes in den Gitterpunkten t_k zu einem Regularitätsverlust für die Lösung führen, verwenden wir zusätzlich eine lineare Interpolation und approximieren $\mathbf{v}(t_{k-1}) \cdot \nabla \mathbf{v}(t)$ für $t \in [t_k, t_{k+1}]$ durch

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t_k) \cdot \nabla \mathbf{v}(t) &\approx \left(\frac{t_{k+1} - t}{\varepsilon} \mathbf{v}(t_{k-1}) + \frac{t - t_k}{\varepsilon} \mathbf{v}(t_k) \right) \cdot \nabla \mathbf{v}(t) \\ &= \frac{t_{k+1} - t}{\varepsilon} \mathbf{v}(t_{k-1}) \cdot \nabla \mathbf{v}(t) + \frac{t - t_k}{\varepsilon} \mathbf{v}(t_k) \cdot \nabla \mathbf{v}(t) \\ &=: s_\varepsilon \mathbf{v}(t). \end{aligned} \tag{4.1}$$

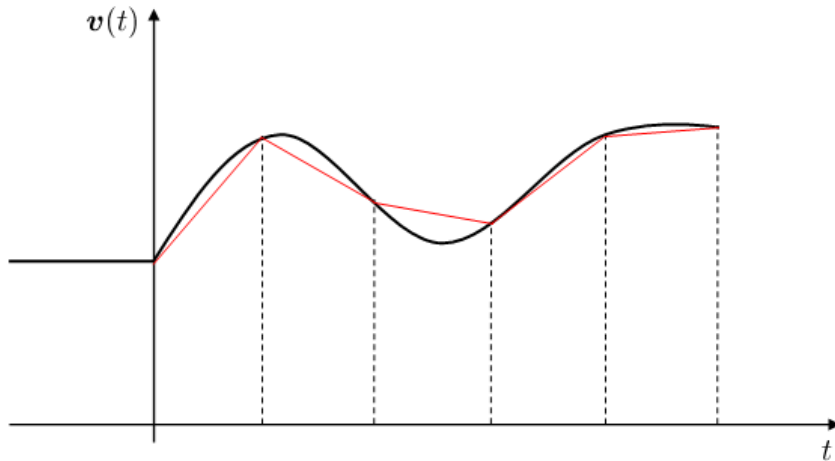


Abbildung 3: Die Funktion $t \mapsto s_\varepsilon \mathbf{v}(t)$

4.2 Lagrangesche Differenzen

Da der nichtlineare konvektive Term $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ aus einer totalen (substantiellen) Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{v} entsteht, bieten sich totale (Lagrangesche) Differenzenquotienten für ein Approximationsverfahren an. Wir erläutern dieses Verfahren allgemein für einen konvektiven Term der Form $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}$ im stationären Fall:

Definition 4.1 Sei $\mathbf{u} \in C_{*,\sigma}^{lip}(\bar{\Omega})$ gegeben. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ sind dann die Abbildungen $\mathbf{X}(\varepsilon, \cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ über die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0,\end{aligned}$$

und ihre Inverse $\mathbf{X}(-\varepsilon, \cdot)$ wohldefiniert. Ist nun \mathbf{v} eine in $\bar{\Omega}$ gegebene Funktion, so definieren wir für $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned}L_\varepsilon^+ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{\varepsilon} \{ \mathbf{v} \circ \mathbf{X}(\varepsilon, \mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \}, \\ L_\varepsilon^- \mathbf{v}(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{\varepsilon} \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v} \circ \mathbf{X}(-\varepsilon, \mathbf{x}) \}, \\ L_\varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2\varepsilon} \{ \mathbf{v} \circ \mathbf{X}(\varepsilon, \mathbf{x}) - \mathbf{v} \circ \mathbf{X}(-\varepsilon, \mathbf{x}) \}.\end{aligned}$$

Dabei heißen $L_\varepsilon^+ \mathbf{v}(\mathbf{x})$ und $L_\varepsilon^- \mathbf{v}(\mathbf{x})$ vorwärtsgenommene beziehungsweise rückwärtsgenommene totale Differenzenquotienten. Die durch Addition dieser einseitigen Differenzenquotienten entstehenden Vektoren $L_\varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x})$ heißen zentrale totale Differenzenquotienten.

Gilt darüber hinaus $\mathbf{v} \in C^1(\bar{\Omega})$, so erhält man für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Konvergenz der obigen Differenzenquotienten gegen den konvektiven Term $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}L_\varepsilon^+ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\mathbf{v}(\mathbf{X}(\varepsilon, \mathbf{x})) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\mathbf{v}(\mathbf{X}(\varepsilon, \mathbf{x})) - \mathbf{v}(\mathbf{X}(0, \mathbf{x})) \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \partial_t \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) \circ \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) dt \\
&\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) \circ \mathbf{X}(0, \mathbf{x}) \\
&= \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Analog finden wir

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon^- \mathbf{v}(\mathbf{x}) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}), \\
L_\varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Demzufolge können alle drei Differenzenquotienten bei der Approximation des konvektiven Terms $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}$ benutzt werden. Wir bevorzugen aber den zentralen Differenzenquotienten und approximieren die Terme $\mathbf{v}(t_{k-1}) \cdot \nabla \mathbf{v}(t)$ beziehungsweise $\mathbf{v}(t_k) \cdot \nabla \mathbf{v}(t)$ durch

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \approx \frac{1}{2\varepsilon} \{ \mathbf{v} \circ \mathbf{X}(\varepsilon, \cdot) - \mathbf{v} \circ \mathbf{X}(-\varepsilon, \cdot) \}.$$

Dabei resultiert $\mathbf{X}(\cdot, \cdot)$ aus der Lösung der AWA

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}(t)), \\
\mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0
\end{aligned}$$

mit $\mathbf{u} = \mathbf{v}(t_{k-1})$ beziehungsweise $\mathbf{u} = \mathbf{v}(t_k)$. Insgesamt wird also der nichtlineare konvektive Term $\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{v}(t)$ für $t \in [t_k, t_{k+1}]$ wie folgt approximiert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{v}(t) &\approx \frac{t_{k+1} - t}{\varepsilon} \mathbf{v}(t_{k-1}) \cdot \nabla \mathbf{v}(t) + \frac{t - t_k}{\varepsilon} \mathbf{v}(t_k) \cdot \nabla \mathbf{v}(t) \\
&\approx \frac{t_{k+1} - t}{\varepsilon} L_\varepsilon^{k-1} \mathbf{v}(t) + \frac{t - t_k}{\varepsilon} L_\varepsilon^k \mathbf{v}(t).
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet für jedes $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon^k \mathbf{v}(t) &:= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\mathbf{v}(t, \mathbf{X}_k(\varepsilon, \cdot)) - \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_k(-\varepsilon, \cdot)) \right), \\
L_\varepsilon^{k-1} \mathbf{v}(t) &:= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\mathbf{v}(t, \mathbf{X}_{k-1}(\varepsilon, \cdot)) - \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_{k-1}(-\varepsilon, \cdot)) \right)
\end{aligned}$$

mit $\mathbf{X}_k := \mathbf{X}_k(t, \cdot)$ aus der Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{v}_k(\mathbf{x}(t)) := \mathbf{v}(t_k, \mathbf{x}(t)), \\
\mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

4.3 Die regularisierten Gleichungen

Jetzt können wir die folgende regularisierte Aufgabe formulieren: Gesucht sind ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = (v_1(t, \mathbf{x}), v_2(t, \mathbf{x}), v_3(t, \mathbf{x}))$ und eine Druckfunktion $p = p(t, \mathbf{x})$ als Lösung der folgenden regularisierten Navier-Stokes-Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= -Z_\varepsilon \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_T, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } \Omega_T, \\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \text{in } (0, T), \\ \mathbf{v}|_{t \leq 0} &= \mathbf{v}_0 \quad \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dabei setzen wir für $(t, \mathbf{x}) \in [t_k, t_{k+1}] \times \bar{\Omega}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &:= Z_\varepsilon^k \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \\ &:= \frac{t - t_k}{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \{ \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_k(\varepsilon, \mathbf{x})) - \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_k^{-1}(\varepsilon, \mathbf{x})) \} \\ &\quad + \frac{t_{k+1} - t}{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \{ \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_{k-1}(\varepsilon, \mathbf{x})) - \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_{k-1}^{-1}(\varepsilon, \mathbf{x})) \} \end{aligned} \tag{4.4}$$

mit $\mathbf{X}_k(\varepsilon, \mathbf{x})$ aus der Lösung von (4.2).

Zur Bestimmung von $Z_\varepsilon \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ für $t \in [0, \varepsilon]$ benötigen wir folglich die Abbildungen $\mathbf{X}_0(\varepsilon, \cdot)$ und $\mathbf{X}_{-1}(\varepsilon, \cdot)$ samt ihrer Inversen. Da wir für alle $t \leq 0$ den Anfangswert \mathbf{v}_0 zeitlich konstant fortgesetzt haben, erhalten wir diese Abbildungen aus der Lösung der Anfangswertaufgabe (4.2) für $k = 0$ und $k = -1$, wobei hier in beiden Fällen die Geschwindigkeitsfelder übereinstimmen:

$$\mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(-\varepsilon, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}).$$

D.h., in der Approximation

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &= \frac{t}{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \{ \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_0(\varepsilon, \mathbf{x})) - \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{x})) \} \\ &\quad + \frac{\varepsilon - t}{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \{ \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_{-1}(\varepsilon, \mathbf{x})) - \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_{-1}^{-1}(\varepsilon, \mathbf{x})) \} \end{aligned}$$

sind \mathbf{X}_0 und \mathbf{X}_{-1} identisch als Lösungen der Anfangswertaufgabe

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}(t)),$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Deswegen gilt für die Funktion $Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ mit $t \in [0, \varepsilon]$ die Darstellung

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &:= \frac{t}{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \{ \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_0(\varepsilon, \mathbf{x})) - \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{x})) \} \\ &+ \frac{\varepsilon - t}{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \{ \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_0(\varepsilon, \mathbf{x})) - \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{x})) \} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\mathbf{v}(t, \mathbf{X}_0(\varepsilon, \mathbf{x})) - \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{x})) \right). \end{aligned}$$

Mit (4.3) und (4.4) liegt somit ein approximatives Navier-Stokes-System vor, dessen Lösbarkeit wir im nächsten Abschnitt untersuchen werden. Dies geschieht durch Lösung des Problems zunächst auf den einzelnen Teilintervallen, zusammen mit dem Nachweis, dass sich die Regularität der Daten auf dem vorigen Teilintervall auf die Lösung im nächsten Teilintervall überträgt und somit der Lösungsprozess fortgesetzt werden kann.

5 Konstruktion der Lösung auf $[0, \varepsilon]$

In diesem Kapitel betrachten wir die im letzten Abschnitt hergeleiteten regularisierten Gleichungen von Navier-Stokes eingeschränkt auf $t \in [0, \varepsilon]$:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= -Z_\varepsilon^0 \mathbf{v} + \mathbf{f}, & (t, \mathbf{x}) \in (0, \varepsilon] \times \Omega, \\
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, & (t, \mathbf{x}) \in (0, \varepsilon] \times \Omega, \\
 \mathbf{v}|_{\partial\Omega} &= 0, & t \in (0, \varepsilon], \\
 \mathbf{v}|_{t \leq 0} &= \mathbf{v}_0, & \mathbf{x} \in \Omega.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Wir werden im Folgenden Existenz und Eindeutigkeit einer stark H^2 -stetigen Lösung \mathbf{v} für $t \in [0, \varepsilon]$ nachweisen, sofern die Daten \mathbf{v}_0 , \mathbf{f} hinreichend glatt sind. Der Beweis wird mit Hilfe eines Galerkinansatzes geführt und orientiert sich an der Arbeit von Heywood [Hey80, Heywood].

5.1 Helmholtz - Projektion und Stokes - Operator

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $\mathbf{L}^2(\Omega)$ der Raum der quadratintegrierbaren Vektorfunktionen $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Bekanntlich (vgl. [Shi73, Shinbrot, S.140], [Tem01, Temam, S.15]) kann dieser Raum als direkte Summe der Unterräume

$$\mathcal{H}^0(\Omega) := \overline{\mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2}}$$

und

$$\mathbf{G}(\Omega) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \exists \varphi \in L^2(\Omega) \text{ mit } \mathbf{u} = \nabla \varphi \right\}$$

dargestellt werden. Der Projektionsoperator $P : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^0(\Omega)$ heißt Helmholtz-Operator, und aus seiner Definition folgt

$$P\mathbf{f} = \mathbf{f} \text{ für alle } \mathbf{f} \in \mathcal{H}^0(\Omega), \quad P\mathbf{g} = 0 \text{ für alle } \mathbf{g} \in \mathbf{G}(\Omega).$$

Formales Anwenden des Operators P auf die erste Gleichung in (5.1) liefert wegen

$$P\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t) \text{ für } \mathbf{v}(t) \in \mathcal{H}^0(\Omega), \quad P\partial_t \mathbf{v}(t) = \partial_t P\mathbf{v}(t)$$

und

$$P\nabla p(t) = 0$$

die Evolutionsgleichungen

$$\partial_t \mathbf{v} - \nu P \Delta \mathbf{v} = -P Z_\varepsilon^0 \mathbf{v} + P \mathbf{f} \text{ in } (0, \varepsilon] \times \Omega.$$

Der hier auftretende Operator $-P \Delta : \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^0(\Omega)$ heißt Stokes-Operator. Er ist symmetrisch, positiv definit und besitzt eine kompakte Inverse (vgl. [Var07, Varnhorn, S. 134])

$$(-P \Delta)^{-1} : \mathcal{H}^0(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^0(\Omega).$$

Folglich existiert eine Folge $(\lambda_i)_i$ positiver Eigenwerte mit $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, die sich im Endlichen nirgends häuft, und die zugehörige Folge $(\mathbf{e}_i)_i$ von Eigenfunktionen $\mathbf{e}_i \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ bildet in $\mathcal{H}^0(\Omega)$ ein vollständiges Orthonormalsystem:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j \in \mathbb{N}).$$

Somit gilt also die im Folgenden noch häufig benutzte fundamentale Beziehung

$$-P \Delta \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \text{ in } \Omega. \quad (5.2)$$

5.2 Galerkinansatz

Die Existenz einer Lösung von (5.1) beweisen wir mit Hilfe eines Galerkinansatzes, wobei wir als Basisfunktionen das oben erwähnte in $\mathcal{H}^0(\Omega)$ vollständige System von Eigenfunktionen des Stokes-Operators $-P \Delta$ wählen:

Definition 5.1 Mit $\mathbf{v}^n : [0, \varepsilon] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\mathbf{v}^n(t, \mathbf{x}) := \sum_{j=1}^n c_{jn}(t) \mathbf{e}_j(\mathbf{x}) \quad (5.3)$$

bezeichnen wir n -te Galerkinnäherung. Dabei sind $\mathbf{e}_j \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ die Eigenfunktionen des Stokes-Operator $-P \Delta$ und $c_{jn} : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, n$) noch zu bestimmende Koeffizienten.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ fest. Zur Bestimmung der Koeffizienten c_{jn} ($j = 1, \dots, n$) setzen wir die Näherungsfunktionen \mathbf{v}^n in (5.1) ein und multiplizieren skalar mit den Funktionen \mathbf{e}_i ($i = 1, \dots, n$):

$$(\partial_t \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) + \nu (-P \Delta \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) = -(P Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) + (\mathbf{f}(t), \mathbf{e}_i), \quad (5.4)$$

$$\mathbf{v}^n(t)|_{t \leq 0} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{v}_0, \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j. \quad (5.5)$$

Die Gleichung (5.4) besagt

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n c'_{jn}(t) (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) + \nu \sum_{j=1}^n c_{jn}(t) (-P\Delta \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) \\ &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{e}_i) - \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{j=1}^n c_{jn}(t) (\mathbf{e}_j \circ \mathbf{X}_0 - \mathbf{e}_j \circ \mathbf{X}_0^{-1}, \mathbf{e}_i). \end{aligned}$$

Mit der Eigenwerteigenschaft (5.2) und der Orthonormalität $(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = \delta_{ij}$ resultiert hieraus für $i = 1, 2, \dots, n$ ($n \in \mathbb{N}$) und $t > 0$ eine Anfangswertaufgabe zur Bestimmung des i -ten Koeffizienten c_{in} :

$$\begin{aligned} c'_{in}(t) + \nu \lambda_i c_{in}(t) &= (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i) + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{j=1}^n c_{jn}(t) (\mathbf{e}_j \circ \mathbf{X}_0^{-1} - \mathbf{e}_j \circ \mathbf{X}_0, \mathbf{e}_i), \\ c_{in}(0) &= (\mathbf{v}_0, \mathbf{e}_i). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dies ist ein Gleichungssystem von der Form

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} c'_{1n}(t) \\ c'_{2n}(t) \\ \dots \\ c'_{nn}(t) \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{1n}(t) \\ \lambda_2 c_{2n}(t) \\ \dots \\ \lambda_n c_{nn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{f}(t), \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{f}(t), \mathbf{e}_2) \\ \dots \\ (\mathbf{f}(t), \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{e}_j \circ \mathbf{X}_0^{-1} - \mathbf{e}_j \circ \mathbf{X}_0, \mathbf{e}_i)_{i,j=1}^n \begin{pmatrix} c_{1n}(t) \\ c_{2n}(t) \\ \dots \\ c_{nn}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit den Vektoren

$$\mathbf{c}_n(t) := \begin{pmatrix} c_{1n}(t) \\ c_{2n}(t) \\ \dots \\ c_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_n(t) := \begin{pmatrix} (\mathbf{f}(t), \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{f}(t), \mathbf{e}_2) \\ \dots \\ (\mathbf{f}(t), \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$

und den $n \times n$ -Matrizen

$$D_n := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad \tilde{A}_n := \frac{1}{2\varepsilon} \left(\mathbf{e}_j \circ \mathbf{X}_0^{-1} - \mathbf{e}_j \circ \mathbf{X}_0, \mathbf{e}_i \right)_{i,j=1}^n,$$

$$A_n := \tilde{A}_n - \nu D_n =$$

$$= \begin{pmatrix} -\nu\lambda_1 & \dots & (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{e}_n \circ \mathbf{X}, \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{X}, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{e}_n \circ \mathbf{X}, \mathbf{e}_2) \\ & \dots & \\ (\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{X}, \mathbf{e}_n) & \dots & -\nu\lambda_n \end{pmatrix}$$

kann dann die Differentialgleichung in (5.6) in der folgenden Vektorform dargestellt werden:

$$\mathbf{c}'_n(t) = A_n \mathbf{c}_n(t) + \mathbf{b}_n(t). \quad (5.7)$$

Dies ist ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Mit dem Satz von Picard-Lindelöf folgen Existenz und Eindeutigkeit einer globalen Lösung $\mathbf{c}_n \in \mathbf{C}^\infty([0, \varepsilon])$. Somit ist die n -te Galerkinnäherung \mathbf{v}^n zur gesuchten Lösung \mathbf{v} der Gleichungen von Navier-Stokes für jedes n mit Hilfe der Eigenfunktionen des Stokes-Operators und der Lösung der Anfangswertaufgabe (5.6) in eindeutiger Weise festgelegt.

5.3 Beispiel zum Galerkinansatz

Wir betrachten die eindimensionale Burgersgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0. \quad (5.8)$$

Zusätzlich fordern wir die Randbedingung

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad (5.9)$$

und die Anfangsbedingung

$$u(0, x) = \sin(2\pi x). \quad (5.10)$$

Mit der Hopf-Cole Transformation [Eva98, Evans, S. 195] lässt sich die Burgersgleichung linearisieren und auf die Wärmeleitungsgleichung reduzieren: Zuerst setzt man

$$u = \psi_x$$

in die Burgersgleichung ein und erhält durch Integration bezüglich x

$$\psi_t + \frac{1}{2}\psi_x^2 = \nu\psi_{xx}.$$

Mit der Substitution

$$\psi = -2\nu \ln |\vartheta| \quad \text{bzw.} \quad \vartheta = e^{-\frac{\psi}{2\nu}}$$

folgt hieraus die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\vartheta_t = \nu\vartheta_{xx}.$$

Die gegebenen Anfangs- und Randbedingungen werden auf die folgende Gestalt transformiert:

$$\vartheta(t, 0) = \vartheta(t, 1) = 1,$$

$$\vartheta(0, x) = e^{-\frac{\sin^2(\pi x)}{2\nu}}.$$

Durch die Transformation $\phi = \vartheta - 1$ erhalten wir zusätzlich homogene Randbedingungen, das heißt

$$\phi_t(t, x) = \nu\phi_{xx}(t, x), \tag{5.11}$$

$$\phi(t, 0) = \phi(t, 1) = 0,$$

$$\phi(0, x) = \phi_0(x) = e^{-\frac{\sin^2(\pi x)}{2\nu}} - 1. \tag{5.12}$$

Auf die nun vorliegende Anfangsrandwertaufgabe wenden wir das Galerkinverfahren an. Analog zu den regularisierten Gleichungen von Navier-Stokes wählen wir als Basisfunktionen für die Galerkinnäherung die Eigenfunktionen des entsprechenden Differentialoperators mit homogenen Randbedingungen:

$$\varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0 \quad \text{in } (0, 1),$$

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Wir erhalten als Lösungen

$$\varphi(x) = c \sin(n\pi x), \quad \lambda = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

mit einer Konstanten c , die so gewählt wird, dass die Folge $(\varphi_i)_i$ von Funktionen $\varphi_i(x) = \sin(i\pi x)$ ein Orthonormalsystem bildet, das heißt $c = \sqrt{2}$.

Damit sind die Galerkinapproximationen gegeben durch

$$\phi^N(t, x) = \sum_{j=1}^N a_j(t) \varphi_j(x) \quad (5.13)$$

mit $\varphi_j(x) = \sin(j\pi x)$ und noch zu bestimmenden Koeffizienten a_j , $j = 1, 2, \dots$

Zur Bestimmung der Koeffizienten a_j setzen wir den Galerkinansatz in die Differentialgleichung (5.11) ein, multiplizieren mit φ_i und erhalten dann

$$\begin{aligned} (\partial_t \phi^N, \varphi_i) &= \nu (\partial_{xx} \phi^N, \varphi_i) \\ \phi^N(0, x) &= \sum_{i=1}^N (\phi_0, \varphi_i) \varphi_i(x). \end{aligned}$$

Diese Gleichung impliziert

$$\sum_j a_j'(\varphi_j, \varphi_i) - \nu \sum_j a_j(\varphi_j'', \varphi_i) = 0.$$

Mit der Orthonormalität der Funktionen φ_i folgt

$$(\varphi_j'', \varphi_i) = (-\lambda \varphi_j, \varphi_i) = -\lambda (\varphi_j, \varphi_i) = -\lambda \delta_{ij},$$

und man erhält hieraus eine gewöhnliche Differentialgleichung zur Berechnung der Koeffizienten a_i :

$$a_i'(t) + \nu \lambda_i a_i(t) = 0, \quad (5.14)$$

$$a_i(0) = (\phi_0, \varphi_i), \quad (5.15)$$

mit

$$\phi_0(x) = e^{-\frac{\sin^2(\pi x)}{2\pi\nu}} - 1 \text{ und } \lambda_i = (i\pi)^2.$$

Im Fall $\nu = 1$ erhalten wir wegen $\varphi_j(x) := \sqrt{2} \sin(j\pi x)$ beispielsweise

$$\begin{aligned} a_1(0) &= (\phi_0, \varphi_1) = \sqrt{2} \int_0^1 (e^{-\frac{\sin^2(\pi x)}{2\pi}} - 1) \sin(\pi x) dx \\ &= 2e^{-\frac{1}{2\pi}} \operatorname{erfi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx -0.09 =: c_1, \end{aligned}$$

$$a_2(0) = (\phi_0, \varphi_2) = \sqrt{2} \int_0^1 (e^{-\frac{\sin^2(\pi x)}{2\pi}} - 1) \sin(2\pi x) dx = 0 =: c_2,$$

$$a_3(0) = (\phi_0, \varphi_3) = \sqrt{2} \int_0^1 (e^{-\frac{\sin^2(\pi x)}{2\pi}} - 1) \sin(3\pi x) dx$$

$$= \frac{2\sqrt{2}(12\pi - 1)}{3\pi} - 2e^{-\frac{1}{2\pi}}(1 + 4\pi)\operatorname{erfi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \approx 0.017 =: c_3.$$

Dabei ist die Fehlerfunktion erfi definiert durch

$$\operatorname{erfi}(z) := \frac{\operatorname{erf}(iz)}{i} := \frac{2}{i\sqrt{\pi}} \int_0^{iz} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Mit den Lösungen

$$a_i(t) = e^{-\lambda_i t} c_i.$$

der Anfangswertaufgabe (5.14), (5.15) erhalten wir hieraus beispielsweise für $N = 3$ die Galerkinapproximation

$$\begin{aligned} \phi^3(t, x) &= a_1(t)\varphi_1(x) + a_2(t)\varphi_2(x) + a_3(t)\varphi_3(x) \\ &= \sqrt{2}c_1 e^{-\pi t} \sin(\pi x) + \sqrt{2}c_3 e^{-9\pi^2 t} \sin(3\pi x). \end{aligned}$$

5.4 Abschätzungen der Galerkinapproximationen

Bevor die Abschätzungen für die Galerkinnäherung bewiesen werden, erklären wir, warum bei der Approximation des konvektiven Termes $\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{v}(t)$ der zentrale Differenzenquotient ausgewählt wurde. Aus dem folgenden Lemma geht hervor, dass die Vektorfunktion $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}$ auf der Vektorfunktion \mathbf{v} bezüglich des Skalarproduktes in $\mathbf{L}^2(\Omega)$ senkrecht steht. Diese Eigenschaft ist fundamental für den Beweis der Existenz schwacher Lösungen ([Hop51, Hopf], [Hey80, Heywood]).

Lemma 5.2 (Orthogonalitätsrelation) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^1$. Sei $\mathbf{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ und $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Dann gilt*

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u}),$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0.$$

Beweis: Zunächst zeigen wir diese Aussagen für $\mathbf{v} \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ und $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in C_0^\infty(\Omega)$. Wegen $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ gilt

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$$

$$= (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}.$$

Durch Integration über Ω erhält man

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \, dx.$$

Da die Funktionen \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} einen kompakten Träger in Ω haben, gilt mit dem Satz von Gauß

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \mathbf{v}) \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = 0.$$

Somit erhält man

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} \, dx = - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \, dx$$

oder

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u}).$$

Damit ist die erste Aussage gezeigt. Die zweite Aussage folgt aus der ersten Aussage mit $\mathbf{w} = \mathbf{u}$. Die entsprechenden Aussagen gelten dann auch für $\mathbf{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ und $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, weil $\mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ und $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der \mathbf{H}^1 -Norm dicht liegen. □

Von entscheidender Bedeutung ist nun, dass bei Verwendung des zentralen Lagrangeschen Differenzenquotienten ebenfalls eine Orthogonalitätsrelation gilt:

Lemma 5.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^1$. Für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, sowie die aus der Anfangswertaufgabe (3.4) resultierenden Funktionen $\mathbf{X}, \mathbf{X}^{-1}$ gemäß Lemma 3.2 gelten die Beziehungen*

$$(L_\varepsilon \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{v}, L_\varepsilon \mathbf{w}),$$

$$(L_\varepsilon \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0.$$

Dabei ist $L_\varepsilon \mathbf{v}$ definiert durch

$$L_\varepsilon \mathbf{v} = \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{v} \circ \mathbf{X} - \mathbf{v} \circ \mathbf{X}^{-1}).$$

Beweis: Durch Ausnutzung der Maßtreue der Funktion \mathbf{X} erhalten wir

$$(L_\varepsilon \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{v} \circ \mathbf{X} - \mathbf{v} \circ \mathbf{X}^{-1}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2\varepsilon} \left((\mathbf{v} \circ \mathbf{X}, \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \circ \mathbf{X}^{-1}, \mathbf{w}) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\varepsilon} \left((\mathbf{v} \circ \mathbf{X} \circ \mathbf{X}^{-1}, \mathbf{w} \circ \mathbf{X}^{-1}) - (\mathbf{v} \circ \mathbf{X}^{-1} \circ \mathbf{X}, \mathbf{w} \circ \mathbf{X}) \right) \\
&= \frac{1}{2\varepsilon} \left((\mathbf{v}, \mathbf{w} \circ \mathbf{X}^{-1}) - (\mathbf{v}, \mathbf{w} \circ \mathbf{X}) \right) = - \left(\mathbf{v}, \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{w} \circ \mathbf{X} - \mathbf{w} \circ \mathbf{X}^{-1}) \right) \\
&= -(\mathbf{v}, L_\varepsilon \mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Für $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ gilt damit insbesondere

$$(L_\varepsilon \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0.$$

□

Bei den nun folgenden Abschätzungen setzen wir stets voraus, dass die Daten \mathbf{v}_0 , \mathbf{f} über die benötigten Regularitätseigenschaften verfügen.

Lemma 5.4 *Es sei $\mathbf{v}^n : [0, \varepsilon] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die für $n \in \mathbb{N}$ definierte Galerkinapproximation (5.3) und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten die folgenden zwei Gruppen von Gleichungen:*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}^n(t)),$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 = (\partial_t^m \mathbf{f}(t), \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)), \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 &= -(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)) \\
&\quad + (\mathbf{f}(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)), \quad (5.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 &= -(Z_\varepsilon^0 \partial_t^m \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)) \\
&\quad + (\partial_t^m \mathbf{f}(t), -P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)).
\end{aligned}$$

Beweis: Alle Identitäten gewinnen wir aus der Gleichung

$$(\partial_t \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) + \nu (-P\Delta \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) = -(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) + (\mathbf{f}(t), \mathbf{e}_i) \quad (5.18)$$

für die Galerkinnäherungen.

1. Multiplikation von (5.18) mit $c_{in}(t)$ und Summation von $i = 1, \dots, n$ liefert

$$\begin{aligned}
(\partial_t \mathbf{v}^n(t), \sum_{i=1}^n c_{in}(t) \mathbf{e}_i) + \nu (-P\Delta \mathbf{v}^n(t), \sum_{i=1}^n c_{in}(t) \mathbf{e}_i) &= -(PZ_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), \sum_{i=1}^n c_{in}(t) \mathbf{e}_i) \\
&\quad + (P\mathbf{f}^n(t), \sum_{i=1}^n c_{in}(t) \mathbf{e}_i),
\end{aligned}$$

also

$$(\partial_t \mathbf{v}^n(t), \mathbf{v}^n(t)) + \nu(-P\Delta \mathbf{v}^n(t), \mathbf{v}^n(t)) = -(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), \mathbf{v}^n(t)) + (\mathbf{f}^n(t), \mathbf{v}^n(t)).$$

Mit

$$(-P\Delta \mathbf{v}^n(t), \mathbf{v}^n(t)) = (-\Delta \mathbf{v}^n(t), \mathbf{v}^n(t)) = (\nabla \mathbf{v}^n(t), \nabla \mathbf{v}^n(t)) \quad (5.19)$$

und $(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), \mathbf{v}^n(t)) = 0$ folgt hieraus die erste Identität von (5.16).

2. Differentiation von (5.18) m -mal nach t , Multiplikation mit der m -ten Zeitableitung $c_{in}^{(m)}(t)$ und anschließende Summation von $i = 1, \dots, n$ ergibt

$$\begin{aligned} & (\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t), \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)) + \nu(-P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t), \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)) \\ &= (-Z_\varepsilon^0 \partial_t^m \mathbf{v}^n(t), \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)) + (\partial_t^m \mathbf{f}(t), \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)). \end{aligned}$$

Mit

$$(-P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t), \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)) = \|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2$$

und

$$\begin{aligned} (Z_\varepsilon^0 \partial_t^m \mathbf{v}^n(t), \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)) &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\partial_t^m \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{X} - \partial_t^m \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{X}^{-1}, \partial_t^m \mathbf{v}^n(t) \right) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left((\partial_t^m \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{X}, \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)) - (\partial_t^m \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{X}^{-1}, \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)) \right) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left((\partial_t^m \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{X}, \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)) - (\partial_t^m \mathbf{v}^n(t), \partial_t^m \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{X}) \right) = 0 \end{aligned}$$

erhalten wir wegen der Maßtreue der Abbildungen \mathbf{X} die zweite Identität von (5.16).

3. Multiplikation von (5.18) mit $\lambda_i c_{in}(t)$ und Berücksichtigung von $-P\Delta \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ sowie Summation von $i = 1, \dots, n$ liefert hier

$$\begin{aligned} & (\partial_t \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i c_{in}(t)) + \nu(-P\Delta \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i c_{in}(t)) \\ &= (-Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i c_{in}(t)) + (\mathbf{f}(t), -P\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i c_{in}(t)), \end{aligned}$$

oder

$$(\partial_t \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)) + \nu(-P\Delta \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t))$$

$$= (-Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)) + (\mathbf{f}(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & (\nabla \partial_t \mathbf{v}^n(t), \nabla \mathbf{v}^n(t)) + \nu (P\Delta \mathbf{v}^n(t), P\Delta \mathbf{v}^n(t)) \\ &= (-Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)) + (\mathbf{f}(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)), \end{aligned}$$

und Vertauschung von Differentiation und Integration ergibt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 = -(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)) + (\mathbf{f}(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)).$$

4. Differentiation von (5.18) m -mal nach t , Multiplikation mit $\lambda_i c_{in}^{(m)}(t)$, Summation von $i = 1, \dots, n$ sowie Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \partial_t^m Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t) &= \partial_t^m \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}) - \mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}^{-1})) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon^2} (\partial_t \mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}) - \partial_t \mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}^{-1})) = Z_\varepsilon^0 \partial_t \mathbf{v}^n(t) \end{aligned}$$

liefert die letzte Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 \\ &= (-Z_\varepsilon^0 \partial_t^m \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)) + (\partial_t^m \mathbf{f}(t), -P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)). \end{aligned}$$

Damit sind alle Gleichungen bewiesen. □

Mit Hilfe dieser Identitäten werden im folgenden Lemma wichtige Differentialgleichungen hergeleitet.

Lemma 5.5 *Es sei $\mathbf{v}^n : [0, \varepsilon] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die für $n \in \mathbb{N}$ definierte Galerkinapproximation (5.3) und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten die folgenden Differentialungleichungen:*

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\Omega, \nu} \|\mathbf{f}(t)\|^2 \quad (5.20)$$

$$\frac{d}{dt} \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\Omega, \nu} \|\partial_t^m \mathbf{f}(t)\|^2, \quad (5.21)$$

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\nu, \varepsilon} (\|\mathbf{f}(t)\|^2 + \|\mathbf{v}^n(t)\|^2), \quad (5.22)$$

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\nu, \varepsilon} (\|\partial_t^m \mathbf{f}(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2) \quad (5.23)$$

Dabei hängen die Konstanten c nur von den indizierten Größen ab.

Beweis: Alle Ungleichungen resultieren aus Lemma 5.4, in dem die dort bewiesenen Identitäten

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + 2\nu \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 = 2(\mathbf{f}(t), \mathbf{v}^n(t)), \quad (5.24)$$

$$\frac{d}{dt} \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + 2\nu \|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 = 2(\partial_t^m \mathbf{f}(t), \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)), \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 + 2\nu \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 &= -2(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)) \\ &\quad + 2(\mathbf{f}(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)), \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + 2\nu \|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 &= -2(Z_\varepsilon^0 \partial_t^m \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)) \\ &\quad + 2(\partial_t^m \mathbf{f}(t), -P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)). \end{aligned} \quad (5.27)$$

mit Hilfe der Ungleichungen von Hölder, Poincaré und Young für $p = q = 2$ abgeschätzt werden:

Für die rechte Seite der Gleichung (5.24) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{f}(t), \mathbf{v}^n(t)) &= 2\left(\frac{1}{\xi} \mathbf{f}(t), \xi \mathbf{v}^n(t)\right) \leq 2 \left\| \frac{1}{\xi} \mathbf{f}(t) \right\| \|\xi \mathbf{v}^n(t)\| \\ &\leq 2 \left\| \frac{1}{\xi} \mathbf{f}(t) \right\| c_\Omega \|\xi \nabla \mathbf{v}^n(t)\| \leq 2 c_\Omega \left(\frac{\left\| \frac{1}{\xi} \mathbf{f}(t) \right\|^2}{2} + \frac{\|\xi \nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2}{2} \right) \\ &= c_\Omega \left(\frac{1}{\xi^2} \|\mathbf{f}(t)\|^2 + \xi^2 \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 \right). \end{aligned}$$

Hier kann ξ so gewählt werden, dass $c_\Omega \xi^2 = \nu$ gilt. Somit erhält man die erste Ungleichung.

Analog liefert die Abschätzung

$$2(\partial_t^m \mathbf{f}(t), \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)) \leq c_{\Omega, \nu} \|\partial_t^m \mathbf{f}(t)\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2$$

die zweite Differentialungleichung (5.21) aus der Gleichung (5.25).

Wie oben schätzen wir jetzt die rechte Seite der Gleichung (5.26) ab: Man erhält

$$2(\mathbf{f}(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)) = 2\left(\frac{1}{\xi} \mathbf{f}(t), -\xi P\Delta \mathbf{v}^n(t)\right) \leq \frac{1}{\xi^2} \|\mathbf{f}(t)\|^2 + \xi^2 \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2$$

und

$$\begin{aligned} 2(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)) &= 2\left(\frac{1}{\xi} Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), -\xi P\Delta \mathbf{v}^n(t)\right) \\ &\leq \frac{1}{\xi^2} \|Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \xi^2 \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2. \end{aligned}$$

Mit der Maßtreue der Abbildung \mathbf{X} folgt

$$\begin{aligned} \|Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t)\| &= \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}) - \mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}^{-1})\| \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \left(\|\mathbf{v}^n(t, \mathbf{X})\| + \|\mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}^{-1})\| \right) = \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{v}^n(t)\|. \end{aligned}$$

Mit $2\varepsilon^2 = \nu$ erhalten wir hieraus die dritte Differentialungleichung (5.22).

Schließlich liefert

$$\|Z_\varepsilon^0 \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\| = \frac{1}{2\varepsilon} \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}) - \partial_t^m \mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}^{-1})\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|$$

die letzte Ungleichung aus (5.27). □

Lemma 5.6 *Es sei $\mathbf{v}^n : [0, \varepsilon] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die für $n \in \mathbb{N}$ definierte Galerkinapproximation (5.3) und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten für $t \in [0, \varepsilon]$ die Abschätzungen*

$$\|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\varepsilon, \nu} (\|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\mathbf{f}(t)\|^2), \quad (5.28)$$

$$\|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\varepsilon, \nu} (\|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{f}(t)\|^2), \quad (5.29)$$

$$\|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\varepsilon, \nu} (\|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\mathbf{f}(t)\|^2), \quad (5.30)$$

$$\|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\varepsilon, \nu} (\|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{f}(t)\|^2). \quad (5.31)$$

Beweis: Diese Ungleichungen erhält man aus der Identität

$$(\partial_t \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) + \nu(-P\Delta \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) = -(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) + (\mathbf{f}(t), \mathbf{e}_i)$$

für die Galerkinnäherung \mathbf{v}^n wie folgt:

1. Multiplikation dieser Gleichung mit $c'_{in}(t)$ und Summation von $i = 1, \dots, n$ ergibt

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{v}^n(t), \partial_t \mathbf{v}^n(t)) + \nu(-P\Delta \mathbf{v}^n(t), \partial_t \mathbf{v}^n(t)) \\ = (-Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), \partial_t \mathbf{v}^n(t)) + (\mathbf{f}(t), \partial_t \mathbf{v}^n(t)), \end{aligned}$$

also

$$\|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 = -\nu(-P\Delta \mathbf{v}^n(t), \partial_t \mathbf{v}^n(t)) - (Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), \partial_t \mathbf{v}^n(t)) + (\mathbf{f}(t), \partial_t \mathbf{v}^n(t)).$$

Mit den Ungleichungen von Hölder und Young erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 &\leq \frac{\nu}{2\xi^2} \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \frac{\nu\xi^2}{2} \|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \frac{1}{2\xi^2} \|Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \frac{\xi^2}{2} \|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 \\ &+ \frac{1}{2\xi^2} \|\mathbf{f}(t)\|^2 + \frac{\xi^2}{2} \|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 2\|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 &\leq \frac{\nu}{\xi^2} \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon\xi^2} \|\mathbf{v}^n(t)\|^2 \\ &+ \frac{1}{\xi^2} \|\mathbf{f}(t)\|^2 + \xi^2(\nu + 2) \|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2. \end{aligned}$$

Hier ist ξ so gewählt, dass $\xi^2(\nu + 2) = 1$ ist. Somit gilt

$$\|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\varepsilon,\nu} (\|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\mathbf{f}(t)\|^2).$$

2. Differentiation der Gleichung für die Galerkinnäherung m -mal nach t , Multiplikation mit der $(m + 1)$ -ten Ableitung $c_{in}^{(m+1)}(t)$ und Summation von $i = 1, \dots, n$ ergibt

$$\begin{aligned} &(\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t), \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)) + \nu(-P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t), \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)) \\ &= (-Z_\varepsilon^0 \partial_t^m \mathbf{v}^n(t), \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)) + (\partial_t^m \mathbf{f}(t), \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 &= -\nu(-P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t), \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)) - (Z_\varepsilon^0 \partial_t^m \mathbf{v}^n(t), \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)) \\ &+ (\partial_t^m \mathbf{f}(t), \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)). \end{aligned}$$

Analog zu den oben gezeigten Abschätzungen erhalten wir

$$\|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\| \leq C_{\varepsilon,\nu} (\|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{f}(t)\|^2).$$

3. Um die Abschätzungen (5.30) und (5.31) zu zeigen, multiplizieren wir die Gleichung (5.4) beziehungsweise die m -mal abgeleitete Gleichung mit $\lambda_i c_{in}$ beziehungsweise $\lambda_i c_{in}^{(m)}$. Hieraus folgen die Behauptungen.

□

Nach diesen Vorbereitungen werden im folgenden Lemma nun A-priori-Abschätzungen für die Galerkinnäherung angegeben:

Lemma 5.7 (A-priori-Abschätzungen) *Es sei $\mathbf{v}^n : [0, \varepsilon] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die für $n \in \mathbb{N}$ definierte Galerkinapproximation (5.3). Dann gelten die folgenden A-priori-Abschätzungen:*

$$\|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau \leq \|\mathbf{v}_0\|^2 + c_{\Omega, \nu} \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau, \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau &\leq \|\nabla \mathbf{v}_0\|^2 + c_{\nu, \varepsilon} t \|\mathbf{v}_0\|^2 \\ &\quad + c_{\Omega, \nu, \varepsilon} (1+t) \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \partial_t \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau &\leq \|\partial_t \mathbf{v}^n(0)\|^2 + c_{\Omega, \nu} \int_0^t \|\partial_t \mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leq c_{\Omega, \nu, \varepsilon} \left(\|P\Delta \mathbf{v}_0\|^2 + \|\mathbf{f}(0)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|\partial_t \mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 &\leq c_{\Omega, \nu, \varepsilon} \left(\|P\Delta \mathbf{v}_0\|^2 + \|\mathbf{f}(0)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f}(t)\|^2 + \int_0^t \|\partial_t \mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \right). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Beweis: Alle A-priori-Abschätzungen lassen sich durch Integration von 0 bis $t \in [0, \varepsilon]$ der Differentialungleichungen aus Lemma 5.5 herleiten. Aus der Ungleichung (5.20) erhält man

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau &\leq \|\mathbf{v}^n(0)\|^2 + c_{\nu, \Omega} \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leq \|\mathbf{v}_0\|^2 + c_{\nu, \Omega} \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgt aus der Definition der Galerkinnäherung: Für

$$\mathbf{v}^n(0, x) := \sum_{i=1}^n c_{in}(0) \mathbf{e}_i(x) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_0, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i$$

gilt mit der Besselschen Ungleichung

$$\|\mathbf{v}^n(0)\|^2 = \sum_{i=1}^n |(\mathbf{v}_0, \mathbf{e}_i)|^2 \leq \|\mathbf{v}_0\|^2.$$

Damit ist die A-priori-Abschätzung (5.32) bewiesen.

Integration der Differentialungleichung (5.22) von 0 bis t liefert

$$\|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau \leq \|\nabla \mathbf{v}^n(0)\|^2 + c_{\nu,\varepsilon} \int_0^t (\|\mathbf{f}(\tau)\|^2 + \|\mathbf{v}^n(\tau)\|^2) d\tau.$$

Um $\|\nabla \mathbf{v}^n(0)\|$ durch $\|\nabla \mathbf{v}_0\|$ abzuschätzen, gehen wir von der Definition der Galerkinnäherung

$$\mathbf{v}^n(t, x) = \sum_{i=1}^n c_{in}(t) \mathbf{e}_i(x)$$

aus, man hat also

$$\nabla \mathbf{v}^n(t, x) = \sum_{i=1}^n c_{in}(t) \nabla \mathbf{e}_i(x).$$

Für $t = 0$ folgt

$$\nabla \mathbf{v}^n(0, x) = \sum_{i=1}^n c_{in}(0) \nabla \mathbf{e}_i(x)$$

mit

$$c_{in}(0) = (\mathbf{v}_0, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{v}_0, \lambda_i \mathbf{e}_i) \frac{1}{\lambda_i} = (\mathbf{v}_0, -P\Delta \mathbf{e}_i) \frac{1}{\lambda_i} = \frac{(\nabla \mathbf{v}_0, \nabla \mathbf{e}_i)}{\lambda_i}.$$

Wegen

$$\|\nabla \mathbf{e}_i\|^2 = (\nabla \mathbf{e}_i, \nabla \mathbf{e}_i) = (-P\Delta \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = (\lambda_i \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \lambda_i$$

folgt insgesamt

$$\nabla \mathbf{v}^n(0) = \sum_{i=1}^n \frac{(\nabla \mathbf{v}_0, \nabla \mathbf{e}_i)}{\|\nabla \mathbf{e}_i\|^2} \nabla \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \left(\nabla \mathbf{v}_0, \frac{\nabla \mathbf{e}_i}{\|\nabla \mathbf{e}_i\|} \right) \frac{\nabla \mathbf{e}_i}{\|\nabla \mathbf{e}_i\|}. \quad (5.36)$$

Die Funktionen \mathbf{e}_i bilden ein Orthogonalsystem in $\mathcal{H}^1(\Omega)$, denn es gilt

$$(\nabla \mathbf{e}_i, \nabla \mathbf{e}_j) = (-P\Delta \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \lambda_i (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \lambda_i \delta_{ij}. \quad (5.37)$$

Mit der Besselschen Ungleichung folgt dann aus (5.36)

$$\|\nabla \mathbf{v}^n(0)\|^2 \leq \|\nabla \mathbf{v}_0\|^2.$$

Mit (5.32) gilt folglich

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau &\leq \|\nabla \mathbf{v}_0\|^2 + c_{\nu,\varepsilon} \int_0^t (\|\mathbf{f}(\tau)\|^2 + \|\mathbf{v}_0\|^2) d\tau \\ &\quad + c_{\Omega,\nu,\varepsilon} \int_0^t \int_0^\tau \|\mathbf{f}(s)\|^2 ds d\tau \\ &\leq \|\nabla \mathbf{v}_0\|^2 + c_{\Omega,\nu,\varepsilon} \left(t \|\mathbf{v}_0\|^2 + (1+t) \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \right). \end{aligned}$$

Damit ist die A-priori-Abschätzung (5.33) bewiesen.

Die Abschätzung (5.34) kann durch Integration der Ungleichung (5.21) von 0 bis t für $m = 1$ erhalten werden. Dazu benötigen wir noch zwei Ungleichungen:

Aus (5.28) resultiert für $t = 0$

$$\begin{aligned} \|\partial_t \mathbf{v}^n(0)\|^2 &\leq c_{\nu, \varepsilon} \left(\|P\Delta \mathbf{v}^n(0)\|^2 + \|\mathbf{v}^n(0)\|^2 + \|\mathbf{f}(0)\|^2 \right) \\ &\leq c_{\nu, \varepsilon} \left(\|P\Delta \mathbf{v}_0\|^2 + c_\Omega \|P\Delta \mathbf{v}^n(0)\|^2 + \|\mathbf{f}(0)\|^2 \right) \\ &\leq c_{\Omega, \nu, \varepsilon} \left(\|P\Delta \mathbf{v}^n(0)\|^2 + \|\mathbf{f}(0)\|^2 \right). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Dabei können wir $\|P\Delta \mathbf{v}^n(0)\|$ durch $\|P\Delta \mathbf{v}_0\|$ wie folgt abschätzen: Aus der Definition der Galerkinnäherung erhält man

$$-P\Delta \mathbf{v}^n(t) = -P\Delta \sum_{i=1}^n c_{in}(t) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n c_{in}(t) (-P\Delta \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n c_{in}(t) \lambda_i \mathbf{e}_i.$$

Für $t = 0$ resultiert hieraus

$$\begin{aligned} \|P\Delta \mathbf{v}^n(0)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_0, \mathbf{e}_i) \lambda_i \mathbf{e}_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_0, \lambda_i \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_0, -P\Delta \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n (-P\mathbf{v}_0, \Delta \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n (P\nabla \mathbf{v}_0, \nabla \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n (-P\Delta \mathbf{v}_0, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |(P\Delta \mathbf{v}_0, \mathbf{e}_i)|^2 \leq \|P\Delta \mathbf{v}_0\|^2. \end{aligned}$$

Somit ist auch die dritte A-priori-Abschätzung (5.34) gezeigt.

Für den Beweis der letzten Abschätzung verwenden wir die Regularitätstheorie der stationären Stokes-Gleichungen [Cat61, Cattabriga]: Für Funktionen $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$ gilt die Abschätzung

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leq c_\Omega \|P\Delta \mathbf{u}\|^2. \quad (5.39)$$

Mit dieser Ungleichung folgt aus (5.30)

$$\|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\Omega, \nu, \varepsilon} (\|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\mathbf{f}(t)\|^2).$$

Die dritte A-priori-Abschätzung (5.34) ergibt damit

$$\|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\Omega, \nu, \varepsilon} (\|P\Delta \mathbf{v}_0\|^2 + \|\mathbf{f}(0)\|^2 + \|\mathbf{f}(t)\|^2 + \int_0^t \|\partial_\tau \mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau).$$

□

Aus den obigen Abschätzungen resultieren nun die folgenden Stetigkeitsaussagen:
Aus den Formeln (5.32) und (5.33) folgt

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|\mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq \|\mathbf{v}_0\|^2, \quad (5.40)$$

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq \|\nabla \mathbf{v}_0\|^2. \quad (5.41)$$

Eine entsprechende Aussage für die Norm $\|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2$ erhält man aus dem nächsten Lemma:

Lemma 5.8 *Es sei $\mathbf{v}^n : [0, \varepsilon] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die für $n \in \mathbb{N}$ definierte Galerkinapproximation (5.3). Für $t \in [0, \varepsilon]$ gilt dann*

$$\begin{aligned} \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 &\leq \|P\Delta \mathbf{v}_0\|^2 + \frac{2}{\nu} K_1 t + \frac{2}{\nu} \left(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(\tau), -P\Delta \mathbf{v}^n(\tau) \right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &\quad + \frac{2}{\nu} (\mathbf{f}(\tau), -P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \frac{2}{\nu} K_2 t. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Beweis: Multiplikation der Gleichung (5.4) mit $\lambda_i c'_{in}$, Berücksichtigung der Eigenwerteigenschaft $-P\Delta \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ und Summation von $i = 1, \dots, n$ ergibt

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \partial_t \mathbf{v}^n(t)) &- \nu (P\Delta \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \partial_t \mathbf{v}^n(t)) \\ &= -(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \partial_t \mathbf{v}^n(t)) + (\mathbf{f}(t), -P\Delta \partial_t \mathbf{v}^n(t)). \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (P\Delta \mathbf{v}^n(t))^2 dx = \int P\Delta \mathbf{v}^n(t) \cdot P\Delta \partial_t \mathbf{v}^n(t) dx \\ &= (P\Delta \mathbf{v}^n(t), P\Delta \partial_t \mathbf{v}^n(t)) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla \partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 &= -(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \partial_t \mathbf{v}^n(t)) \\ &\quad + (\mathbf{f}(t), -P\Delta \partial_t \mathbf{v}^n(t)). \end{aligned}$$

Durch Integration von 0 bis t resultiert hieraus

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\nabla \partial_t \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau + \frac{\nu}{2} \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 \\ &= \frac{\nu}{2} \|P\Delta \mathbf{v}^n(0)\|^2 - \int_0^t (Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(\tau), -P\Delta \partial_t \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau \\ &\quad + \int_0^t (\mathbf{f}(\tau), -P\Delta \partial_t \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

1. Betrachten wir den zweiten Summanden der rechten Seite. Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}
-\int_0^t (Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(\tau), -P\Delta \partial_t \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau &= -(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(\tau), -P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&\quad + \int_0^t (\partial_t Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(\tau), -P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau \\
&= -(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(\tau), -P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&\quad + \int_0^t (Z_\varepsilon^0 \partial_t \mathbf{v}^n(\tau), -P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau.
\end{aligned}$$

Mit den Ungleichungen von Hölder und Young kann die Beschränktheit beider Summanden gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(\tau), P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} &= \left(\frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{v}(\tau, \mathbf{X}) - \mathbf{v}(\tau, \mathbf{X}^{-1}), P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)) \right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&= \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{v}(t, \mathbf{X}) - \mathbf{v}(t, \mathbf{X}^{-1}), P\Delta \mathbf{v}^n(t)) \\
&\quad - \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{v}(0, \mathbf{X}) - \mathbf{v}(0, \mathbf{X}^{-1}), P\Delta \mathbf{v}^n(0)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t (Z_\varepsilon^0 \partial_t \mathbf{v}^n(\tau), -P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau &\leq \int_0^t \|Z_\varepsilon^0 \partial_t \mathbf{v}^n(\tau)\| \|P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)\| d\tau \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|Z_\varepsilon^0 \partial_t \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau \\
&\leq K_1 t.
\end{aligned}$$

2. Analog erhält man für den dritten Summanden

$$\begin{aligned}
\int_0^t (\mathbf{f}(\tau), -P\Delta \partial_t \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau &= (\mathbf{f}(\tau), -P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&\quad - \int_0^t (\partial_t \mathbf{f}(\tau), -P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau \\
&\leq (\mathbf{f}(\tau), -P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + K_2 t.
\end{aligned}$$

Hieraus resultiert die Ungleichung (5.42). Somit ist der Satz bewiesen.

□

Mit den nunmehr vorliegenden Abschätzungen werden wir später die Existenz einer stark $H^2(\Omega)$ -stetigen Lösung der Näherungsgleichungen auf $[0, \varepsilon]$ zeigen.

Darüber hinaus werden wir nun Abschätzungen beliebiger Zeitableitungen der Galerkinapproximationen bereitstellen, jedoch nur für $t \in (0, \varepsilon]$. Diese Abschätzungen führen dann später zu den entsprechenden Regularitätseigenschaften der Näherungslösung für $t > 0$.

Lemma 5.9 *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < \varepsilon$, und es seien $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten für die Galerkinapproximationen $\mathbf{v}^n(t)$ für alle $t \in [\alpha, \varepsilon]$ die Abschätzungen*

$$\|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq F_m(t), \quad (5.43)$$

$$\|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq G_m(t), \quad (5.44)$$

$$\|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq H_m(t). \quad (5.45)$$

Dabei sind die Funktionen $F_m, G_m, H_m : [\alpha, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und hängen von $\alpha, \varepsilon, \nu, \Omega$ und den Daten \mathbf{v}_0 und \mathbf{f} ab.

Beweis: Der Beweis wird mit Hilfe vollständiger Induktion über m durchgeführt: Im Fall $m = 0$ haben wir die behaupteten A-priori-Abschätzungen sogar für $\alpha = 0$ in Lemma 5.7 gezeigt. Wir nehmen nun an, dass die Abschätzungen (5.43) - (5.45) für festes $m \in \mathbb{N}$ gültig sind, und zeigen, dass sie auch für $m + 1$ gelten.

Wegen

$$\|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\nu, \varepsilon} (\|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{v}^n\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{f}(t)\|^2)$$

nach (5.29) gilt die erste Abschätzung (5.43) auch im Falle $m+1$ für alle $t \in [\alpha, \varepsilon]$.

Wir benutzen jetzt die Differentialungleichung (5.21) mit m ersetzt durch $m + 1$:

$$\frac{d}{dt} \|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\Omega, \nu} \|\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(t)\|^2.$$

Integration von α bis 2α ergibt

$$\begin{aligned} \|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(2\alpha)\|^2 + \nu \int_{\alpha}^{2\alpha} \|\nabla \partial_{\tau}^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau &\leq \|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\alpha)\|^2 \\ &+ c_{\Omega, \nu} \int_{\alpha}^{2\alpha} \|\partial_{\tau}^{m+1} \mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Oben wurde die Beschränktheit von $\|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2$ für alle $t \in [\alpha, \varepsilon]$ gezeigt.

Deswegen erhält man

$$\nu \int_{\alpha}^{2\alpha} \|\nabla \partial_{\tau}^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau \leq F_{m+1}(\alpha) + K_1$$

mit einer von \mathbf{f} abhängigen Konstanten K_1 . Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\beta \in [\alpha, 2\alpha]$ mit

$$\nu\alpha \|\nabla \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\beta)\|^2 \leq F_{m+1}(\alpha) + K_1.$$

Der hiermit vorliegende Zeitpunkt β dient im nächsten Schritt als Anfangspunkt. Dazu verwenden wir die Differentialungleichung (5.23) mit m ersetzt durch $m+1$:

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\nu, \varepsilon} (\|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(t)\|^2).$$

Durch Integration von β bis $t \in [\beta, \varepsilon]$ erhält man

$$\begin{aligned} \|\nabla \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 &+ \nu \int_{\beta}^t \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leq \|\nabla \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\beta)\|^2 + c_{\nu, \varepsilon} \int_{\beta}^t \|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau \\ &+ c_{\nu, \varepsilon} \int_{\beta}^t \|\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leq \frac{1}{\nu\alpha} F_{m+1}(\alpha) + \frac{1}{\nu\alpha} K_1 + \tilde{F}_{m+1}(t) + K_2(t) \end{aligned}$$

mit einer von \mathbf{f} abhängigen Funktion $K_2(t)$. Damit gilt sicherlich mit

$$\frac{1}{\nu\alpha} F_{m+1}(\alpha) + \frac{1}{\nu\alpha} K_1 + \tilde{F}_{m+1}(t) + K_2(t) =: G_{m+1}(t)$$

die Ungleichung

$$\|\nabla \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq G_{m+1}(t) \quad \text{für } t \in [2\alpha, \varepsilon].$$

Somit ist auch die zweite Abschätzung bewiesen.

Um die letzte Normschranke zu zeigen, betrachten wir zunächst wieder die Differentialungleichung (5.23) mit m ersetzt durch $m+1$:

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\varepsilon, \nu} (\|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(t)\|^2).$$

Durch Integration von 2α bis 3α erhalten wir mit dem Mittelwertsatz ein $\gamma \in [2\alpha, 3\alpha]$ mit

$$\begin{aligned} \nu\alpha \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\gamma)\|^2 &\leq \|\nabla \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(2\alpha)\|^2 \\ &+ c_{\varepsilon, \nu} \int_{2\alpha}^{3\alpha} (\|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 + \|\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(\tau)\|^2) d\tau \end{aligned}$$

$$\leq G_{m+1}(2\alpha) + K_3$$

mit einer von \mathbf{f} und F_{m+1} abhängigen Konstanten K_3 . Den Zeitpunkt γ verwenden wir wieder als Anfangspunkt für den nächsten Schritt. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$(\partial_t \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) + \nu(-P\Delta \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) = -(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) + (\mathbf{f}(t), \mathbf{e}_i).$$

Differentiation dieser Gleichung $(m+1)$ -mal nach t , Multiplikation mit $\lambda_i c_{in}^{(m+2)}$, Berücksichtigung von $-P\Delta \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ sowie Summation von $i = 1, \dots, n$ ergibt

$$\begin{aligned} & (\partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t)) + \nu(-P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t)) \\ &= (-Z_\varepsilon^0 \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t)) + (\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(t), -P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t)). \end{aligned}$$

Mit

$$(P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t), P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} \|\nabla \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 &= -(Z_\varepsilon^0 \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t)) \\ &\quad + (\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(t), -P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t)), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 &\leq (Z_\varepsilon^0 \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t), P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t)) \\ &\quad + (\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(t), -P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t)). \end{aligned}$$

Integration von γ bis $t \in [\gamma, \varepsilon]$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2} \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 &\leq \frac{\nu}{2} \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\gamma)\|^2 \\ &\quad + \int_\gamma^t (Z_\varepsilon^0 \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau), P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau \\ &\quad + \int_\gamma^t (\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(\tau), -P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Wir beweisen jetzt die Beschränktheit der letzten beiden Integrale:

1. Für das erste Integral folgt zusammen mit den Ungleichungen von Hölder und Young die folgende Abschätzung:

$$\int_\gamma^t (Z_\varepsilon^0 \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau), P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau = (Z_\varepsilon^0 \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau), P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)) \Big|_{\tau=\gamma}^{\tau=t}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\gamma}^t (Z_{\varepsilon}^0 \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(\tau), P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)) \\
& \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} \|Z_{\varepsilon}^0 \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \xi \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \right. \\
& + \|Z_{\varepsilon}^0 \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\gamma)\|^2 + \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\gamma)\|^2 \\
& + \int_{\gamma}^t \|Z_{\varepsilon}^0 \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau \\
& \left. + \int_{\gamma}^t \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau \right).
\end{aligned}$$

2. Analog erhalten wir für das zweite Integral durch partielle Integration

$$\begin{aligned}
& \int_{\gamma}^t (\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(\tau), -P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau = (\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(\tau), -P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)) \Big|_{\tau=\gamma}^{\tau=t} \\
& - \int_{\gamma}^t (\partial_{\tau}^{m+2} \mathbf{f}(\tau), -P\Delta \partial_{\tau}^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau \\
& = (\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(t), -P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)) \\
& - (\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(\gamma), -P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\gamma)) \\
& - \int_{\gamma}^t (\partial_{\tau}^{m+2} \mathbf{f}(\tau), -P\Delta \partial_{\tau}^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau.
\end{aligned}$$

Mit den Ungleichungen von Hölder und Young folgt daraus

$$\begin{aligned}
& \int_{\gamma}^t (\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(\tau), -P\Delta \partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(\tau)) d\tau \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} \|\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(t)\|^2 + \xi \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \right. \\
& + \|\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(\gamma)\|^2 + \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\gamma)\|^2 \\
& + \int_{\gamma}^t \|\partial_t^{m+2} \mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \\
& \left. + \int_{\gamma}^t \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau \right).
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich insgesamt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\nu \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 & \leq (\nu + 2) \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\gamma)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon \xi} F_{m+1}(t) + \frac{1}{\varepsilon} F_{m+1}(\gamma) \\
& + \int_{\gamma}^t \|\partial_t^{m+2} \mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau + 2\xi \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma}^t \|\partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau + 2 \int_{\gamma}^t \|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau.$$

Hier wählen wir ξ so, dass $2\xi < \nu$ gilt. Für die Norm $\|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\tau)\|^2$ können wir weiter die Abschätzung (5.31)

$$\|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\nu, \varepsilon} (\|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{f}(t)\|^2)$$

mit m ersetzt durch $m + 1$ verwenden. Daraus resultiert dann

$$\|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq \tilde{H}_{m+1}(t) + c_{\nu, \varepsilon} \int_{\gamma}^t \|\partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau$$

mit einer auf $[\gamma, \varepsilon]$ stetigen Funktion \tilde{H}_{m+1} .

Wir benutzen jetzt die Differentialungleichung (5.21) mit m ersetzt durch $m + 2$:

$$\frac{d}{dt} \|\partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\Omega, \nu} \|\partial_t^{m+2} \mathbf{f}(t)\|^2.$$

Durch Integration von γ bis $t \in [\gamma, \varepsilon]$ folgt daraus

$$\|\partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq \|\partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(\gamma)\|^2 + c_{\Omega, \nu} \int_{\gamma}^t \|\partial_t^{m+2} \mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau.$$

Mit (5.29) erhält man für $t = \gamma$ und m ersetzt durch $m + 1$

$$\|\partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(\gamma)\|^2 \leq c_{\varepsilon, \nu} (\|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\gamma)\|^2 + \|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(\gamma)\|^2 + \|\partial_t^{m+1} \mathbf{f}(\gamma)\|^2).$$

Somit gilt für $t \in [\gamma, \varepsilon]$ die Abschätzung

$$\|\partial_t^{m+2} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\Omega, \varepsilon, \nu} (H_{m+1}(\gamma) + F_{m+1}(\gamma) + K_5 + \int_{\gamma}^t \|\partial_t^{m+2} \mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau).$$

Daraus resultiert

$$\|P\Delta \partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq H_{m+1}(t)$$

für alle $t \in [3\alpha, \varepsilon]$. Da $0 < \alpha < \varepsilon$ beliebig gewählt werden kann, ist der Satz komplett bewiesen. □

5.5 Existenz der Lösung

Nach diesen vorbereitenden Abschätzungen der Galerkinapproximationen \mathbf{v}^n können wir im folgenden Satz die Existenz einer stark $H^2(\Omega)$ -stetigen Lösung der

regularisierten Gleichungen

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= -Z_\varepsilon^0 \mathbf{v} + \mathbf{f}, & (t, \mathbf{x}) \in (0, \varepsilon] \times \Omega, \\
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, & (t, \mathbf{x}) \in (0, \varepsilon] \times \Omega, \\
\mathbf{v}|_{\partial\Omega} &= 0, & t \in (0, \varepsilon], \\
\mathbf{v}|_{t \leq 0} &= \mathbf{v}_0, & \mathbf{x} \in \Omega
\end{aligned} \tag{5.46}$$

von Navier-Stokes im ersten Zeitintervall $[0, \varepsilon]$ beweisen.

Satz 5.10 *Es seien $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}^3(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$ und $\mathbf{f} \in H^1(0, \varepsilon, \mathbf{H}^1(\Omega))$. Dann existieren eine eindeutig bestimmte Funktion $\mathbf{v} \in C([0, \varepsilon], \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega))$ mit $\partial_t \mathbf{v} \in C([0, \varepsilon], \mathcal{H}^0(\Omega)) \cap L^2(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega))$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $\nabla p \in C([0, \varepsilon], \mathbf{L}^2(\Omega))$ als Lösung der Gleichungen (5.46). Die Funktion \mathbf{v} erfüllt für jedes $t \in [0, \varepsilon]$ die Energiegleichung*

$$\|\mathbf{v}(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}(\tau)\|^2 d\tau = \|\mathbf{v}_0\|^2 + 2 \int_0^t (\mathbf{f}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) d\tau \tag{5.47}$$

und die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\|\nabla \mathbf{v}(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|P\Delta \mathbf{v}(\tau)\|^2 d\tau &\leq \|\nabla \mathbf{v}_0\|^2 + c_1 t \|\mathbf{v}_0\|^2 \\
&\quad + c_2 t \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau, \tag{5.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\partial_t \mathbf{v}(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \partial_\tau \mathbf{v}(\tau)\|^2 d\tau &\leq c_3 \left(\|P\Delta \mathbf{v}_0\|^2 + \|\mathbf{f}(0)\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \|\partial_t \mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \right). \tag{5.49}
\end{aligned}$$

Dabei hängen die Konstanten c_1, c_2, c_3 nur von ε, ν, Ω ab.

Beweis: Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

1. Konstruktion der Startwerte: Zur Lösung des Systems (5.46) mit

$$Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\varepsilon} \left(\mathbf{v}(t, \mathbf{X}_0) - \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_0^{-1}) \right) \tag{5.50}$$

benötigen wir die Abbildung \mathbf{X}_0 , konstruiert aus der Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}(t)),$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Nach Lemma 3.2 besitzt diese Anfangswertaufgabe eine eindeutig bestimmte Lösung $t \mapsto \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_0(t, \mathbf{x}_0)$, falls \mathbf{v}_0 ein am Rande $\partial\Omega$ verschwindendes, divergenzfreies, Lipschitz-stetiges Geschwindigkeitsfeld ist. Außerdem sind die Abbildungen $\mathbf{X}_0(t, \cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ in diesem Falle maßtreu. Diese Bedingungen an \mathbf{v}_0 sind durch die Voraussetzung $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}^3(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$ sichergestellt: $\mathcal{H}^1(\Omega)$ -Funktionen sind divergenzfrei mit verschwindenden Randwerten, und die Lipschitz-Stetigkeit von $\mathbf{H}^3(\Omega)$ -Funktionen folgt aus der stetigen Einbettung

$$\mathbf{H}^3(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$$

nach dem Sobolevschen Einbettungssatz [AJ03, Adams, S. 85]. Damit sind die Startwerte \mathbf{X}_0 und \mathbf{X}_0^{-1} eindeutig bestimmt.

2. Konvergenz einer Teilfolge: Ausgangspunkt unserer Betrachtungen sind die Galerkinnäherungen $(\mathbf{v}^n)_n$. Um sie auf Konvergenz zu untersuchen, wenden wir den Satz von Arzelà und Ascoli (siehe Satz 2.22) mit $F = \{\mathbf{v}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $X = [0, \varepsilon]$ und $Y = \mathcal{H}^1(\Omega)$ an. Nach diesem Satz erhält man eine in $C([0, \varepsilon], \mathcal{H}^1(\Omega))$ konvergente Teilfolge von $(\mathbf{v}^n)_n$, falls

- (a) $F = \{\mathbf{v}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig in $[0, \varepsilon]$ ist,
- (b) für jedes $t \in [0, \varepsilon]$ die Menge $\{\mathbf{v}^n(t) \mid n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt in $\mathcal{H}^1(\Omega)$ ist.

Zeigen wir diese Eigenschaften:

- (a) Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz für $t_1, t_2 \in [0, \varepsilon]$ liefert

$$|\nabla \mathbf{v}^n(t_2) - \nabla \mathbf{v}^n(t_1)|^2 = \left| \int_{t_1}^{t_2} \partial_t \nabla \mathbf{v}^n(t) dt \right|^2 \leq |t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} |\partial_t \nabla \mathbf{v}^n(t)|^2 dt.$$

Integration über Ω ergibt zusammen mit der Abschätzung (5.34)

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}^n(t_2, \mathbf{x}) - \nabla \mathbf{v}^n(t_1, \mathbf{x})|^2 dx \leq \int_{\Omega} |t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} |\partial_t \nabla \mathbf{v}^n(t, \mathbf{x})|^2 dx dt,$$

also

$$\|\nabla \mathbf{v}^n(t_2) - \nabla \mathbf{v}^n(t_1)\|^2 \leq |t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla \partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 dt \leq |t_2 - t_1| K.$$

Hier ist K eine von ε, ν, Ω und von den Daten \mathbf{v}_0, \mathbf{f} abhängige Konstante, die nicht von n abhängt. Daraus folgt die gleichgradige Stetigkeit von $\{\mathbf{v}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $[0, \varepsilon]$.

- (b) Mit (5.35) folgt aus der Abschätzung von Cattabriga (Satz 2.30), dass die Funktionenmenge $\{\mathbf{v}^n(t) \mid n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $t \in [0, \varepsilon]$ in $\mathbf{H}^2(\Omega)$ beschränkt und damit aufgrund der kompakten Einbettung

$$\mathbf{H}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{H}^1(\Omega)$$

relativ kompakt in $\mathcal{H}^1(\Omega)$ ist.

Damit resultiert aus dem Satz von Arzelà-Ascoli, dass die Folge $(\mathbf{v}^n)_n$ relativ kompakt in $C([0, \varepsilon], \mathcal{H}^1(\Omega))$ ist. Folglich erhalten wir eine wieder mit $(\mathbf{v}^n)_n$ bezeichnete Teilfolge und eine Funktion $\mathbf{v} \in C([0, \varepsilon], \mathcal{H}^1(\Omega))$ mit

$$\sup_{[0, \varepsilon]} \|\nabla \mathbf{v}^n(t) - \nabla \mathbf{v}(t)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5.51)$$

3. Eigenschaften der Grenzfunktion: Aus den Eigenschaften schwach konvergenter Folgen in Sobolevräumen folgt, dass jede von n unabhängige Schranke für die Funktionen $\mathbf{v}^n(t)$ aus Lemmata 5.7, 5.8 sowie 5.9 für die Grenzfunktion $\mathbf{v}(t)$ ebenso gilt, das heißt $\|\partial_t \mathbf{v}(t)\|$, $\|\nabla \mathbf{v}(t)\|$, $\|P\Delta \mathbf{v}(t)\|$ bleiben beschränkt in $\mathbf{L}^2(\Omega)$ und die Folgen $(\partial_t \mathbf{v}^n)_n$, $(\nabla \mathbf{v}^n)_n$ und $(\Delta \mathbf{v}^n)_n$ konvergieren schwach in $L^2([0, \varepsilon], \mathcal{H}^0(\Omega))$ gegen $\partial_t \mathbf{v}$, $\nabla \mathbf{v}$ und $\Delta \mathbf{v}$. Somit gelten alle Abschätzungen (5.47) - (5.49) für die Grenzfunktion \mathbf{v} . Damit ist \mathbf{v} eine Lösung der Gleichungen (5.46) derart, dass

$$\partial_t \mathbf{v} - \nu P\Delta \mathbf{v} = -Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t) + \mathbf{f} \quad (5.52)$$

als Gleichheit in $L^2([0, \varepsilon], \mathcal{H}^0(\Omega))$ für $0 < t < \varepsilon$ mit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\nabla \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0\| = 0$$

gilt. Wegen der Maßtreue der Abbildungen \mathbf{X} gilt $(Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)) = 0$, und die Energiegleichung folgt aus (5.52).

Die Existenz eines eindeutig bestimmten Druckgradienten $\nabla p(t)$ erhält man aus dem Projektionssatz.

Alle für \mathbf{v} gültigen Eigenschaften gelten für jeden Häufungspunkt, den man durch eine andere Auswahl von Teilfolgen erhält. Da aufgrund der Linearität der Aufgabe (5.46) solche Lösungen eindeutig bestimmt sind, existiert nur ein Häufungspunkt \mathbf{v} und die gesamte Folge der Galerkinapproximation \mathbf{v}^n konvergiert gegen \mathbf{v} .

4. Annahme des Anfangswertes in $\mathcal{H}^1(\Omega)$: In diesem Schritt wird gezeigt, dass $\mathbf{v}(t)$ den Anfangswert \mathbf{v}_0 für $t \rightarrow 0$ in $\mathcal{H}^1(\Omega)$ annimmt, d.h. hier

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\nabla \mathbf{v}(t) - \nabla \mathbf{v}_0\| = 0.$$

Mit (5.41) gilt auch für \mathbf{v} die Abschätzung

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|\nabla \mathbf{v}(t)\| \leq \|\nabla \mathbf{v}_0\|. \quad (5.53)$$

Nach Satz 2.39 gilt damit $\mathbf{v}(t) \rightarrow \mathbf{v}_0$ in $\mathcal{H}^1(\Omega)$, falls $\mathbf{v}(t) \rightharpoonup \mathbf{v}_0$ in $\mathcal{H}^1(\Omega)$ gilt. Um die schwache Konvergenz von $\mathbf{v}(t)$ gegen \mathbf{v}_0 in $\mathcal{H}^1(\Omega)$ zu zeigen, genügt es, die Konvergenz

$$(\nabla(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0), \nabla \mathbf{e}_i) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

für jedes \mathbf{e}_i aus einem in $\mathcal{H}^1(\Omega)$ vollständigen Orthonormalsystem zu beweisen. Dazu zerlegen wir die Differenz $\nabla(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0) &= \nabla(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}^n(t)) \\ &+ \nabla(\mathbf{v}^n(t) - \mathbf{v}^n(0)) \\ &+ \nabla(\mathbf{v}^n(0) - \mathbf{v}_0). \end{aligned}$$

Die einzelnen Terme schätzen wir ab:

- (i) Aus (5.51) folgt die starke Konvergenz von $\nabla \mathbf{v}^n(t)$ gegen $\nabla \mathbf{v}(t)$, somit auch die schwache Konvergenz, das heißt, es gilt

$$(\nabla \mathbf{v}(t) - \nabla \mathbf{v}^n(t), \nabla \mathbf{e}_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für alle $t \in [0, \varepsilon]$.

- (ii) Mit dem Hauptsatz und der Abschätzung (5.34) folgt

$$\left| (\nabla(\mathbf{v}^n(t) - \mathbf{v}^n(0)), \nabla \mathbf{e}_i) \right| = \left| \int_0^t \frac{d}{d\tau} (\nabla \mathbf{v}^n(\tau), \nabla \mathbf{e}_i) d\tau \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^t (\partial_\tau \mathbf{v}^n, -P\Delta \mathbf{e}_i) d\tau \right| \\
&\leq \int_0^t |(\partial_\tau \mathbf{v}^n, -P\Delta \mathbf{e}_i)| d\tau \\
&\leq \int_0^t \|\partial_\tau \mathbf{v}^n(\tau)\| \|P\Delta \mathbf{e}_i\| d\tau \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

(iii) Für das letzte Integral verwenden wir die durch (5.36) gegebene Darstellung von $\nabla \mathbf{v}^n(0)$:

$$\nabla \mathbf{v}^n(0) = \sum_{j=1}^n \frac{(\nabla \mathbf{v}_0, \nabla \mathbf{e}_j)}{\|\nabla \mathbf{e}_j\|^2} \nabla \mathbf{e}_j.$$

Wegen

$$(\nabla \mathbf{e}_j, \nabla \mathbf{e}_i) = \lambda_j \delta_{ji},$$

mit $\lambda_j = \|\nabla \mathbf{e}_j\|^2$ resultiert daraus

$$\begin{aligned}
(\nabla(\mathbf{v}^n(0) - \mathbf{v}_0), \nabla \mathbf{e}_i) &= (\nabla \mathbf{v}^n(0), \nabla \mathbf{e}_i) - (\nabla \mathbf{v}_0, \nabla \mathbf{e}_i) \\
&= \left(\sum_{j=1}^n \frac{(\nabla \mathbf{v}_0, \nabla \mathbf{e}_j)}{\|\nabla \mathbf{e}_j\|^2} \nabla \mathbf{e}_j, \nabla \mathbf{e}_i \right) - (\nabla \mathbf{v}_0, \nabla \mathbf{e}_i) \\
&= 0 \text{ für alle } n \geq i.
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Somit ist für $t \rightarrow 0$ die schwache Konvergenz von $\mathbf{v}(t)$ gegen \mathbf{v}_0 in $\mathcal{H}^1(\Omega)$ und damit die behauptete starke Konvergenz gezeigt.

5. Starke $\mathbf{H}^2(\Omega)$ –Stetigkeit der Lösung \mathbf{v} : Wir beweisen jetzt die Regularitätsaussage $\mathbf{v} \in C([0, \varepsilon], \mathbf{H}^2(\Omega))$. Aus der Abschätzung von Cattabriga folgt für jede Funktion $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|\mathbf{w}\|_2 \leq c_\Omega \|P\Delta \mathbf{w}\|. \tag{5.55}$$

Zum Beweis der obigen Aussage genügt daher der Nachweis der starken L^2 –Stetigkeit von $P\Delta \mathbf{v}(t)$ für $t \in [0, \varepsilon]$. Für jedes $t > 0$ erhalten wir mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\left| P\Delta \mathbf{v}(t+h) - P\Delta \mathbf{v}(t) \right|^2 &= \left| \int_t^{t+h} P\Delta \partial_\tau \mathbf{v}(\tau) d\tau \right|^2 \\
&\leq \int_t^{t+h} |P\Delta \partial_\tau \mathbf{v}(\tau)|^2 d\tau \int_t^{t+h} 1 d\tau \\
&= h \int_t^{t+h} |P\Delta \partial_\tau \mathbf{v}(\tau)|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Integration über Ω ergibt mit der Abschätzung (5.45)

$$\|P\Delta\mathbf{v}(t+h) - P\Delta\mathbf{v}(t)\|^2 \leq h \int_t^{t+h} \|P\Delta\partial_\tau\mathbf{v}(\tau)\|^2 d\tau \leq h \int_t^{t+h} H_1(\tau) d\tau.$$

Daraus folgt, dass die Funktion $t \mapsto \mathbf{v}(t)$ für jedes $t > 0$ stark H^2 -stetig ist.

Jetzt zeigen wir die H^2 -Stetigkeit der Funktion \mathbf{v} im Nullpunkt, gleichbedeutend mit der L^2 -Stetigkeit der Funktion $P\Delta\mathbf{v}(t)$ im Nullpunkt. Diese bedeutet auch die starke Annahme des Anfangswertes für $t \rightarrow 0$ in $\mathbf{H}^2(\Omega)$.

Aus der Formel (5.42) folgt

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|P\Delta\mathbf{v}^n(t)\| \leq \|P\Delta\mathbf{v}_0\|. \quad (5.56)$$

Wie oben genügt es, die schwache L^2 -Konvergenz von $P\Delta\mathbf{v}(t)$

$$(P\Delta\mathbf{v}(t) - P\Delta\mathbf{v}_0, P\Delta\mathbf{e}_i) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

nachzuweisen. Dazu betrachten wir wieder die Zerlegung

$$\begin{aligned} P\Delta\mathbf{v}(t) - P\Delta\mathbf{v}_0 &= P\Delta\mathbf{v}(t) - P\Delta\mathbf{v}^n(t) \\ &+ P\Delta\mathbf{v}^n(t) - P\Delta\mathbf{v}^n(0) \\ &+ P\Delta\mathbf{v}^n(0) - P\Delta\mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

(i) Setzen wir $\mathbf{w}^n(t) := \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}^n(t)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} (P\Delta\mathbf{v}(t) - P\Delta\mathbf{v}^n(t), P\Delta\mathbf{e}_i) &= (P\Delta\mathbf{w}^n(t), P\Delta\mathbf{e}_i) \\ &= -\lambda_i(P\Delta\mathbf{w}^n(t), \mathbf{e}_i) \\ &= -\lambda_i(\Delta\mathbf{w}^n(t), \mathbf{e}_i) \\ &= \lambda_i(\nabla\mathbf{w}^n(t), \nabla\mathbf{e}_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, \varepsilon]$, wie im 4. Schritt gezeigt wurde.

(ii) Mit den Ungleichungen von Hölder und Young folgt

$$\begin{aligned} |(P\Delta\mathbf{v}^n(t) - P\Delta\mathbf{v}^n(0), P\Delta\mathbf{e}_i)| &= \left| \int_0^t \frac{d}{d\tau} (P\Delta\mathbf{v}^n(\tau), P\Delta\mathbf{e}_i) d\tau \right| \\ &= \left| \int_0^t (P\Delta\partial_\tau\mathbf{v}^n(\tau), P\Delta\mathbf{e}_i) d\tau \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t |(P\Delta\partial_\tau \mathbf{v}^n(\tau), P\Delta \mathbf{e}_i)| d\tau \\
&\leq \int_0^t \|P\Delta\partial_\tau \mathbf{v}^n(\tau)\| \|P\Delta \mathbf{e}_i\| d\tau \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|P\Delta\partial_\tau \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau + \frac{\lambda_i \|\mathbf{e}_i\|^2}{2} t \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t H_1(\tau) d\tau + \frac{\lambda_i^2 \|\mathbf{e}_i\|^2}{2} t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

(iii) Mit

$$(P\Delta \mathbf{v}^n(0) - P\Delta \mathbf{v}_0, P\Delta \mathbf{e}_i) = (P\Delta \mathbf{v}^n(0), P\Delta \mathbf{e}_i) - (P\Delta \mathbf{v}_0, P\Delta \mathbf{e}_i)$$

und der Identität $-P\Delta \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ resultiert daraus

$$\begin{aligned}
(P\Delta \mathbf{v}^n(0) - P\Delta \mathbf{v}_0, P\Delta \mathbf{e}_i) &= (P\Delta \mathbf{v}^n(0), -\lambda_i \mathbf{e}_i) - (P\Delta \mathbf{v}_0, -\lambda_i \mathbf{e}_i) \\
&= -\lambda_i (\Delta \mathbf{v}^n(0), \mathbf{e}_i) + \lambda_i (\Delta \mathbf{v}_0, \mathbf{e}_i) \\
&= \lambda_i (\nabla \mathbf{v}^n(0), \nabla \mathbf{e}_i) - \lambda_i (\nabla \mathbf{v}_0, \nabla \mathbf{e}_i) \\
&= \lambda_i (\nabla (\mathbf{v}^n(0) - \mathbf{v}_0), \nabla \mathbf{e}_i) \stackrel{(5.54)}{=} 0
\end{aligned}$$

für alle $n \geq i$.

Somit ist die Funktion \mathbf{v} für alle $t \in [0, \varepsilon]$ stark H^2 -stetig und der Satz 5.10 ist komplett bewiesen. □

Lemma 5.11 *Für die im Satz 5.10 konstruierte Lösung \mathbf{v} gilt*

$$\mathbf{v}(t) \in \mathbf{H}^3(\Omega), \quad t \in (0, \varepsilon].$$

Beweis: Mit Hilfe der Abschätzung von Cattabriga [Cat61, Cattabriga, S. 311] folgt aus der Gleichung

$$-\Delta \mathbf{v}(t) + \frac{1}{\nu} \nabla p = \frac{1}{\nu} (-\partial_t \mathbf{v}(t) - Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(t)), \quad (5.57)$$

dass $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{H}^3(\Omega)$ gilt, falls die rechte Seite in $\mathbf{H}^1(\Omega)$ liegt. Somit ist $\partial_t \mathbf{v}(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\mathbf{f}(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ für $t \in (0, \varepsilon]$ zu zeigen.

1. Mit (5.34) und (5.44) erhält man

$$\|\partial_t \mathbf{v}(t)\|_1^2 = \|\partial_t \mathbf{v}(t)\|^2 + \|\nabla \partial_t \mathbf{v}(t)\|^2 \leq \tilde{F}(t) + G_1(t)$$

mit den nur von den Daten \mathbf{v}_0 , \mathbf{f} und ε , Ω , ν abhängigen Funktionen \tilde{F} und G_1 .

2. Für den Beweis von $\partial_t Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ leiten wir Schranken für $\|Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t)\|$ und $\|\nabla Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t)\|$ her. Mit

$$Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t) = \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_0 - \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_0^{-1})$$

folgt für die erste Norm wegen der Maßtreue der Abbildung \mathbf{X}_0 die Abschätzung

$$\|Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t)\| \leq c_\varepsilon \|\mathbf{v}(t)\|.$$

Jetzt beweisen wir die Beschränktheit von $\|\nabla Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t)\|$. Mit der Ungleichung von Hölder und der Maßtreue von \mathbf{X}_0 erhält man

$$\|\nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_0)\| = \|\nabla_{\mathbf{X}_0} \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_0) \cdot \nabla \mathbf{X}_0\| \leq \|\nabla \mathbf{v}(t)\| \|\nabla \mathbf{X}_0\|_{0,\infty}.$$

Dabei bezeichnet $\nabla_{\mathbf{X}_0}$ den Gradienten mit Differentiation nach \mathbf{X}_0 .

Zur Abschätzung von $\|\nabla \mathbf{X}_0\|_{0,\infty}$ verwenden wir Differentialungleichungsmethoden und erhalten mit dem Lemma von Gronwall [Wal00, Walter, S. 311]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{X}_0(t)\|_{0,\infty} &\leq \left\| \frac{d}{dt} \nabla \mathbf{X}_0(t) \right\|_{0,\infty} \\ &= \left\| \nabla \frac{d}{dt} \mathbf{X}_0(t) \right\|_{0,\infty} = \|\nabla \mathbf{v}_0(\mathbf{X}_0(t))\|_{0,\infty} \\ &= \|\nabla_{\mathbf{X}_0} \mathbf{v}_0(\mathbf{X}_0) \cdot \nabla \mathbf{X}_0(t)\|_{0,\infty} \\ &\leq \|\nabla \mathbf{v}_0\|_{0,\infty} \|\nabla \mathbf{X}_0(t)\|_{0,\infty}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Einbettung

$$\mathbf{H}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^\infty(\Omega)$$

gilt weiter

$$\|\nabla \mathbf{v}_0\|_{0,\infty} \leq c_1 \|\nabla \mathbf{v}_0\|_2 \leq c_2 \|\mathbf{v}_0\|_3.$$

Damit liegt für $\varphi(t) := \|\nabla \mathbf{X}_0(t)\|_{0,\infty}$ und $\beta := c_2 \|\mathbf{v}_0\|_3$ eine Differentialgleichung vom Typ

$$\varphi'(t) \leq \beta \varphi(t),$$

das heißt

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + \beta \int_0^t \varphi(s) ds$$

vor. Für den Anfangswert $\varphi(0)$ gilt:

$$\varphi(0) = \|\nabla \mathbf{X}_0(0, \cdot)\|_{0,\infty} = \|\nabla \mathbf{x}\|_{0,\infty} = 1.$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt nun

$$\varphi(t) \leq e^{\beta t},$$

also

$$\|\nabla \mathbf{X}_0(t)\|_{0,\infty} \leq e^{c_2 \|\mathbf{v}_0\|_3 t} =: K(t) < \infty.$$

Somit erhält man für $\|\nabla Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t)\|$ die folgende Schranke:

$$\|\nabla Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}(t)\| \leq c_{\Omega, \varepsilon} K(t) \|\nabla \mathbf{v}(t)\| \leq c_{\Omega, \varepsilon} \tilde{G}_1(t), \quad t \in (0, \varepsilon].$$

3. Im Satz 5.10 ist $\mathbf{f} \in H^1(0, \varepsilon, \mathbf{H}^1(\Omega))$ vorausgesetzt. Diese Bedingung besagt

$$\mathbf{f} \in L^2(0, \varepsilon, \mathbf{H}^1(\Omega)) \quad \text{und} \quad \partial_t \mathbf{f} \in L^2(0, \varepsilon, \mathbf{H}^1(\Omega)),$$

also $\mathbf{f} \in C([0, \varepsilon], \mathbf{H}^1(\Omega))$ und somit $\mathbf{f}(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ für alle $t \in (0, \varepsilon]$.

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

□

6 Globale Lösungen

Im vorigen Abschnitt wurden Existenz, Eindeutigkeit und Regularitätseigenschaften einer Lösung der regularisierten Navier-Stokes-Gleichungen im ersten Zeitintervall $[0, \varepsilon]$ bewiesen. Jetzt zeigen wir die Existenz einer stark $H^2(\Omega)$ -stetigen Lösung im gesamten Zeitintervall $[0, T]$, indem wir die oben angewendete Methode auf den folgenden Teilintervallen wiederholen. Die konkrete Gestalt des regularisierten Termes $Z_\varepsilon^k \mathbf{v}^n(t)$ muss entsprechend berücksichtigt werden: Für $k = 0$ besitzt $Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t)$ für jedes $t \in [0, \varepsilon]$ wegen $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_{-1}$ die spezielle Form

$$Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}^n(t) = \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}_0) - \mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}_0^{-1})).$$

Für alle anderen Zeitintervalle $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, N-1$ gilt allgemein

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon^k \mathbf{v}^n(t) &= \frac{t - t_k}{2\varepsilon^2} (\mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}_k) - \mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}_k^{-1})) \\ &+ \frac{t_{k+1} - t}{2\varepsilon^2} (\mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}_{k-1}) - \mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}_{k-1}^{-1})). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Dementsprechend ändern sich einige Abschätzungen der Galerkinapproximationen \mathbf{v}^n .

Lemma 6.1 *Sei $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Für die Galerkinnäherungen \mathbf{v}^n und die aus der Anfangswertaufgabe (4.2) resultierenden Abbildungen $\mathbf{X}_k(\varepsilon, \mathbf{x})$ gilt die Orthogonalitätsrelation*

$$(Z_\varepsilon^k \mathbf{v}^n(t), \mathbf{v}^n(t)) = 0, \quad t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (6.2)$$

In den Intervallen $[t_k, t_{k+1}]$ mit $k = 1, 2, \dots, N-1$ ändern sich diejenigen Abschätzungen, in denen Ableitungen von $Z_\varepsilon^k \mathbf{v}^n(t)$ auftreten, denn es gilt für $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, N-1$

$$\partial_t^m Z_\varepsilon^k \mathbf{v}^n(t) \neq Z_\varepsilon^k \partial_t^m \mathbf{v}^n(t).$$

Konkret hat man

Bemerkung 6.2 *Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, 2, \dots, N-1$. Für jedes $t \in [t_k, t_{k+1}]$ gilt*

$$\begin{aligned} \partial_t^m Z_\varepsilon^k \mathbf{v}^n(t) &= Z_\varepsilon^k \partial_t^m \mathbf{v}^n(t) \\ &+ \frac{m}{2\varepsilon^2} \left(\partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}) - \partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t, \mathbf{X}^{-1}) \right) \end{aligned}$$

$$- \frac{m}{2\varepsilon^2} \left(\partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t, \mathbf{Y}) + \partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t, \mathbf{Y}^{-1}) \right). \quad (6.3)$$

Dabei verwenden wir die Bezeichnungen $\mathbf{X} := \mathbf{X}_k(\varepsilon, \cdot)$ und $\mathbf{Y} := \mathbf{X}_{k-1}(\varepsilon, \cdot)$.

Außerdem definieren wir die Galerkinapproximation aus (5.3) nun für alle $t \in [0, T]$:

Definition 6.3 Mit $\mathbf{v}^n : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\mathbf{v}^n(t, \mathbf{x}) := \sum_{j=1}^n c_{jn}(t) \mathbf{e}_j(\mathbf{x}) \quad (6.4)$$

bezeichnen wir n -te Galerkinnäherung. Dabei sind $\mathbf{e}_j \in \mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ die Eigenfunktionen des Stokes-Operator $-P\Delta$ und $c_{jn} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, n$) noch aus dem System der gewöhnlicher Differentialgleichungen (5.7) zu bestimmende Koeffizienten.

Die Abschätzungen aus Lemma 5.4 - 5.6 und 5.9 für den Fall $k = 0$ lassen sich in analoger Weise auf den allgemeinen Fall $k = 1, \dots, N - 1$ übertragen. Wir verzichten hier auf den Beweis dieser in den folgenden Lemmata 6.4 - 6.8 gegebenen Abschätzungen.

Lemma 6.4 Es sei $\mathbf{v}^n : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die für jedes $k = 1, 2, \dots, N - 1$ und $n \in \mathbb{N}$ definierte Galerkinapproximation (6.4) und $m \in \mathbb{N}$. Dann gelten für $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, N$ mit $\mathbf{X} := \mathbf{X}_k(\varepsilon, \cdot)$ und $\mathbf{Y} := \mathbf{X}_{k-1}(\varepsilon, \cdot)$ die folgenden zwei Gruppen von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}^n(t)), \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 &= (\partial_t^m \mathbf{f}(t), \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)), \\ &- \frac{m}{2\varepsilon^2} \left(\partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{X} - \partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{X}^{-1}, \partial_t^m \mathbf{v}^n(t) \right) \\ &+ \frac{m}{2\varepsilon^2} \left(\partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{Y} - \partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{Y}^{-1}, \partial_t^m \mathbf{v}^n(t) \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 &= -(Z_\varepsilon^k \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)) \\ &+ (\mathbf{f}(t), -P\Delta \mathbf{v}^n(t)), \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 = -(Z_\varepsilon^k \partial_t^m \mathbf{v}^n(t), -P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t))$$

$$\begin{aligned}
& + (\partial_t^m \mathbf{f}(t), -P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)) \\
& - \frac{m}{2\varepsilon^2} \left(\partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{X} - \partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{X}^{-1}, -P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t) \right) \\
& + \frac{m}{2\varepsilon^2} \left(\partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{Y} - \partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t) \circ \mathbf{Y}^{-1}, -P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t) \right).
\end{aligned}$$

Lemma 6.5 *Es sei $\mathbf{v}^n : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die für jedes $k = 1, 2, \dots, N-1$ und $n \in \mathbb{N}$ definierte Galerkinapproximation (6.4) und $m \in \mathbb{N}$. Dann gelten die folgenden Differentialungleichungen:*

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\Omega, \nu} \|\mathbf{f}(t)\|^2, \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 & \leq c_{\Omega, \nu, m, \varepsilon} (\|\partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 \\
& + \|\partial_t^m \mathbf{f}(t)\|^2), \quad (6.8)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\nu, \varepsilon} (\|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\mathbf{f}(t)\|^2), \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 & \leq c_{\nu, m, \varepsilon} (\|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{f}(t)\|^2 \\
& + \|\partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t)\|^2). \quad (6.10)
\end{aligned}$$

Dabei hängen die Koeffizienten c nur von den indizierten Größen ab.

Lemma 6.6 *Es sei $\mathbf{v}^n : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die für jedes $k = 1, 2, \dots, N-1$ und $n \in \mathbb{N}$ definierte Galerkinapproximation (6.4) und $m \in \mathbb{N}$. Dann gelten für jedes $t \in [t_k, t_{k+1}]$ die Abschätzungen*

$$\|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\varepsilon, \nu} (\|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\mathbf{f}(t)\|^2), \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 & \leq c_{\varepsilon, \nu, m} (\|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 \\
& + \|\partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{f}(t)\|^2), \quad (6.12)
\end{aligned}$$

$$\|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq c_{\varepsilon, \nu} (\|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\mathbf{f}(t)\|^2), \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned}
\|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 & \leq c_{\varepsilon, \nu, m} (\|\partial_t^{m+1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 \\
& + \|\partial_t^{m-1} \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \|\partial_t^m \mathbf{f}(t)\|^2). \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Lemma 6.7 (A-priori-Abschätzungen) *Es sei $\mathbf{v}^n : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die für jedes $k = 1, 2, \dots, N-1$ und $n \in \mathbb{N}$ definierte Galerkinapproximation (6.4) und $m \in \mathbb{N}$. Dann gelten für die Funktionen $\mathbf{v}^n(t)$ mit $t \in [t_k, t_{k+1}]$ die folgenden*

A-priori-Abschätzungen:

$$\|\mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau \leq \|\mathbf{v}_0\|^2 + c_{\Omega, \nu} \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau, \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|P\Delta \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau &\leq \|\nabla \mathbf{v}_0\|^2 + c_{\nu, \varepsilon} t \|\mathbf{v}_0\|^2 \\ &\quad + c_{\Omega, \nu, \varepsilon} (1+t) \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \|\partial_t \mathbf{v}^n(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \partial_t \mathbf{v}^n(\tau)\|^2 d\tau &\leq c_{\Omega, \nu, \varepsilon} \left(\|P\Delta \mathbf{v}_0\|^2 + t \|\mathbf{v}_0\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f}(0)\|^2 + t \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|\partial_t \mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \|P\Delta \mathbf{v}^n(t)\|^2 &\leq c_{\Omega, \nu, \varepsilon} \left(\|P\Delta \mathbf{v}_0\|^2 + t \|\mathbf{v}_0\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f}(0)\|^2 + \|\mathbf{f}(t)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + t \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|\partial_t \mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Lemma 6.8 *Es sei $\mathbf{v}^n : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die für jedes $k = 1, 2, \dots, N-1$ und $n \in \mathbb{N}$ definierte Galerkinapproximation (6.4) und $m \in \mathbb{N}$. Dann gelten für die Funktionen $\mathbf{v}^n(t)$ für alle $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, N-1$ die Abschätzungen*

$$\|\partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq F_m(t), \quad (6.19)$$

$$\|\nabla \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq G_m(t), \quad (6.20)$$

$$\|P\Delta \partial_t^m \mathbf{v}^n(t)\|^2 \leq H_m(t). \quad (6.21)$$

Dabei sind die Funktionen $F_m, G_m, H_m : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und hängen von $m, \varepsilon, \nu, \Omega$ und den Daten \mathbf{v}_0 und \mathbf{f} ab.

Jetzt betrachten wir die regularisierten Navier-Stokes-Gleichungen auf dem gesamten Zeitintervall

$$[0, T] = \bigcup_{k=0}^{N-1} [t_k, t_{k+1}] :$$

Gesucht sind ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = (v_1(t, \mathbf{x}), v_2(t, \mathbf{x}), v_3(t, \mathbf{x}))$ und eine Druckfunktion $p = p(t, \mathbf{x})$ als Lösung der Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= -Z_\varepsilon^k \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad \text{in } [t_k, t_{k+1}] \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } [t_k, t_{k+1}] \times \Omega, \\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \text{in } [t_k, t_{k+1}], \\ \mathbf{v}|_{t=t_k} &= \mathbf{v}_k \quad \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Dabei ist für $(t, \mathbf{x}) \in [t_k, t_{k+1}] \times \Omega$, $k = 0, 1, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon^k \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &:= \frac{t-t_k}{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \{ \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_k(\varepsilon, \mathbf{x})) - \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_k^{-1}(\varepsilon, \mathbf{x})) \} + \\ &+ \frac{t_{k+1}-t}{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \{ \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_{k-1}(\varepsilon, \mathbf{x})) - \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_{k-1}^{-1}(\varepsilon, \mathbf{x})) \} \end{aligned}$$

mit $\mathbf{X}_k(\varepsilon, \mathbf{x})$ aus der Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{v}_k(\mathbf{x}(t)) := \mathbf{v}(t_k, \mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Für $k = 0$ erhalten wir die Aufgabe (6.22) eingeschränkt auf das Intervall $[t_0, t_1] := [0, \varepsilon]$. Die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung $\mathbf{v} \in C((0, \varepsilon], \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega))$ dieser Aufgabe wurde im Satz 5.10 gezeigt.

Wir betrachten jetzt die Aufgabe (6.22) auf dem zweiten Intervall $[t_1, t_2] := [\varepsilon, 2\varepsilon]$. Als Anfangswert für $t = \varepsilon$ wählen wir die Funktion $\mathbf{v}_1 := \mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}(\varepsilon)$, deren Existenz und $\mathbf{H}^3(\Omega)$ -Regularität oben gezeigt wurde. Wegen $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{H}^3(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$ erfüllt diese Funktion die gleichen Voraussetzungen wie \mathbf{v}_0 im ersten Teilintervall $[0, \varepsilon]$: Sie ist divergenzfrei, Lipschitz-stetig und auf dem Rand $\partial\Omega$ gleich Null. Somit sind alle Voraussetzungen des Lemmas 3.2 erfüllt, das heißt, wir erhalten eine eindeutig bestimmte, maßtreue Abbildung \mathbf{X}_1 aus der Lösung der Anfangswertaufgabe (6.23) im Fall $k = 1$. Damit ist der Regularisator $Z_\varepsilon^1 \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ für $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ wie folgt wohl definiert:

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon^1 \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &:= \frac{t-\varepsilon}{2\varepsilon^2} \left(\mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_1 - \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_1^{-1} \right) \\ &+ \frac{2\varepsilon-t}{2\varepsilon^2} \left(\mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_0 - \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_0^{-1} \right). \end{aligned}$$

Für $Z_\varepsilon^1 \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ wurden in den Lemmata 6.4 - 6.8 alle notwendigen Abschätzungen gezeigt, um die Existenz einer $\mathbf{H}^2(\Omega)$ -stetigen Lösung \mathbf{v}_2 für $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ wie im

Satz 5.10 zu erhalten. Somit ist die Lösung \mathbf{v}_2 eindeutig bestimmt und es gilt $\mathbf{v}_2 \in C([\varepsilon, 2\varepsilon], \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega))$. Mit Lemma 5.11 folgt außerdem $\mathbf{v}_2(t) \in \mathbf{H}^3(\Omega)$ für $t \in (\varepsilon, 2\varepsilon]$.

Nach Konstruktion der Aufgabe (6.22) gilt nun

$$\mathbf{v}_1(\varepsilon) = \mathbf{v}_2(\varepsilon).$$

Darüber hinaus stimmen auch die Zeitableitungen an der Stelle $t = \varepsilon$ überein. Dies folgt direkt aus den Gleichungen von Navier-Stokes: Wegen

$$\partial_t \mathbf{v}_1(\varepsilon) = \nu \Delta \mathbf{v}_1(\varepsilon) - \nabla p(\varepsilon) - Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}_1(\varepsilon) + \mathbf{f}(\varepsilon)$$

und

$$\partial_t \mathbf{v}_2(\varepsilon) = \nu \Delta \mathbf{v}_2(\varepsilon) - \nabla p(\varepsilon) - Z_\varepsilon^1 \mathbf{v}_2(\varepsilon) + \mathbf{f}(\varepsilon)$$

stimmen die rechten Seiten überein, falls $Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}_1(\varepsilon) = Z_\varepsilon^1 \mathbf{v}_2(\varepsilon)$ gilt. Dies ergibt sich nach Konstruktion, denn es gilt

$$Z_\varepsilon^0 \mathbf{v}_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \left(\mathbf{v}_1(\varepsilon, \mathbf{X}_0) - \mathbf{v}_1(\varepsilon, \mathbf{X}_0^{-1}) \right)$$

und

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon^1 \mathbf{v}_2(\varepsilon) &= \frac{2\varepsilon - \varepsilon}{2\varepsilon^2} \left(\mathbf{v}_2(\varepsilon, \mathbf{X}_0) - \mathbf{v}_2(\varepsilon, \mathbf{X}_0^{-1}) \right) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\mathbf{v}_2(\varepsilon, \mathbf{X}_0) - \mathbf{v}_2(\varepsilon, \mathbf{X}_0^{-1}) \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Gültigkeit von

$$\partial_t \mathbf{v}_1(\varepsilon) = \partial_t \mathbf{v}_2(\varepsilon).$$

Setzen wir nun die beiden Lösungen

$$\mathbf{v}_1 \in C([0, \varepsilon], \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega))$$

und

$$\mathbf{v}_2 \in C([\varepsilon, 2\varepsilon], \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega))$$

zusammen, so erhalten wir eine Lösung $\mathbf{v} \in C([0, 2\varepsilon], \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega))$ mit $\partial_t \mathbf{v} \in C([0, 2\varepsilon], \mathbf{L}^2(\Omega))$.

Durch Fortsetzung dieses Prozesses erhalten wir auf jedem Teilintervall $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$ die Funktionen $\mathbf{v}_k(t)$ als Lösung der Aufgabe (6.22). Diese Funktionen zusammengesetzt liefern uns eine eindeutig bestimmte Lösung \mathbf{v} der folgenden Aufgabe:

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= -Z_\varepsilon \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad \text{in } (0, T) \times \Omega, \\
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega, \\
\mathbf{v}|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \text{in } (0, T), \\
\mathbf{v}|_{t=0} &= \mathbf{v}_0 \quad \text{in } \Omega.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Somit haben wir das folgende Resultat bewiesen:

Theorem 6.9 *Es sei $T > 0$. Für $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}^3(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$ und $\mathbf{f} \in H^1(0, T, \mathbf{L}^2(\Omega))$ existieren eindeutig bestimmte Funktionen $\mathbf{v} \in C([0, T], \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1(\Omega))$ mit $\partial_t \mathbf{v} \in C([0, T], \mathcal{H}^0(\Omega))$ und $\nabla p \in C([0, T], \mathbf{L}^2(\Omega))$ als Lösung der Aufgabe (6.24). Die Funktion \mathbf{v} erfüllt für jedes $t \in [0, T]$ die Energiegleichung*

$$\|\mathbf{v}(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}(\tau)\|^2 d\tau = \|\mathbf{v}_0\|^2 + 2 \int_0^t (\mathbf{f}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) d\tau \tag{6.25}$$

Bemerkung 6.10 *Aus der Energiegleichung erhält man mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung (siehe Lemma 2.1) wegen*

$$\begin{aligned}
2|(\mathbf{f}(\tau), \mathbf{v}(\tau))| &\leq 2\|\mathbf{f}(\tau)\| \|\mathbf{v}(\tau)\| \leq 2\frac{c_\Omega}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{f}(\tau)\| \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{v}(\tau)\| \\
&\leq c_{\nu, \Omega} \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 + \nu \|\nabla \mathbf{v}(\tau)\|^2
\end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\|\mathbf{v}(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}(\tau)\|^2 d\tau \leq \|\mathbf{v}_0\|^2 + c_{\nu, \Omega} \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau. \tag{6.26}$$

7 Konvergenz des Verfahrens

In diesem Kapitel untersuchen wir die Konvergenz der im vorigen Abschnitt gefundenen Lösung der regularisierten Navier-Stokes-Gleichungen (6.24) gegen eine schwache Lösung der nichtlinearen Gleichungen von Navier-Stokes. Dafür definieren wir zunächst den Begriff der schwachen Lösung.

7.1 Definition einer schwachen Lösung

Wir betrachten jetzt die instationären nichtlinearen Navier-Stokes-Gleichungen in einem beschränkten zylindrischen Gebiet $[0, T] \times \Omega$

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } (0, T] \times \Omega, \\
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } (0, T] \times \Omega, \\
 \mathbf{v}|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \text{in } (0, T], \\
 \mathbf{v}|_{t=0} &= \mathbf{v}_0 \quad \text{in } \Omega.
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Unter einer klassischen Lösung des Systems (7.1) versteht man Funktionen

$$\mathbf{v} \in C((0, T), \mathbf{C}_{0,\sigma}^2(\Omega)) \cap C^1((0, T), \mathbf{C}(\Omega)),$$

die diese Gleichungen punktweise lösen. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ grundsätzlich ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$.

Jetzt leiten wir den Begriff der schwachen Lösung her. Dafür sei \mathbf{v} eine klassische Lösung und $\boldsymbol{\varphi} \in C_0^1((0, T), \mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega))$ eine Testfunktion. Wir multiplizieren die Navier-Stokes-Gleichungen mit dieser Testfunktion und integrieren über Ω :

$$\begin{aligned}
 (\partial_t \mathbf{v}(t), \boldsymbol{\varphi}(t)) - \nu (\Delta \mathbf{v}(t), \boldsymbol{\varphi}(t)) &+ (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{v}(t), \boldsymbol{\varphi}(t)) \\
 &+ (\nabla p(t), \boldsymbol{\varphi}(t)) = (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{\varphi}(t)). \tag{7.2}
 \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt jeden Term einzeln:

1. Für den ersten Term gilt

$$(\partial_t \mathbf{v}(t), \boldsymbol{\varphi}(t)) = \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}) \, dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}) \, dx$$

$$- \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \partial_t \varphi \, dx = \frac{d}{dt} (\mathbf{v}(t), \varphi(t)) - (\mathbf{v}(t), \partial_t \varphi(t)).$$

2. Mit partieller Integration erhält man

$$(\Delta \mathbf{v}(t), \varphi(t)) = -(\nabla \mathbf{v}(t), \nabla \varphi(t)).$$

3. Mit dem Satz von Gauß gilt

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \mathbf{v}) \, dx = \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = 0 \quad (7.3)$$

für Funktionen $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)$, $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega)$. Andererseits hat man

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \mathbf{v}) &= \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} \\ &= ((\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Integration und (7.3) liefern hieraus

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \, dx = 0.$$

Somit gilt

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} \, dx = - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \, dx,$$

also

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u}).$$

Für den dritten Term folgt somit

$$(\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{v}(t), \varphi(t)) = -(\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \varphi(t), \mathbf{v}(t)).$$

4. Wegen $\nabla \cdot \varphi = 0$ in Ω folgt

$$(\nabla p(t), \varphi(t)) = \int_{\Omega} \nabla p(t, \mathbf{x}) \cdot \varphi(t, \mathbf{x}) \, dx = - \int_{\Omega} p(t, \mathbf{x}) \nabla \cdot \varphi(t, \mathbf{x}) \, dx = 0.$$

Somit sind alle Terme in (7.2) umgeformt. Wenn wir das Resultat noch nach t integrieren, erhalten wir eine Integralbeziehung, die unsere schwache Lösung erfüllen soll. Formulieren wir jetzt die exakte Definition einer schwachen Lösung im Sinne von Hopf (siehe [Hop51], [Tem95], [Lad65]):

Definition 7.1 (schwache Lösung) Seien $\mathbf{f} \in L^2(0, T, \mathcal{H}^0(\Omega))$ und $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ vorgegeben. Eine Funktion

$$\mathbf{v} \in L^2(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, \mathcal{H}^0(\Omega)) \quad (7.4)$$

heißt schwache Lösung der Navier-Stokes Gleichungen (7.1), falls Folgendes gilt:

$$\mathbf{v} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}^0(\Omega) \text{ ist schwach stetig.} \quad (7.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0\| = 0. \quad (7.6)$$

Für jede Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty((0, T), \mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega))$ gilt

$$\int_0^T \left(-(\mathbf{v}, \partial_t \varphi) + \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi) - (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi, \mathbf{v}) \right) dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \varphi) dt. \quad (7.7)$$

7.2 Konvergenzbeweis

Um die Abhängigkeit der regularisierten Lösung von der Schrittweite $\varepsilon := \frac{T}{N}$ bei festgehaltenem $T > 0$ zu betonen, bezeichnen wir sie in diesem Abschnitt mit $\mathbf{v}^\varepsilon(t, \mathbf{x})$. Im Folgenden zeigen wir, dass die so konstruierte Folge der Lösungen (\mathbf{v}^ε) einen Häufungspunkt besitzt, der die Navier-Stokes-Gleichungen im schwachen Sinne gemäß Definition 7.1 löst. Dafür benötigen wir ein vorbereitendes Lemma.

Lemma 7.2 Sei $T > 0$ und \mathbf{v}^ε die regularisierte Lösung aus Satz 6.9 ($\varepsilon := \frac{T}{N} > 0$). Sei $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}^0(\Omega)$. Dann gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\left| (Z_\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i) \right| \leq K_i \quad (7.8)$$

mit einer von $\varepsilon > 0$ und $t \in [0, T]$ unabhängigen Konstanten K_i .

Beweis: Nach Definition des Regularisators Z_ε erhalten wir für $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, N-1$ die Darstellung

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon(t) &= \frac{t - t_k}{2\varepsilon^2} \left(\mathbf{v}^\varepsilon(t) \circ \mathbf{X}_k - \mathbf{v}^\varepsilon(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1} \right) \\ &+ \frac{t_{k+1} - t}{2\varepsilon^2} \left(\mathbf{v}^\varepsilon(t) \circ \mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{v}^\varepsilon(t) \circ \mathbf{X}_{k-1}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

mit den Funktionen $\mathbf{X}_k := \mathbf{X}_k(\varepsilon, \cdot)$ aus der Lösung des Systems

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{v}_k^\varepsilon(x(t)), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0.\end{aligned}\tag{7.10}$$

Mit der Maßtreue der Funktionen \mathbf{X}_k erhalten wir die folgende Identität:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{v}^\varepsilon(t) \circ \mathbf{X}_k - \mathbf{v}^\varepsilon(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}, \mathbf{a}_i\right) &= \left(\mathbf{v}^\varepsilon(t) \circ \mathbf{X}_k, \mathbf{a}_i\right) - \left(\mathbf{v}^\varepsilon(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}, \mathbf{a}_i\right) \\ &= \left(\mathbf{v}^\varepsilon(t) \circ \mathbf{X}_k \circ \mathbf{X}_k^{-1}, \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k^{-1}\right) \\ &\quad - \left(\mathbf{v}^\varepsilon(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1} \circ \mathbf{X}_k, \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k\right) \\ &= \left(\mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k^{-1}\right) - \left(\mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k\right) \\ &= -\left(\mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k^{-1}\right).\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\left(\mathbf{v}^\varepsilon(t) \circ \mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{v}^\varepsilon \circ \mathbf{X}_{k-1}^{-1}, \mathbf{a}_i\right) = -\left(\mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_{k-1}^{-1}\right).$$

Dies bedeutet

$$(Z_\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i) = -(Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t), \mathbf{v}^\varepsilon(t)),\tag{7.11}$$

wobei $Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t)$ für $t \in [t_k, t_{k+1}]$ durch

$$Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t) := \frac{t - t_k}{2\varepsilon^2} \left(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k^{-1}\right) + \frac{t_{k+1} - t}{2\varepsilon^2} \left(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_{k-1}^{-1}\right)$$

definiert ist. Die Funktionen $\mathbf{X}_k := \mathbf{X}_k(\varepsilon, \cdot)$ werden aus der Lösung des Systems (7.10) gewonnen. Mit der Zerlegung

$$\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k^{-1} = \left(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k - \mathbf{a}_i\right) + \left(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k^{-1}\right)$$

gilt folglich

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k - \mathbf{a}_i &= \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k(\varepsilon, \cdot) - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k(0, \cdot) \\ &= \int_0^\varepsilon \partial_\tau \mathbf{a}_i(\mathbf{X}_k(\tau, \cdot)) d\tau = \int_0^\varepsilon \partial_\tau \mathbf{X}_k(\tau, \cdot) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{a}_i(\mathbf{X}_k(\tau, \cdot)) d\tau \\ &= \int_0^\varepsilon \mathbf{v}_k^\varepsilon \circ \mathbf{X}_k(\tau, \cdot) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{a}_i(\mathbf{X}_k(\tau, \cdot)) d\tau \\ &= \int_0^\varepsilon [\mathbf{v}_k^\varepsilon \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{a}_i] \circ \mathbf{X}_k(\tau, \cdot) d\tau\end{aligned}$$

und analog

$$\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k^{-1} = \int_0^\varepsilon [\mathbf{v}_k^\varepsilon \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{a}_i] \circ \mathbf{X}_k^{-1}(\tau, \cdot) d\tau.$$

Wegen der Maßtreue der Abbildungen \mathbf{X}_k und \mathbf{X}_k^{-1} und der Ungleichung von Hölder folgt hieraus

$$\begin{aligned} \|Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t)\| &\leq \frac{2}{2\varepsilon} \int_0^\varepsilon \|\mathbf{v}_k^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{a}_i\| d\tau + \frac{2}{2\varepsilon} \int_0^\varepsilon \|\mathbf{v}_{k-1}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{a}_i\| d\tau \\ &= \|\nabla \mathbf{a}_i\|_{0,\infty} (\|\mathbf{v}_k^\varepsilon\| + \|\mathbf{v}_{k-1}^\varepsilon\|) \\ &= \|\nabla \mathbf{a}_i\|_{0,\infty} (\|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\| + \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_{k-1})\|). \end{aligned}$$

Also gilt mit der Energiegleichung (6.25)

$$\|Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t)\| \leq \tilde{K}_i \quad (7.12)$$

mit einer von $\varepsilon > 0$ und $t \in [0, T]$ unabhängigen Konstanten \tilde{K}_i . Die Behauptung folgt dann aus (7.11). □

Aus der hier bewiesenen Abschätzung erhält man das folgende Lemma:

Lemma 7.3 *Sei $T > 0$ und \mathbf{v}^ε die regularisierte Lösung aus Satz 6.9 ($\varepsilon := \frac{T}{N} > 0$). Sei $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}^0(\Omega)$. Dann gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Abschätzung*

$$\left| \frac{d}{dt} (\mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i) \right| = \left| (\partial_t \mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i) \right| \leq \bar{K}_i. \quad (7.13)$$

Beweis: Aus den regularisierten Navier-Stokes-Gleichungen folgt

$$(\partial_t \mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i) = \nu (\Delta \mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i) - (Z_\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i) + (\mathbf{f}(t), \mathbf{a}_i),$$

also

$$\left| (\partial_t \mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i) \right| \leq \nu \left| (\mathbf{v}^\varepsilon(t), \Delta \mathbf{a}_i) \right| + \left| (Z_\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i) \right| + \left| (\mathbf{f}(t), \mathbf{a}_i) \right|.$$

Dabei darf aus Dichtheitsgründen $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty$ vorausgesetzt werden. Mit der Energiegleichung (6.25) und der Abschätzung (7.8) folgt hieraus die Behauptung. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun ein Hauptresultat unserer Arbeit formulieren:

Theorem 7.4 Die Folge $(\mathbf{v}^\varepsilon)_\varepsilon$ der regularisierten Lösungen \mathbf{v}^ε aus Satz 6.9 besitzt für $\varepsilon \rightarrow 0$ eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert \mathbf{v} die Navier-Stokes-Gleichungen gemäß Definition 7.1 im schwachen Sinne löst und der für alle $t \in [0, T]$ die Energieungleichung

$$\|\mathbf{v}(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}(\tau)\|^2 d\tau \leq \|\mathbf{v}_0\|^2 + 2 \int_0^t (\mathbf{f}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) d\tau \quad (7.14)$$

erfüllt.

Beweis: Aus den Abschätzungen (6.26) und (7.13) erhält man wie in [Hop51] eine wieder mit $(\mathbf{v}^\varepsilon)_\varepsilon$ bezeichnete Teilfolge der Folge der regularisierten Lösungen und eine schwach stetige Funktion $\mathbf{v} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}^0(\Omega)$ mit $\mathbf{v} \in L^2(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, \mathcal{H}^0(\Omega))$ so dass für jedes $t \in [0, T]$ die Funktionen $\mathbf{v}^\varepsilon(t)$ mit $\varepsilon \rightarrow 0$ schwach in $\mathcal{H}^1(\Omega)$ gegen $\mathbf{v}(t)$ konvergieren, und dass außerdem die Funktionen \mathbf{v}^ε mit $\varepsilon \rightarrow 0$ schwach in $L^2(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega))$ sowie stark in $L^2(0, T, \mathcal{H}^0(\Omega))$ gegen \mathbf{v} konvergieren. Es gilt folglich

$$\mathbf{v}^\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{v}(t) \text{ in } \mathcal{H}^1(\Omega), \quad t \in [0, T] \quad (7.15)$$

$$\mathbf{v}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{v} \text{ in } L^2(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega)) \quad (7.16)$$

$$\mathbf{v}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{v} \text{ in } L^2(0, T, \mathcal{H}^0(\Omega)). \quad (7.17)$$

Aus der Gültigkeit der Energiegleichung (6.25) für die Funktionen \mathbf{v}^ε folgt mit Satz 2.39 die Gültigkeit der Energieungleichung (7.14) für den schwachen Limes \mathbf{v} . Aus der schwachen Stetigkeit der Funktion $t \mapsto \mathbf{v}(t)$ in $\mathcal{H}^0(\Omega)$ zur Zeit $t = 0$ und der Energieungleichung (7.14) folgt für $t \rightarrow 0$ die starke Annahme des Anfangswertes \mathbf{v}_0 in $\mathcal{H}^0(\Omega)$, d.h. (7.6). Zum Nachweis von (7.7) muss gezeigt werden, dass die Konvergenzeigenschaften (7.15), (7.16), (7.17) der vorliegenden Teilfolge $(\mathbf{v}^\varepsilon)_\varepsilon$ ausreichen, um den schwachen Grenzübergang der regularisierten Gleichungen (N_ε) gegen die Navier-Stokes-Gleichungen (N_0) zu vollziehen. Wegen (7.16) und (7.17) ist dies unproblematisch für die linearen Anteile, denn für jede Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty((0, T), \mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega))$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T -(\mathbf{v}^\varepsilon(t), \partial_t \varphi(t)) dt &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T -(\mathbf{v}(t), \partial_t \varphi(t)) dt \\ \int_0^T \nu(\nabla \mathbf{v}^\varepsilon(t), \nabla \varphi(t)) dt &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \nu(\nabla \mathbf{v}(t), \nabla \varphi(t)) dt. \end{aligned}$$

Da unter den Bedingungen (7.15), (7.16), (7.17) auch der Grenzübergang in nicht-linearen Term vollzogen werden kann (siehe Theorem 7.5 unten), ist alles bewiesen.

Theorem 7.5 Sei $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}^0(\Omega)$. Dann gilt für die regularisierte Lösung \mathbf{v}^ε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^T (Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t), \mathbf{v}^\varepsilon(t)) dt \right) = \int_0^T (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t)) dt.$$

Dabei ist \mathbf{v} eine Funktion, die die Bedingungen (7.4), (7.5) und (7.6) erfüllt.

Beweis: Wir betrachten die Differenz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \left((Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t), \mathbf{v}^\varepsilon(t)) - (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t)) \right) dt =: \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T I^\varepsilon(t) dt. \quad (7.18)$$

Den Integranden I^ε zerlegen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} I^\varepsilon(t) &= (Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t), \mathbf{v}^\varepsilon(t)) - (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t)) \\ &= (Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t), \mathbf{v}^\varepsilon(t)) - (Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t), \mathbf{v}(t)) + (Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t), \mathbf{v}(t)) - (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t)) \\ &= (Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t), \mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)) + (Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t) - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t)) \\ &=: I_1^\varepsilon(t) + I_2^\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Mit

$$Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t) = \frac{t - t_k}{2\varepsilon^2} \left(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k^{-1} \right) + \frac{t_{k+1} - t}{2\varepsilon^2} \left(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_{k+1}^{-1} \right),$$

der Ungleichung von Hölder und der Abschätzung (7.12) erhält man für den ersten Term die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T I_1^\varepsilon(t) dt \right| &\leq \int_0^T \|Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t)\| \|\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)\| dt \leq \int_0^T \tilde{K}_i \|\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)\| dt \\ &\leq \tilde{K}_i \sqrt{T} \left(\int_0^T \|\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Wegen der starken Konvergenz der Folge (\mathbf{v}^ε) gegen \mathbf{v} in $L^2(0, T, \mathcal{H}^0(\Omega))$ folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_0^T I_1^\varepsilon(t) dt \right| = 0.$$

Den zweiten Integranden zerlegen wir weiter. Für jedes $t \in [t_k, t_{k+1}]$ gilt

$$I_2^\varepsilon(t) = (Z_\varepsilon \mathbf{a}_i(t) - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t))$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{t-t_k}{2\varepsilon^2} (\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k^{-1}) + \frac{t_{k+1}-t}{2\varepsilon^2} (\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_{k-1}^{-1}) \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) \\
&= \left(\frac{t-t_k}{2\varepsilon^2} (\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k - \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k^{-1}) \right. \\
&\quad + \frac{t_{k+1}-t}{2\varepsilon^2} (\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_{k-1}^{-1}) \\
&\quad - \frac{t-t_k}{2\varepsilon} \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i - \frac{t-t_k}{2\varepsilon} \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i \\
&\quad \left. - \frac{t_{k+1}-t}{2\varepsilon} \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i - \frac{t_{k+1}-t}{2\varepsilon} \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) \\
&= \frac{t-t_k}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k - \mathbf{a}_i) - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) \\
&\quad + \frac{t-t_k}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k^{-1}) - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) \\
&\quad + \frac{t_{k+1}-t}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{a}_i) - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) \\
&\quad + \frac{t_{k+1}-t}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_{k-1}^{-1}) - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) =: \sum_{j=1}^4 \alpha_j^\varepsilon(t).
\end{aligned}$$

Wir schätzen im Folgenden nur den ersten Summanden ab. Die Abschätzungen der übrigen Summanden verlaufen analog. Mit dem Hauptsatz und der Konstruktion der Abbildungen \mathbf{X}_k aus der Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_k^\varepsilon(\mathbf{x}(t)) := \mathbf{v}^\varepsilon(t_k, \mathbf{x}(t)),$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

erhalten wir für $\alpha_1^\varepsilon(t)$ mit $t \in [t_k, t_{k+1}]$ die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^\varepsilon(t) &= \frac{t-t_k}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k - \mathbf{a}_i) - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) \\
&= \frac{t-t_k}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k(\varepsilon, \cdot) - \mathbf{a}_i \circ \mathbf{X}_k(0, \cdot)) - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) \\
&= \frac{t-t_k}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \partial_\tau \mathbf{a}_i(\mathbf{X}_k(\tau, \cdot)) d\tau - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) \\
&= \frac{t-t_k}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \partial_\tau \mathbf{X}_k(\tau, \cdot) \cdot \nabla \mathbf{a}_i(\mathbf{X}_k(\tau, \cdot)) d\tau - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t-t_k}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon(t_k) \circ \mathbf{X}_k(\tau, \cdot) \cdot \nabla \mathbf{a}_i(\mathbf{X}_k(\tau, \cdot)) d\tau - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) \\
&= \frac{t-t_k}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \left([\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) \cdot \nabla \mathbf{a}_i] \circ \mathbf{X}_k(\tau, \cdot) \right) d\tau - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) \\
&= \frac{t-t_k}{2\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \left([\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) \cdot \nabla \mathbf{a}_i] \circ \mathbf{X}_k(\tau, \cdot) - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) d\tau.
\end{aligned}$$

Mit der Umkehrabbildung \mathbf{X}_k^{-1} folgt weiter für jedes $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\begin{aligned}
\alpha_1^\varepsilon(t) &= \frac{t-t_k}{2\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \left([\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) \cdot \nabla \mathbf{a}_i] \circ \mathbf{X}_k(\tau, \cdot) - \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) d\tau \\
&= \frac{t-t_k}{2\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \left(\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}(\tau, \cdot) \right) - \left(\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) d\tau \\
&= \frac{t-t_k}{2\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \left(\left(\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) \cdot \nabla \mathbf{a}_i - \mathbf{v}^\varepsilon(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i + \mathbf{v}^\varepsilon(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}(\tau, \cdot) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \right) - \left(\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}(\tau, \cdot) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}(\tau, \cdot) \right) \right) d\tau \\
&= \frac{t-t_k}{2\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \left([\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t)] \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}(\tau, \cdot) \right) d\tau \\
&+ \frac{t-t_k}{2\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \left([\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)] \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}(\tau, \cdot) \right) d\tau \\
&- \frac{t-t_k}{2\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \left(\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}(\tau, \cdot) \right) d\tau \\
&=: \sum_{j=1}^3 \beta_j^\varepsilon(t).
\end{aligned}$$

Wir schätzen jetzt die Integrale über die Summanden $\beta_1^\varepsilon(t)$, $\beta_2^\varepsilon(t)$ und $\beta_3^\varepsilon(t)$ ab.

$\beta_1^\varepsilon(t)$: Mit der Maßtreue der Abbildung \mathbf{X}_k und den Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Hölder erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left| \beta_1^\varepsilon(t) \right| &= \left| \frac{t-t_k}{2\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \left([\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t)] \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}(\tau, \cdot) \right) d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon} \left| \int_0^\varepsilon \left([\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t)] \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}(\tau, \cdot) \right) d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t)\| \|\nabla \mathbf{a}_i\|_{0,\infty} \|\mathbf{v}(t)\| d\tau
\end{aligned}$$

$$= \|\nabla \mathbf{a}_i\|_{0,\infty} \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t)\| \|\mathbf{v}(t)\|,$$

also gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \beta_1^\varepsilon(t) dt \right| &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \beta_1^\varepsilon(t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\beta_1^\varepsilon(t)| dt \\ &\leq \|\nabla \mathbf{a}_i\|_{0,\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathbf{v}(t)\| \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t)\| dt \\ &\leq c_i \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathbf{v}(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \beta_1^\varepsilon(t) dt \right| &\leq c_i \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathbf{v}(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= c_i \left(\int_0^T \|\mathbf{v}(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq K_1 \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Mit

$$\|a - b\|^2 = (a - b, a - b) = (a - b, a + b - 2b) = \|a\|^2 - \|b\|^2 - 2(a - b, b)$$

gilt für die Differenz $\|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2$ die folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2 &= \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\|^2 - \|\mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2 - 2(\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{v}^\varepsilon(t)) \\ &= \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\|^2 - \|\mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2 \\ &\quad - 2(\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)) \\ &\quad - 2(\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{v}(t)) =: \sum_{i=1}^3 \gamma_i(t). \end{aligned} \tag{7.20}$$

Für $\gamma_1(t) := \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\|^2 - \|\mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2$ erhalten wir aus der Ungleichung (6.26) die Abschätzung

$$|\gamma_1(t)| \leq c_{\nu,\Omega} \int_{t_k}^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau = o(1) \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Also gilt

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\gamma_1(t)| dt = \int_0^T |\gamma_1(t)| dt \leq o(1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (7.21)$$

Für $\gamma_2(t) := -2(\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t))$ folgt

$$\begin{aligned} |\gamma_2(t)| &\leq 2 \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) - \mathbf{v}^\varepsilon(t)\| \|\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)\| \\ &\leq 2 (\|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\| + \|\mathbf{v}^\varepsilon(t)\|) \|\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)\| \\ &\leq K_2 \|\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)\|. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\gamma_2(t)| dt &\leq K_2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)\| dt \\ &= K_2 \int_0^T \|\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)\| dt \\ &\leq K_2 \sqrt{T} \left(\int_0^T \|\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

wegen der starken Konvergenz von \mathbf{v}^ε gegen \mathbf{v} in $L^2(0, T, \mathbf{L}^2(\Omega))$.

Zur Abschätzung der Funktion $\gamma_3(t) := 2(\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}^\varepsilon(t_k), \mathbf{v}(t))$ stellen wir die Differenz $\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}^\varepsilon(t_k)$ mit dem Hauptsatz in Form einer Zeitableitung dar und wenden die Abschätzung (7.13)

$$\left| (\partial_t \mathbf{v}^\varepsilon(t), \mathbf{a}_i) \right| \leq \bar{K}_i$$

an. Dafür wird die Funktion $\mathbf{v} \in L^2(0, T, \mathcal{H}^0(\Omega))$ durch

$$\mathbf{v}^n(t, \mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n c_{in}(t) \mathbf{a}_i(\mathbf{x})$$

mit $c_{in} \in C_0^\infty((0, T))$ und $\mathbf{a}_i \in \mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ approximiert. Zerlegen wir

$$\gamma_3(t) = (\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}^\varepsilon(t_k), \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}^n(t)) + (\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}^\varepsilon(t_k), \mathbf{v}^n(t)) =: \delta_1(t) + \delta_2(t),$$

so lässt sich $\delta_1(t)$ mit der starken Konvergenz von \mathbf{v}^n gegen \mathbf{v} in $L^2(0, T, \mathcal{H}^0(\Omega))$ wie $\gamma_2(t)$ abschätzen. Für $\delta_2(t)$ gilt

$$|\delta_2(t)| = |(\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}^\varepsilon(t_k), \mathbf{v}^n(t))| = \left| \left(\int_{t_k}^t \partial_\tau \mathbf{v}^\varepsilon(\tau), \sum_{i=1}^n c_{in}(t) \mathbf{a}_i \right) \right|$$

$$\leq K_n \sum_{i=1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} |(\partial_\tau \mathbf{v}^\varepsilon(\tau), \mathbf{a}_i)| d\tau \leq \tilde{K}_n \varepsilon.$$

Somit erhält man

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\gamma_3(t)| dt \leq o(1) + \tilde{K}_n T \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Damit konvergieren alle Terme in (7.20) gegen 0 für $\varepsilon \rightarrow 0$, d.h.

$$\left| \int_0^T \beta_1^\varepsilon(t) dt \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

$\beta_2^\varepsilon(t)$: Die Maßtreue der Abbildung \mathbf{X} ergibt für β_2 die Abschätzung

$$|\beta_2(t)| \leq \frac{\|\nabla \mathbf{a}_i\|_{0,\infty}}{2\varepsilon} \int_0^\varepsilon \|\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)\| \|\mathbf{v}(t)\| d\tau \leq K_1 \|\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)\| \|\mathbf{v}(t)\|.$$

Wegen der starken Konvergenz von \mathbf{v}^ε gegen \mathbf{v} in $L^2(0, T, \mathcal{H}^0(\Omega))$ erhält man wie in (7.19)

$$\left| \int_0^T \beta_2^\varepsilon(t) dt \right| \leq K_2 \sqrt{T} \left(\int_0^T \|\mathbf{v}^\varepsilon(t) - \mathbf{v}(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

$\beta_3^\varepsilon(t)$: Mit der Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}(\tau, \cdot) &= \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k(0, \cdot) - \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k(-\tau, \cdot) \\ &= \int_{-\tau}^0 [\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) \cdot \nabla \mathbf{v}(t)] \circ \mathbf{X}_k(\sigma, \cdot) d\sigma \end{aligned}$$

für jedes $t \in [t_k, t_{k+1}]$, der Maßtreue der Abbildungen \mathbf{X}_k und der Hölderschen Ungleichung folgt für den dritten Summanden $\beta_3^\varepsilon(t)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\beta_3^\varepsilon(t)| &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \left| \int_0^\varepsilon (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{X}_k^{-1}(\tau, \cdot)) d\tau \right| \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left| \int_0^\varepsilon (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, \int_{-\tau}^0 [\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) \cdot \nabla \mathbf{v}(t)] \circ \mathbf{X}_k(\sigma, \cdot) d\sigma) d\tau \right| \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left| \int_0^\varepsilon \int_{-\tau}^0 (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{a}_i, [\mathbf{v}^\varepsilon(t_k) \cdot \nabla \mathbf{v}(t)] \circ \mathbf{X}_k(\sigma, \cdot)) d\sigma d\tau \right|. \end{aligned}$$

Mit der Hölderschen Ungleichung und dem Sobolevschen Einbettungssatz folgt hieraus für $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$|\beta_3^\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_{-\tau}^0 \|\mathbf{v}(t)\|_{0,6} \|\nabla \mathbf{a}_i\|_{0,\infty} \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\|_{0,3} \|\nabla \mathbf{v}(t)\| d\sigma d\tau$$

$$= c_\Omega \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{2} \|\nabla \mathbf{v}(t)\|^2 \|\nabla \mathbf{a}_i\|_{0,\infty} \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\|_{0,3},$$

also

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \beta_3^\varepsilon(t) dt \right| &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \beta_3^\varepsilon(t) dt \right| \\ &\leq \varepsilon c_\Omega \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\|_{0,3} \|\nabla \mathbf{v}(t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

Mit der Einbettung (2.6) aus Lemma 2.28 für $n = 3$, $\beta = \frac{1}{2}$, $q = 3$ und $r = \gamma = 2$ gilt die Ungleichung

$$\|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\|_{0,3} \leq C \left(\|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\| \|\nabla \mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\| \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.22)$$

Also folgt

$$\left| \int_0^T \beta_3^\varepsilon(t) dt \right| \leq \varepsilon K_1 \sum_{k=0}^{N-1} \left(\|\mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\| \|\nabla \mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\| \right)^{\frac{1}{2}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\nabla \mathbf{v}(t)\|^2 dt.$$

Mit der Abschätzung (6.26) für die Funktion $\mathbf{v}^\varepsilon(t_k)$ folgt

$$\left| \int_0^T \beta_3^\varepsilon(t) dt \right| \leq \varepsilon K_2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(\|\nabla \mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\| \right)^{\frac{1}{2}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\nabla \mathbf{v}(t)\|^2 dt. \quad (7.23)$$

Aus der Gleichung

$$(\partial_t \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) + \nu(-\Delta \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) = -(Z_\varepsilon \mathbf{v}^n(t), \mathbf{e}_i) + (\mathbf{f}(t), \mathbf{e}_i)$$

für die Galerkinnäherungen erhält man durch Multiplikation mit $\dot{c}_{in}(t)$, Summation von $i = 1, \dots, n$ und Abschätzung der rechten Seite mit den Ungleichungen von Hölder und Young auch für den Grenzwert \mathbf{v}^ε die Ungleichung

$$\|\partial_t \mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2 + \nu \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2 \leq 2 \|Z_\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2 + 2 \|\mathbf{f}(t)\|^2.$$

Integration von 0 bis t_k liefert hier

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\|^2 &\leq \|\nabla \mathbf{v}_0\|^2 + \frac{2}{\nu} \int_0^{t_k} \|Z_\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2 dt + \frac{2}{\nu} \int_0^{t_k} \|\mathbf{f}(t)\|^2 dt \\ &\leq K_3 + \frac{2}{\nu} \int_0^T \|Z_\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon(t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

Nach Definition des Regularisators gilt $\|Z_\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon(t)\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{v}^\varepsilon(t)\|$. Dann erhält man mit der Abschätzung (6.26) die Ungleichung

$$\|\nabla \mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\|^2 \leq K_3 + \frac{K_4}{\varepsilon^2},$$

also

$$\|\nabla \mathbf{v}^\varepsilon(t_k)\|^{1/2} \leq \sqrt[4]{K_3 + \frac{K_4}{\varepsilon^2}} \leq K_5 + \frac{K_6}{\sqrt{\varepsilon}},$$

und aus (7.23) ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \beta_3^\varepsilon(t) dt \right| &\leq K_2 \varepsilon \left(K_5 + \frac{K_6}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \int_0^T \|\nabla \mathbf{v}(t)\|^2 dt \\ &\leq K \sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Somit ist Theorem 7.5 komplett bewiesen.

□

Literatur

- [adr] <http://www.claymath.org/millennium/>.
- [AJ03] R. A. Adams and Fournier J. J. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 2003.
- [Alt06] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis: Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer, 2006.
- [Cat61] L. Cattabriga. Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 31:308–340, 1961.
- [Eva98] L. C. Evans. *Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics*. Oxford University Press, 1998.
- [For09] O. Forster. *Analysis 3: Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen*. Vieweg Teubner Verlag, 2009.
- [Fri08] A. Friedman. *Partial Differential Equations*. Dover Publications, 2008.
- [Hey80] J. G. Heywood. The Navier-Stokes equations: On the existence, regularity and decay of solutions. *Indiana Univ. Math. J.*, 29:639–681, 1980.
- [Hop51] E. Hopf. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. *Math. Nachr.*, pages 213–231, 1951.
- [HS96] F. Hirzebruch and W. Scharlau. *Einführung in die Funktionalanalysis*. Spektrum Akademischer Verlag, 1996.
- [KL57] A. A. Kiselev and O. A. Ladyzhenskaya. On the existence and uniqueness of the solution of the nonstationary problem for a viscous incompressible fluid. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR*, 21:655–680, 1957.
- [Lad65] O. A. Ladyzhenskaya. *Funktionalanalytische Untersuchungen der Navier-Stokesschen Gleichungen*. Akademie-Verlag, 1965.
- [MS64] N. G. Meyers and J. Serrin. $H = W$. *Proc. Nat. Acad. Sci USA*, 51:1055–1056, 1964.
- [Oer04] H. Oertel. *Strömungsmechanik*. Vieweg Verlag, 2004.

- [Rey79] P. Du Bois Reymond. Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung. *Math. Ann.*, 15:283–314, 1879.
- [Shi73] M. Shinbrot. *Lectures on fluid mechanics*. Gordon and Breach, 1973.
- [Soh01] H. Sohr. *The Navier-Stokes equations: An elementary functional analytic approach*. Birkhäuser Verlag, 2001.
- [Tem95] R. Temam. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*. SIAM, 1995.
- [Tem01] R. Temam. *Navier-Stokes equations*. AMS Bookstore, 2001.
- [Var07] W. Varnhorn. The Navier-Stokes equations with particle methods. In P. Kaplicky and S. Necasova, editors, *Topics on partial differential equations*, pages 121–157. MATFYZPRESS Publishing House of the Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague, 2007.
- [Wal00] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung*. Springer, Berlin, 2000.
- [Wer07] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2007.
- [Wit06] A. Witkowski. On Young’s Inequality. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 7, 2006.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel genutzt habe. Alle wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen habe ich als solche gekennzeichnet.

Ich versichere außerdem, dass ich die vorliegende Dissertation nur in diesem und keinem anderen Promotionsverfahren eingereicht habe und, dass diesem Promotionsverfahren keine endgültig gescheiterten Promotionsverfahren vorausgegangen sind.

Kassel, den 16. Dezember 2010

Nazgul Asanalieva