



**Institut  
für  
Mechanik**

Berichte des Instituts für Mechanik (Bericht 1/2012)

Idirisou Danladi

## Lokalisierungsanalyse des Rissbeginns anhand eines orthotropen Schädigungsmodells

# Berichte des Instituts für Mechanik

Bericht 1/2012



Idirisou Danladi

Lokalisierungsanalyse des Rissbeginns  
anhand eines orthotropen Schädigungsmodells

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Maschinenbau der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. A. Matzenmiller

Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. B. Schweizer

Tag der Einreichung:

29. Oktober 2010

Tag der mündlichen Prüfung:

3. Juni 2011

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2011

ISBN 978-3-89958-580-3

© 2012, kassel university press GmbH, Kassel  
[www.uni-kassel.de/upress](http://www.uni-kassel.de/upress)

Printed in Germany

## Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner viereinhalbjährigen Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Universität Kassel.

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Matzenmiller für die Anregung zu dieser Arbeit, die fachliche Betreuung und die Übernahme des Hauptreferats.

Herrn Prof. Dr.-Ing. B. Schweizer danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferats. Bei Frau Prof. Dr. R. Jeltsch-Fricker bedanke ich mich sowohl für ihre Mitwirkung in der Prüfungskommission als auch für ihre Unterstützung bei der Erstellung der Druckfassung.

Herrn Dr.-Ing. H. Sommer gilt mein Dank für die Bereitschaft zu ausführlichen wissenschaftlichen Gesprächen und die kontinuierliche Betreuung sowie zahlreichen Anmerkungen und Kommentaren. Durch seine persönliche Kompetenz schuf er ein fruchtbares und freundliches Arbeitsklima, das sehr förderlich für meine wissenschaftliche Arbeit war.

Weiterhin danke ich allen Mitgliedern des Instituts für das gute Arbeitsklima, ihre freundschaftliche Unterstützung und Gesprächsbereitschaft.

Abschließend danke ich meinen Eltern und Geschwistern, allen Freunden und Bekannten recht herzlich für ihre Gebete und Unterstützung, die mir während der Promotionszeit viel Kraft gegeben haben.

Kassel, im April 2012

Idirisou Danladi

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt und andere als die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Kein Teil dieser Arbeit ist in einem anderen Promotions- oder Habilitationsverfahren verwendet worden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Motivation . . . . .	3
1.2	Zielsetzung . . . . .	4
1.3	Gliederung . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Kontinuumsmechanik</b>	<b>7</b>
2.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	7
2.1.1	Rechenregeln für Vektoren und Tensoren . . . . .	7
2.1.2	Tensoranalysis . . . . .	9
2.1.3	Divergenztheorem . . . . .	10
2.2	Kinematik . . . . .	11
2.3	Spannungsmaße . . . . .	16
2.4	Bilanzgleichungen . . . . .	18
2.4.1	Massenbilanz . . . . .	18
2.4.2	Impulsbilanz . . . . .	19
2.4.3	Drehimpulsbilanz . . . . .	20
2.5	Konstitutive Modellierung der linearen Elastizität . . . . .	21
2.5.1	Allgemeines lineares Elastizitätsmodell . . . . .	21
2.5.2	Symmetriebeziehungen für den Elastizitätstensor . . . . .	23
2.6	Anfangsrandwertaufgabe der Mechanik . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Ebenes Schädigungsmodell für unidirektional verstärkte langfaserige Verbundwerkstoffe</b>	<b>29</b>
3.1	Elastizität und Schädigung . . . . .	29
3.1.1	Orthotrop elastisches Materialverhalten im ebenen Spannungszustand . . . . .	29
3.1.2	Schädigung des elastischen Verhaltens . . . . .	30
3.2	Modellannahmen . . . . .	31
3.2.1	Schädigung in Faserrichtung . . . . .	32
3.2.2	Schädigung in Querrichtung . . . . .	33
3.2.3	Scherschadensverlauf . . . . .	33
3.3	Annahmen für das Querdehnverhalten . . . . .	34
3.3.1	Modellvorstellung für das Querdehnverhalten . . . . .	35
3.3.2	Große Querkontraktionszahl . . . . .	36
3.3.3	Kleine Querkontraktionszahl . . . . .	37
3.3.4	Resümee zum Schädigungseinfluß auf das Querdehnverhalten . . . . .	38
3.4	Darstellung der Nachgiebigkeiten des Faserverbundwerkstoffs . . . . .	38

<b>4</b>	<b>Materialgleichung für Verbundwerkstoffe mit Schädigung</b>	<b>41</b>
4.1	Orthotrope ebene Materialsteifigkeit des geschädigten Laminats . . . . .	41
4.2	Herleitung der ratenabhängigen Materialgleichung . . . . .	42
4.2.1	Bestimmung des instantanen Materialsteifigkeitstensors . . . . .	43
4.2.2	Komponenten des instantanen Materialsteifigkeitstensors . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Methoden zur Brucherkenung</b>	<b>53</b>
5.1	Werkstoffversagen . . . . .	53
5.2	Grundsätzliche Überlegungen zu Schädigungskriterien . . . . .	54
5.3	Versagenskriterien . . . . .	55
5.4	Maximalspannungskriterium . . . . .	56
5.4.1	Beschreibung der Bruchgrenzfläche im Dehnungsraum . . . . .	58
5.4.2	Die Spannungs-Dehnungs-Fläche $T_{12}(\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max}, \varepsilon_{12 \max})$ . . . . .	63
5.4.3	Fazit aus der Analyse des Maximalspannungskriteriums . . . . .	66
5.5	Änderung des Wachstumsverhaltens . . . . .	66
5.6	Bifurkationsanalyse . . . . .	67
5.6.1	Darstellung der Differenzfunktion $\Delta v$ . . . . .	68
5.6.2	Herleitung des Rissbildungskriteriums . . . . .	70
5.6.3	Lokalisierungstensor als Funktion der Winkelkoordinate . . . . .	71
5.6.4	Interpretation der Anzahl von reellen Nullstellen der Singularitätsbedingung . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Rissbildung</b>	<b>75</b>
6.1	Rissbildung und Berechnung des Rissrands . . . . .	75
6.1.1	Der Fall einer eindeutigen Kennzeichnung des Rissrands . . . . .	75
6.1.2	Der Fall einer mehrdeutigen Kennzeichnung des Rissrands . . . . .	77
6.1.3	Untersuchung der Randkurven . . . . .	78
6.2	Rissbildung als PITCHFORK-Bifurkation . . . . .	82
6.2.1	Bifurkationstheorie . . . . .	82
6.2.2	Rissbildungsphänomene als Beispiel einer PITCHFORK-Bifurkation . . . . .	83
6.2.3	Symmetriebrechung . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Anwendungsfälle</b>	<b>87</b>
7.1	Einaxialer Zug . . . . .	89
7.1.1	Fall 1a: Einaxialer Zug ohne Querbehinderung (RB-a) . . . . .	90
7.1.2	Fall 1b: Einaxialer Zug mit Querbehinderung (RB-b) . . . . .	93
7.2	Schub . . . . .	96
7.2.1	Fall 2a: Einfacher Schub . . . . .	96
7.2.2	Fall 2b: Homogener Schub . . . . .	99
7.3	Biaxialer Zug . . . . .	102
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>105</b>
<b>A</b>	<b>Erläuterung und Argumentation zur Rissnormalen</b>	<b>107</b>
<b>B</b>	<b>Zeichenerklärung</b>	<b>111</b>

# Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Lokalisierungsanalyse des Rissbeginns von spröden Faserverbundwerkstoffen, wie sie beispielweise durch Glas- oder Kohlefaser verstärkter Epoxidharze gegeben sind. Faserverbundmaterialien bestehen aus einer Matrix, die durch Fasern verstärkt ist. Verbundmaterialien sind also durch das Zusammenwirken von zwei individuellen Werkstoffen gekennzeichnet. Das Verhalten des homogenisierten spröden Materials wird von der Degradation der elastischen Steifigkeiten geprägt. Das Versagen zeigt sich auf Strukturebene häufig in der Entwicklung von Zonen, in denen Deformationen lokalisieren - d.h. die Dehnungen wachsen örtlich vergleichsweise stark an gegenüber benachbarten Bereichen - und sich dann Risse bilden.

Das Verhalten der untersuchten Werkstoffe wird mittels eines kontinuumsmechanischen Modells beschrieben, wobei die Schadensvariablen als Elastizitätskennwerte definiert sind. Mit diesem Modell kann eine zuverlässige Prognose des Materialverhaltens bis zum Zustand des Versagens getroffen werden.

Bei der Rissbildung tritt das Problem auf, dass die Schädigungsenergie als Volumenenergie auftritt; die Bruchenergie, die der Energieaufnahme durch Rissbildung entspricht, dagegen flächenabhängig ist. Der Übergang der räumlichen Schädigung zum flächigen Bruch erfordert daher erstens die Umsetzung einer räumlich definierten Größe in eine Flächengröße und hängt zweitens vom Verlauf der Bruchfläche im geschädigten Volumen ab. Somit wäre die Kenntnis des Bruchverlaufs erforderlich, um den Übergang von der Schädigungsmechanik zur Bruchmechanik "folgerichtig" darzustellen. In der vorliegenden Arbeit werden zunächst Methoden zur Brucherkenkung untersucht, die nicht nur den Bruch anzeigen, sondern auch Zusatzinformationen über die Rissbildung bieten. Die Untersuchung hat die Bifurkationsanalyse als geeignetste Methode ergeben. Mit der Bifurkationsanalyse kann die Rissbildung beschrieben werden und darüberhinaus wird auch die Richtung erkannt, in die sich ein Riss entwickelt. Dazu wird eine Stabilitätsbedingung für das zunächst ungeschädigte Material im Form eines quartischen Polynoms hergeleitet. Das Entstehen reeller Nullstellen dieses Polynoms zeigt die Existenz von Rissen, deren Werte der Richtung der Rissnormalen entsprechen. Das abgeleitete Kriterium ergibt zwei Kategorien von Nullstellen:

1. Das Polynom hat nur **eine reelle Nullstelle** und daraus folgt, dass der Bruch in einer festgelegten Richtung erfolgt.
2. Das Polynom hat **mehr als eine reelle Nullstelle**. Es folgt dann, dass die Bruchrichtung unbestimmt ist, weil es mehrere mögliche Rissrichtungen gibt. Die Rissbildung kann jede der ermittelte Richtungen annehmen und somit entsteht eine Symmetriebrechung, die durch die PITCHFORKSche Bifurkation zu beschreiben ist.

Das Ergebnis der vorliegenden Untersuchungen ist bezüglich eines Gleichungssystems, das mit den Methoden der klassischen Kontinuumsmechanik beschrieben ist, sehr unerwartet, da mit dem Auftreten einer PITCHFORKSchen Bifurkation das Determinismusprinzip der linearen klassischen Mechanik verletzt wird.

Um das in dieser Arbeit erreichte Ergebnis auf seine Praxistauglichkeit hin zu überprüfen, werden einfache Teststrukturen unter Zug und Schub berechnet und die dabei entstandenen Resultate in der abgeleiteten Theorie interpretiert und diskutiert.

# Kapitel 1

## Einleitung

Die zulässige Beurteilung stark beanspruchter Bauteile erfordert eine mechanische Analyse, die eine Beschreibung der Schädigungs- und Versagensmechanismen des Materials beinhaltet. Die mathematische Darstellung des Materialverhaltens wird anhand von Modellen beschrieben, die den Versagensprozess phänomenologisch abbilden. Die kontinuumsmechanische Materialbeschreibung hat sich für das Materialverhalten in den postkritischen Bereich als unzureichend erwiesen. Um das Problem zu beheben, wird das Modell um Kriterien erweitert, die die Rissinitiierung kennzeichnen. Diese Erweiterung ermöglicht somit die korrekte Erfassung der Materialdegradation in den Versagensbereich [5, 6, 7, 9, 43, 44]. Eine Vielzahl von Brucherkennungsmethoden wurde vorgeschlagen, um kontinuumsmechanische Modelle zu erweitern und die Rissbildung zu beschreiben [12, 47, 48, 49].

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ein Schädigungsmodell auf Basis der Degradation der elastischen Kennwerte für die Beschreibung des Materialversagens vorgestellt [35, 42]. Die Anwendung geeigneter Brucherkennungsmethoden, die sowohl den Riss als auch die Rissrichtung liefern, ermöglicht die Beschreibung der Initiierung und der Ausbreitung des Risses [50, 51, 52].

### 1.1 Motivation

Aufgrund der ausgezeichneten Eigenschaften von Faserverbundwerkstoffen, wie zum Beispiel deren hohe Festigkeit und hohe Energieabsorptionsfähigkeit in Crashelementen bei Überbelastung, hat deren Nutzung in der Industrie stark zugenommen. Der Anwendungsbereich beschränkt sich nicht nur auf die Luft- und Raumfahrt, sondern er erweitert sich auch auf die Konsumgüter- und die Sportgeräteindustrie. Daher ist die Verhaltensvorhersagbarkeit derartiger Werkstoffe Gegenstand aktiver Forschungstätigkeit [21, 22].

Das Bruchverhalten von Faserverbundwerkstoffen ist durch die Ausbildung einer Prozesszone geprägt, in der es zu einer Konzentration von Dehnungen kommt. Die Beschreibung dieses Phänomens wird in einem Schädigungsmodell erfasst, in dem die Schwächung der inneren Struktur des Materials durch die Degradation der Materialeigenschaften (Elastizitäts- und Schubmoduli) abgebildet wird. Basisgrößen dieses Modells sind die Elastizitätsmoduli und der effektive Schubmodul, der von einer vordefinierten

Vergleichsdehnung abhängt. Diese Vergleichsdehnung lässt sich mit Hilfe von einfacher und homogener Schubbeanspruchung bestimmen.

Das Versagen von Faserverbundstrukturen ist durch vielfältige Versagensvorgänge gekennzeichnet, wobei das Auftreten eines Risses noch nicht zum sofortigen Ausfall der Struktur führen muss [34]. Die Rissinitiierung und die Rissausbreitung lassen sich getrennt formulieren, damit der Versagenshergang realitätstreu abgebildet wird.

Zur Bruchinitiierung sind in der Literatur zahlreiche Versagensindikatoren vorgeschlagen worden. Diese Indikatoren markieren zuerst den Beginn des Bruchvorgangs und dann können sie über die Rissbildung Zusatzinformationen liefern. Da der Ort des Rissauftritts bekannt ist, kann die Bruchmechanik angewendet werden. Die Kenntnis des Bruchverlaufs bildet den Übergang von der Schädigungsmechanik zur Bruchmechanik.

## 1.2 Zielsetzung

Zielsetzung dieser Arbeit ist es, zur Beschreibung des Schädigungs- und Bruchverhaltens von Faserverbundstrukturen beizutragen. Dabei wird der Bruch in zwei Schritten beschrieben: die Rissinitiierung und die Rissausbreitung.

Im Rahmen der Aufgabenstellung werden zwei wesentliche Schwerpunkte behandelt, die erforderlich sind, um die wirklichkeitsnahe Beschreibung des Materialverhaltens bis in den Versagensbereich hinein zu ermöglichen.

- Der erste Schwerpunkt der Arbeit befasst sich mit der Vorstellung des Modells des geschädigten Materials und diskutiert einige Versagensindikatoren. Diese Indikatoren können eventuell auch Zusatzinformationen über die Rissbildung liefern. Die Versagensindikatoren sind nicht aus der Modellbeschreibung für das ungeschädigte Material herleitbar, sondern sie enthalten eine Zusatzinformation, die mit empirischen Daten verifiziert werden muss. Die Versagensindikatoren sind Kriterien, die das Ende des Gültigkeitsbereichs der Materialbeschreibung für das ungeschädigte Material anzeigen. Als solche Kriterien kommen daher vor allem "kritische Punkte" oder Singularitätskriterien der Materialbeschreibung für den ungeschädigten Werkstoff in Frage. Welche "kritischen Punkte" das tatsächliche Versagen einleiten, muss im Experiment überprüft werden. In der vorliegenden Arbeit werden mehrere mögliche Kriterien untersucht. Es wird der Nachweis erbracht, dass für das untersuchte Material die Bifurkationspunkte der Materialbeschreibungsgleichung das Ende von deren Gültigkeitsbereich anzeigen. Die Bifurkationsanalyse hat sich somit als geeignete Methode zur Definition eines Versagensindikators erwiesen und sie wird im Weiteren verwendet.
- Der zweite Schwerpunkt beschäftigt sich ausschließlich mit der Bifurkationsanalyse und den Folgerungen, die aus dieser für das Materialverhalten gezogen werden können. Aus der Bifurkationsanalyse erhalten wir ein Versagenskriterium das mathematisch durch ein quartisches Polynom darstellbar ist, dessen reelle Nullstellen die Rissnormalen beschreiben. Diese Methode liefert also nicht nur den Rissbeginn,

sondern auch dessen Ausbreitungsrichtung. Es werden einige Anwendungsfälle erörtert und die daraus entstehenden Ergebnisse ausführlich diskutiert.

Ein weiterer Aspekt dieser Arbeit ist das Prinzip des Determinismus. Das angewendete Materialmodell erzeugt im einaxialen oder biaxialen Zug beim Versagen eine Symmetriebrechung und verletzt somit das Determinismusprinzip der klassischen Mechanik. Diese Situation wird durch die PITCHFORK-Bifurkation beschrieben, die einer der wichtigsten Hilfsmittel der Chaostheorie ist.

Zur numerischen Auswertung der dargelegten Ergebnisse müsste zusätzlich im Materialmodell die Abhängigkeit zwischen der aus dem Modell bestimmbaren Schädigungsvariablen und der Risswachstumsgeschwindigkeit als empirischer Ansatz eingeführt werden. Dieser Ansatz müsste aber von der chemischen Stoffbeschaffenheit abhängen und ist damit in einem rein kontinuumsmechanischen Ansatz noch nicht enthalten.

### 1.3 Gliederung

Die vorliegende Arbeit kann grob in zwei Teile gegliedert werden. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Beschreibung eines Schädigungsmodells zur Analyse des Versagens geschädigter Faserverbundstrukturen. Im zweiten Teil wird die Rissinitiation und die Rissausbreitung anhand der Brucherkennungsmethoden beschrieben. Die Arbeit besteht aus sieben Kapiteln, deren Inhalt im Folgenden kurz erläutert wird.

In *Kapitel 2* werden zunächst die notwendigen mathematischen Grundlagen, dann die kinematische Beschreibung von Deformationen und die Erläuterung des Spannungsbegriffs vorgestellt. Nachdem universelle physikalische Aussagen für Kontinua als Bilanzprinzipien angegeben wurden, wird die konstitutive Modellierung von unidirektional verstärkten Faserverbunden mit Hilfe der anisotropen linearen Elastizitätstheorie angegangen.

Das *Kapitel 3* stellt die Beschreibung eines geschädigten Faserverbundwerkstoffs bereit. Dabei werden Modellannahmen und physikalische Voraussetzungen vorgestellt. Dazu gehören die mathematische Darstellung der Nachgiebigkeiten und der Querkontraktionszahlen in Abhängigkeit des Schädigungszustands.

In *Kapitel 4* werden die Materialgleichungen und deren zeitliche Ableitung hergeleitet. Hier wird auch das Anfangsrandwertproblem aufgestellt, das aus der kontinuumsmechanischen Betrachtung folgt.

Das *Kapitel 5* befasst sich mit den Brucherkennungsmethoden und der Suche nach der geeignetesten Vorgehensweise. Die Bifurkationsanalyse wird sich dabei als am besten erweisen.

In *Kapitel 6* wird die Rissbildung anhand der Bifurkationsanalyse untersucht. Die Symmetriebrechung und die PITCHFORK-Bifurkation werden dabei erläutert. Danach wird in *Kapitel 7* die Bifurkationsbedingung an einfachen Beanspruchungsbeispielen angewendet und die daraus entstehenden Ergebnisse ausführlich diskutiert.

Eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf mögliche offengebliebene Punkte folgen schließlich in *Kapitel 8* und schließen somit diese Arbeit ab.

# Kapitel 2

## Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In diesem Kapitel werden die wesentliche Grundlagen der Kontinuumsmechanik vorgestellt. Zunächst wird nach der Vorstellung der mathematischen Grundlagen die geometrische Beschreibung der Bewegung und der Deformation von Körpern vorgenommen. Dann wird mit Hilfe der Spannungsmaße der Zusammenhang zwischen äußeren Kräften und der Spannungsantwort dargestellt. Danach werden die Bilanzgleichungen für die Masse, den Impuls und den Drehimpuls aufgestellt. Anschließend werden die materialabhängigen Eigenschaften von Körpern durch spezifische Modellannahmen beschrieben. Dadurch ergeben sich die konstitutiven Gleichungen [3, 4]. Ausführliche Darstellungen der kontinuumsmechanischen Grundlagen sind in den klassischen Werken [8, 26, 41] zu finden.

### 2.1 Mathematische Grundlagen

Die wesentlichen mathematischen Grundlagen werden zusammengefaßt und die verwendete Notation zum besseren Verständnis des Kapitels kurz erläutert.

#### 2.1.1 Rechenregeln für Vektoren und Tensoren

##### Vektoren

Die mathematische Grundlage für die Beschreibung der Bewegung eines materiellen Körpers im dreidimensionalen Raum ist der euklidische Vektorraum. Für zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 b^i \mathbf{e}_i \quad (2.1)$$

im kartesischen Koordinatensystem  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  wird das Skalarprodukt wie folgt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a^i b^i = a^i b^i \quad (2.2)$$

berechnet. Wir lassen das Summationszeichen weg und verwenden die *Indexschreibweise* eines Vektors. Diese Schreibweise heißt *Einsteinsche Summationsregel*. Es wird dabei über doppelt auftretende Indizes summiert.

Die euklidische Norm eines Vektors ergibt sich mit dem Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a^1 a^1 + a^2 a^2 + a^3 a^3}. \quad (2.3)$$

## Vektorprodukt

Das vektorielle Produkt  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  (auch äußeres Produkt genannt) der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  erzeugt einen Vektor  $\mathbf{c}$ , der senkrecht auf den Ausgangsvektoren steht, und so gerichtet ist, dass die Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ein Rechtssystem bilden.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{bmatrix} = \mathbf{c}. \quad (2.4)$$

## Dyadisches Produkt

Das dyadische Produkt  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  zweier Vektoren erzeugt eine Matrix  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} [b^1 \quad b^2 \quad b^3] = \begin{bmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}. \quad (2.5)$$

Das dyadische Produkt besitzt die Eigenschaften:

1.  $\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}_2$  und  $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}$
2.  $\alpha(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes (\alpha \mathbf{b})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$
3.  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}_1) \mathbf{b}_2 = (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2) \mathbf{a}$
4.  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2)(\mathbf{a} \otimes \mathbf{c})$ .

## Tensoren

*Tensoren zweiter Stufe* sind lineare Abbildungen eines Vektorraumes in einen anderen Vektorraum, also:  $\mathbf{c} = \mathbf{T} \mathbf{u}$ . Da die Tensoren auf den Vektoren aufbauen, lassen sich ihre Rechenregeln auf Rechenregel für Vektoren zurückführen.

Für Tensoren zweiter Stufe  $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  werden definiert:

## Spur

Die Spur (auch englisch "trace" genannt) eines Tensors im kartesischen Basissystem ist durch

$$\text{tr } \mathbf{T} = \text{tr} [T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j] = T^{ii} \quad (2.6)$$

definiert. Die Spur ist also die Summe der Diagonalelemente.

## Tensorprodukt

Für zwei Tensoren  $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  und  $\mathbf{U} = U^{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$  ergibt sich das Tensorprodukt wie folgt:

$$\mathbf{TU} = T^{ij} U^{kl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = T^{ij} U^{kl} \delta_j^k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l = V^{il} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l. \quad (2.7)$$

Im Allgemeinen gilt das Kommutativgesetz nicht, d.h.  $\mathbf{TU} \neq \mathbf{UT}$ .

## Skalarprodukt

Das Skalarprodukt für Tensoren ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = \text{tr} [\mathbf{TU}^T] = \alpha. \quad (2.8)$$

## Dyadisches Produkt

Das dyadische Produkt zwischen Tensoren zweiter Stufe  $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  und  $\mathbf{U} = U^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  führt zu Tensoren vierter Stufe  $\overset{4}{\mathbf{V}}$ :

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{U} = T^{ij} U^{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = V^{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \overset{4}{\mathbf{V}}. \quad (2.9)$$

Für die lineare Abbildung des Tensors zweiter Stufe  $\mathbf{T}$  in den Tensor zweiter Stufe  $\mathbf{U}$  durch den Tensor vierter Stufe  $\overset{4}{\mathbf{C}}$  wird geschrieben<sup>1</sup>:

$$\mathbf{U} = \overset{4}{\mathbf{C}} [\mathbf{T}]. \quad (2.10)$$

Ein Tensor vierter Stufe besitzt im dreidimensionalen Fall  $3^4 = 81$  Koeffizienten mit

$$\overset{4}{\mathbf{C}} = C^{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

als Komponentendarstellung.

### 2.1.2 Tensoranalysis

Entsprechend der Anzahl der prinzipiell notwendigen Basissysteme, die die Stufe des Tensors angibt, kann man die Einteilung der Tensoren vornehmen. Im dreidimensionalen Raum besitzt ein Tensor der Stufe  $n$  also  $3^n$  Komponenten.

## Einteilung

- Ein Tensor 0. Stufe hat kein Basissystem und  $3^0 = 1$  Komponente wie zum Beispiel die Temperatur.
- Ein Tensor 1. Stufe hat ein Basissystem und  $3^1 = 3$  Komponenten wie zum Beispiel der Kraftvektor.

---

<sup>1</sup>Für die Anwendung eines vierstufigen Tensors auf einen zweistufigen Tensor im Sinne eines doppelten Skalarprodukts wird in dieser Arbeit die Schreibweise aus [26] gewählt.

- Ein Tensor 2. Stufe hat zwei Basissysteme und  $3^2 = 9$  Komponenten wie zum Beispiel der Spannungstensor.
- Ein Tensor n. Stufe hat n Basissysteme und  $3^n$  Komponenten wie zum Beispiel der Elastizitätstensor mit  $n = 4$  und 81 Komponenten.

## Gradient

Der Gradient eines Skalarfeldes  $\phi(\mathbf{x})$  ist ein Zeilenvektor und ist in kartesischen Koordinaten durch

$$\text{grad } \phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \quad (2.11)$$

gegeben. Der Gradient eines Vektorfeldes berechnet sich durch

$$\text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

## Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist die Spur des Gradienten:

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \text{tr} [\text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x})] = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}. \quad (2.13)$$

Die Divergenz eines Tensorfeldes ergibt sich zu:

$$\text{div } \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_k} \mathbf{e}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} [T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j] \mathbf{e}_k = \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T^{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T^{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T^{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T^{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T^{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T^{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T^{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

### 2.1.3 Divergenztheorem

Der GAUSSsche Integralsatz ermöglicht die Überführung eines Volumenintegrals in ein Flächenintegral:

$$\int_V \text{div } \mathbf{T} \, dV = \int_A \mathbf{T} \mathbf{n} \, da \quad (2.15)$$

mit  $A$  als der Oberfläche des Volumens  $V$  und  $\mathbf{n}$  als dem Normalenvektor des Flächenelements  $da$ .

## 2.2 Kinematik

### Konfigurationen

Hier unterscheidet man zwischen Materialpunkt und Raumpunkt. Der Materialpunkt bezeichnet einen Massenpunkt oder ein Teilchen des Körpers und der Raumpunkt bezeichnet einen festen Punkt im Raum.

Die Konfiguration zum Zeitpunkt  $t = t_0$  ist die Ausgangskonfiguration und zum Zeitpunkt  $t > t_0$  besteht die Momentankonfiguration.

$\{e_1, e_2, e_3\}$  ist ein kartesisches Bezugssystem.

$G_1, G_2$  und  $G_3$  sind die Basisvektoren im unverformten Ausgangszustand und  $g_1, g_2$  und  $g_3$  sind die verformten Basisvektoren.

$\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$  ist ein krummliniges Koordinatensystem zur Beschreibung der Ausgangs- und Momentankonfiguration.

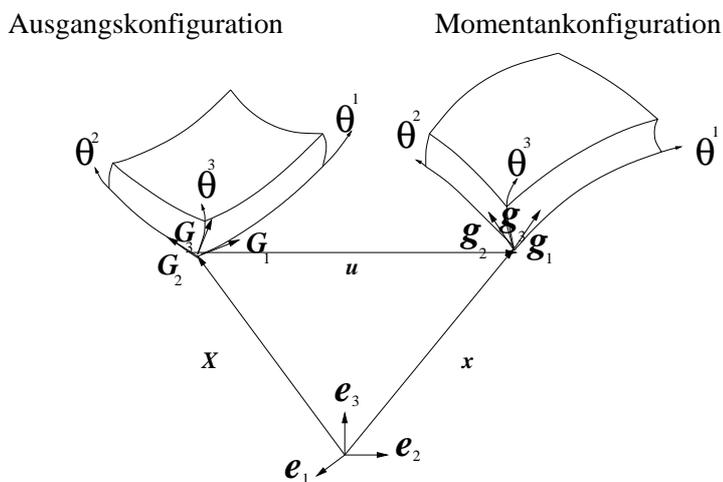


Abb. 2.1: Ausgangs- und Momentankonfiguration

Der Bewegungsverlauf eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$ , der als Teilgebiet des Euklidischen Raums  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  dargestellt wird, ist durch eine Funktion  $\varphi$  gegeben. Diese Funktion weist jedem materiellen Punkt  $P$  des Körpers seine aktuelle Position  $\mathbf{x}$  zum Zeitpunkt  $t > t_0$  zu. Im Rahmen einer LAGRANGESchen Beschreibung der Bewegung ist die aktuelle Lage des Punkts  $P$  durch seinen Ortsvektor  $\mathbf{X}$  in einer zeitlich konstanten Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt  $t = t_0$  und durch die Funktion  $\varphi$  bestimmt:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad \text{mit} \quad \varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (2.16)$$

Während also bei der EULERSchen Beschreibung die aktuelle Lage des Punkts  $P$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}$  ohne Betrachtung der Referenzkonfiguration in  $t = t_0$  erfolgt, wird bei der LAGRANGESchen Beschreibung ein materieller Punkt  $P$  bezüglich des Ortsvektors  $\mathbf{X}$  dargestellt. Aus der Gl. (2.16) ist zu erkennen, dass sich die Funktion  $\varphi$  aus der Addition des Ortsvektors  $\mathbf{X}$  mit einem relativen Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  ergibt. Wenn die Funktion  $\varphi$  bekannt ist, können sowohl der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  als auch der Verschiebungsgradient  $\mathbf{H}$  ermittelt werden.

## Koordinatensysteme und Basisvektoren

Die Lage eines Körpers läßt sich durch die konvektiven krummlinigen Koordinaten  $\theta^i$  beschreiben. Das Koordinatensystem  $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$  beschreibt die Ausgangs- und die Momentankonfiguration. In jedem Punkt des Körpers, der einem Ortsvektor

$$\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i = \theta^i \mathbf{G}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = \theta^i \mathbf{g}_i \quad (2.17)$$

zugeordnet wird, können die kovarianten Basisvektoren als tangentielle Vektoren im konvektiven Koordinatensystem der Ausgangs- und Momentankonfiguration mittels

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i}$$

bestimmt werden, während die kontravarianten Basisvektoren mit

$$\mathbf{G}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}}$$

dargestellt werden. Die Tangenten- und Gradientenvektoren sind dual zueinander und somit gelten die Beziehungen

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$$

mit  $\delta_i^j$  als KRONECKER-Symbol.

## Metriktensoren

Die Metrikkoeffizienten werden als Skalarprodukt der krummlinigen Basisvektoren definiert:

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \quad G^{ij} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j \quad \text{bzw.} \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j .$$

Daraus folgen die Metriktensoren in der Ausgangs- und der Momentankonfiguration zu:

$$\mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad \mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j . \quad (2.18)$$

## Deformationsgradient

Ein materielles infinitesimales Linienelement  $d\mathbf{x}$  der Momentankonfiguration läßt sich für den Gradienten der materiellen Koordinaten wie folgt darstellen:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \text{GRAD } \mathbf{x} d\mathbf{X} . \quad (2.19)$$

Somit wird der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} := \text{GRAD } \mathbf{x} \quad (2.20)$$

als lineare Abbildung des Differential  $d\mathbf{X}$  auf das Differential  $d\mathbf{x}$  definiert. Der Deformationsgradient ist ein Zweifeldtensor und wird in einem kartesischen Koordinatensystem zu

$$\mathbf{F} = \text{GRAD } \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^j} \otimes \frac{\partial X^j}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial x^i}{\partial X^j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j ; \quad \mathbf{x} = \tilde{x}^i(X^j) \mathbf{e}_i \quad (2.21)$$

berechnet, während in einem konvektiven Koordinatensystem

$$\mathbf{F} = \text{GRAD } \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \otimes \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad \text{mit } \mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta^i) \quad (2.22)$$

geschrieben wird. Damit lassen sich die kovarianten Basisvektoren der Ausgangskonfiguration in die der Momentankonfiguration abbilden:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \mathbf{G}_i . \quad (2.23)$$

Daher ergibt sich der Deformationsgradient in konvektiven Koordinaten zu:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{G}^k . \quad (2.24)$$

Der Deformationsgradient kann bezüglich der kovarianten und kontravarianten Basisvektoren wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i . \quad (2.25)$$

Die Umkehrabbildung des Deformationsgradienten ist durch den inversen Tensor  $\mathbf{F}^{-1}$  nur möglich, wenn die JAKOBI-Determinante des Deformationsgradienten  $J$  ungleich null ist. Eine Durchdringung des materiellen Körpers ist physikalisch nicht möglich, d.h.  $J$  kann nur positive Werte annehmen.

$$J := \det \mathbf{F} > 0$$

Die Transformation von infinitesimalen Flächen- bzw. Volumenelementen kann durch den Deformationsgradienten wie folgt beschrieben werden.

$$d\mathbf{a} = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} \quad (2.26)$$

$$dv = J dV . \quad (2.27)$$

## Zeitliche Änderung kinematischer Größen

Mit Hilfe des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \text{grad } \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.28)$$

werden die zeitlichen Änderungen  $(\dot{\phantom{x}}) = \frac{d(\phantom{x})}{dt}$  der wichtigsten kinematischen Größen angegeben:

$$(\mathbf{dx})' = \mathbf{L} d\mathbf{x} , \quad (2.29)$$

$$(\mathbf{da})' = \left( (\text{div } \dot{\mathbf{x}}) \mathbf{1} - \mathbf{L}^T \right) d\mathbf{a} , \quad (2.30)$$

$$(dv)' = (\text{div } \dot{\mathbf{x}}) dv , \quad (2.31)$$

$$(\det \mathbf{F})' = (\text{div } \dot{\mathbf{x}}) \det \mathbf{F} . \quad (2.32)$$

Es handelt sich dabei um die Änderungsgeschwindigkeiten von materiellen Linien-, Flächen- und Volumenelementen sowie um die Zeitableitung der JAKOBI-Determinanten.

## Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

Die Deformation eines Körper setzt sich zusammen aus der Starrkörpertranslation, der Starrkörperrotation und der eigentlichen Deformation. Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$ , der nicht singular ist, läßt sich wie jeder nicht singuläre Tensor zweiter Stufe eindeutig in die Form

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (2.33)$$

zerlegen mit  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  als Streck-Tensoren<sup>2</sup> und  $\mathbf{R}$  als Drehtensor. Dabei ist  $\mathbf{R}$  orthogonal,  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  sind symmetrisch und positiv definit.  $\mathbf{U}$  wird als materieller Rechts-Streck-Tensor bezeichnet und  $\mathbf{V}$  als räumlicher Links-Streck-Tensor [23, 46]. Die Tensoren lassen sich wie folgt bestimmen:

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} = \sqrt{\mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U}} = \sqrt{\mathbf{U} \mathbf{U}}, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \mathbf{F}^T} = \sqrt{\mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{V}^T} = \sqrt{\mathbf{V} \mathbf{V}}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{F}. \quad (2.36)$$

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  kann wegen der darin enthaltenen Starrkörperrotation kein sinnvolles Maß der Verzerrung eines Körpers darstellen. Durch die Eliminierung des Rotationstensors bilden sich  $\mathbf{C}_R$  als der rechte und  $\mathbf{C}_L$  als der linke CAUCHY-GREEN Tensor zu:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{C}_R, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 = \mathbf{C}_L. \quad (2.38)$$

Diese Tensoren stellen anschaulich die Beziehungen zwischen dem Quadrat eines Linienelements in der Ausgangs- und in der Momentankonfiguration dar. Daraus ergeben sich nachfolgende Beziehungen:

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C}_R d\mathbf{X}, \quad (2.39)$$

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{C}_L^{-1} d\mathbf{x}. \quad (2.40)$$

## Verzerrungstensoren

Das absolute Verzerrungsmaß eines Körper wird durch die Differenz der Quadrate eines differentiellen Linienelements in der Momentankonfiguration  $d\mathbf{x}$  und der Ausgangskonfiguration  $d\mathbf{X}$  definiert. Das Verzerrungsmaß läßt sich unter Verwendung des rechten (2.37) oder des linken (2.38) CAUCHY-GREEN Tensors und eines Metriktensors (2.18) darstellen. Dieser Zusammenhang soll im Folgenden dargelegt werden.

---

<sup>2</sup>Konvention ignoriert: (Physikalische Größe in der Momentankonfiguration werden klein geschrieben.)

Mit

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \left( \mathbf{g}_i d\theta^i \right) \cdot \left( \mathbf{g}_j d\theta^j \right) = g_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (2.41)$$

und

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \left( \mathbf{G}_i d\theta^i \right) \cdot \left( \mathbf{G}_j d\theta^j \right) = G_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (2.42)$$

erhalten wir

$$ds^2 - dS^2 = (g_{ij} - G_{ij}) d\theta^i d\theta^j \quad (2.43)$$

und können den GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  über die Gleichung

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (2.44)$$

eingeführen. Die Koeffizienten des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors werden in Gl. (2.44) definiert durch:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \quad (2.45)$$

Der GREENSche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  ergibt sich bezüglich des konvektiven Koordinatensystems zu:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j . \quad (2.46)$$

Die CAUCHY-GREEN Tensoren in konvektiven Koordinaten werden mit Hilfe der Beziehungen in Gl. (2.25) wie folgt geschrieben:

$$\mathbf{C}_R = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \left( \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i \right) \left( \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j \right) = \left( \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \right) \left( \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \right) = g_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j , \quad (2.47)$$

$$\mathbf{C}_L = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \left( \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \right) \left( \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{g}_j \right) = \left( \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j \right) \left( \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \right) = G^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j . \quad (2.48)$$

Zusammen mit dem Metriktensor  $\mathbf{G}$  der Ausgangskonfiguration und dem Metriktensor  $\mathbf{g}$  der Momentankonfiguration in der Gl. (2.18) kann der GREENSche Verzerrungstensor wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_R - \mathbf{G}) . \quad (2.49)$$

Mit dem Ausdruck

$$\mathbf{E}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{g} - \mathbf{C}_L^{-1}) \quad (2.50)$$

ist der der ALMANSische Verzerrungstensor definiert. Die Tensoren  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{E}^A$  sind symmetrisch - d.h.  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$  und  $\mathbf{E}^A = \mathbf{E}^{A^T}$  - und invariant gegenüber Starrkörperbewegungen.

## Infinitesimaler Verzerrungstensor

Es ist häufig nützlich, den GREENSchen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  durch die Verschiebungen auszudrücken. Dazu definieren wir den Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  durch

$$\mathbf{H} = \text{GRAD}\mathbf{u}$$

d.h. es gilt:

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{H}$$

mit  $\mathbf{1}$  als Identitätstensor. Der Tensor  $\mathbf{E}$  ergibt sich in Abhängigkeit des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  zu

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right)$$

und ist daher nichtlinear abhängig von  $\mathbf{H}$ . Für hinreichend kleine Verschiebungsgradienten  $\|\mathbf{H}\| \ll 1$  kann man quadratische Glieder in  $\mathbf{E}$  vernachlässigen. Der GREENSche Verzerrungstensor reduziert sich dann auf den symmetrischen Teil des Verschiebungsgradienten. Mit  $\boldsymbol{\varepsilon}$  wird der infinitesimale Verzerrungstensor bezeichnet:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \right) . \quad (2.51)$$

In diesem Fall gibt es keinen Unterschied zwischen Ausgangs- und Momentankonfiguration und daher gilt auch nachfolgende Beziehung:

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}^A . \quad (2.52)$$

Ebenso lässt sich folgern, dass die Ableitung des Verschiebungsvektors nach der materiellen Koordinate mit derjenigen nach der räumlichen zusammenfällt:

$$\mathbf{H} \approx \text{grad}\mathbf{u} . \quad (2.53)$$

## 2.3 Spannungsmaße

In der Kontinuumsmechanik unterscheidet man zwischen Volumen- und Flächenkräften. Die Volumenkräfte wirken auf die Partikel im Körpervolumen; die Flächenkräfte sind dagegen über die Körperoberfläche verteilte Kräfte. Neben den äußeren Kräften spielen auch die inneren Kräfte eine wichtige Rolle, weil sie die Wechselwirkung zwischen benachbarten Teilen innerhalb eines Körpers beschreiben [8]. Durch äußere Krafteinwirkung entstehen im Inneren des Körpers Beanspruchungen, die als Schnittkräfte durch eine gedachte Schnittfläche zugänglich gemacht werden:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da} . \quad (2.54)$$

Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  ergibt sich nach der Gl. (2.54) durch eine Grenzwertbetrachtung des auf das Flächenelement  $\Delta \mathbf{a}$  bezogenen Kraftvektors  $\Delta \mathbf{f}$ , wobei  $\Delta a := \|\Delta \mathbf{a}\|$  definiert ist. Die vektorielle Größe  $\mathbf{t}$  ist an jedem Ort  $\mathbf{x}$  abhängig von der Richtung

der Schnittfläche  $d\mathbf{a}$  und somit eine Funktion des Normalenvektors  $\mathbf{n}$ . Das CAUCHY-Theorem besagt, dass der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  eine lineare Abbildung des Normalenvektors ist:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n} . \quad (2.55)$$

Mit Berücksichtigung der Gl. (2.54) folgt:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T} \mathbf{n} da \quad (2.56)$$

wobei  $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$  gilt. Da der CAUCHY-Spannungstensor  $\mathbf{T}$  in räumlichen Koordinaten ausgedrückt wird und sich auf die Momentankonfiguration bezieht, werden damit die "wahren" Spannungen ausgedrückt.

Aufgrund der Tatsache, dass die resultierenden Kräfte  $d\mathbf{f}$  auf ein Flächenelement unabhängig von der Konfiguration sind, wird die Transformationsbeziehung des Flächenelements in Gl. (2.56) eingeführt. Dann ergibt sich der 1. PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor  $\mathbf{T}_0$ , der sich auf die Ausgangskonfiguration mit dem Normalvektor  $\mathbf{N}$  und dem Flächenelement  $d\mathbf{A}$  bezieht mit  $dA = \|d\mathbf{A}\|$  zu:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T} \mathbf{n} da = \mathbf{T}_0 \mathbf{N} dA . \quad (2.57)$$

Nach Eliminierung des Flächenelements mit Hilfe von Gl. (2.26) erhält man  $\mathbf{T}_0$  zu:

$$\mathbf{T}_0 = T_0^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j := J \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} = J T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j . \quad (2.58)$$

Dieser Tensor ist unsymmetrisch und seine Basen beziehen sich sowohl auf die Ausgangs- als auch die Momentankonfiguration. Um den Nachteil der Unsymmetrie und des Charakters eines Doppelfeldtensors zu beheben, wird häufig der 2. PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  eingeführt, der durch die Rücktransformation des Basisvektors  $\mathbf{g}_i$  Gl. (2.58) gewonnen wird:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{T}^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j := \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}_0 = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} = J \tilde{T}^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j . \quad (2.59)$$

Dieser Tensor ist symmetrisch - s. Abschnitt 2.4.3 - und bezieht sich vollständig auf die Basisvektoren der Ausgangskonfiguration.

## Infinitesimale Verschiebungsgradienten

Im Falle kleiner Verschiebungen und Verdrehungen gilt

$$\|\mathbf{H}\| \ll 1$$

und daraus folgt für den Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{1} \approx \mathbf{1}$$

und somit

$$J = \det \mathbf{F} = 1.$$

Dann folgt

$$\mathbf{T} \approx \mathbf{T}_0 \approx \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.60)$$

In diesem Fall wird, wie zuvor erwähnt, nicht mehr zwischen dem Bezug des Spannungstensors auf die Ausgangs- oder die Momentankonfiguration unterschieden.

## 2.4 Bilanzgleichungen

Die Bilanzgleichungen sind materialunabhängig und bilden die Grundlage der Kontinuumsmechanik. Sie werden in integraler Form aufgestellt und gelten somit für den gesamten Körper. Mit Hilfe der geeigneten Stetigkeitsannahmen lassen sich lokale Bilanzgleichungen herleiten, die für jeden Materialpunkt gelten.

### 2.4.1 Massenbilanz

Die Masse  $m$  eines materiellen Körpers wird über das Volumenintegral der Massendichte  $\rho_0(\mathbf{X}, t)$  in der Ausgangskonfiguration bzw.  $\rho(\mathbf{x}, t)$  in der Momentankonfiguration definiert:

$$m(t) = \int_{\mathcal{B}_o} \rho_0(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x}, t) dv . \quad (2.61)$$

Die Masse  $m$  verändert sich während des Deformationsprozesses nicht und ist sowohl in der Ausgangskonfiguration als auch für jede weitere Konfiguration  $\mathcal{B}_t$  konstant:

$$m = \int_{\mathcal{B}_t} \rho dv = \int_{\mathcal{B}_o} \rho_0 dV = \text{konstant} \quad (2.62)$$

für alle Zeitpunkte  $t$ . Mit der Transformation des Volumenelements gilt für die Massenbilanz:

$$m = \int_{\mathcal{B}_o} \rho_0 dV = \int_{\mathcal{B}_o} \rho \det \mathbf{F} dV \quad (2.63)$$

und es folgt

$$\int_{\mathcal{B}_o} [\rho_0 - \rho \det \mathbf{F}] dV = 0 . \quad (2.64)$$

Aus der Beziehung (2.64) ergibt sich die lokale Form der Massenerhaltung in materieller Darstellung:

$$\rho_0 - \rho \det \mathbf{F} = 0 . \quad (2.65)$$

Mit der zeitlichen Änderung der Masse und der Massenerhaltung folgt aus  $\dot{\rho}_0 = \dot{\rho} \det \mathbf{F}$

$$\dot{\rho}_0 = \dot{\rho} \det \mathbf{F} + \rho (\det \mathbf{F})' = \det \mathbf{F} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}})$$

und

$$\dot{\rho}_0 = 0 \quad \text{ergibt} \quad \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 .$$

Somit entsteht in räumlicher Darstellung die lokale Form der Massenerhaltung:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 . \quad (2.66)$$

Diese Beziehung wird auch als Kontinuitätsgleichung bezeichnet.

## 2.4.2 Impulsbilanz

Der kinetische Zustand eines materiellen Körpers wird durch den Impulsvektor  $\mathbf{I}$  beschrieben. Der Impulsvektor ist definiert durch das Volumenintegral über die Massendichte multipliziert mit dem Geschwindigkeitsvektor:

$$\mathbf{I} = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad (2.67)$$

mit  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  als Geschwindigkeitsvektor. Der Impulssatz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers gleich der Summe der an diesem Körper angreifenden Kräfte ist. Die zeitliche Ableitung des Impulses lässt sich wie folgt schreiben:

$$\dot{\mathbf{I}} = \frac{d\mathbf{I}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \underbrace{\int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{k} \, dv}_{\mathbf{F}_1} + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{t} \, da}_{\mathbf{F}_2} . \quad (2.68)$$

Der erste Teil  $\mathbf{F}_1$  bezeichnet die resultierende Volumenkraft, wobei am Volumenelement die volumenbezogene Massenkraft  $\rho \mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$  wirkt und der zweite Teil  $\mathbf{F}_2$  die Oberflächenkraft, die auf der ganzen Oberfläche oder einem Teil davon als flächenbezogene Belastung  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$  agiert. Unter Verwendung des CAUCHY-Theorems

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}$$

und des GAUSSschen Integralsatzes zur Umformung eines Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral

$$\int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{B}_t} \operatorname{div} \mathbf{T} \, dv$$

folgt die lokale Impulsbilanz in räumlicher Darstellung

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho (\mathbf{k} - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} , \quad (2.69)$$

die zu jedem Zeitpunkt an jedem Punkt des Kontinuums erfüllt sein muss. Diese Beziehung ist auch als 1. CAUCHYSche Bewegungsgleichung bekannt. Mit Hilfe der Transformationsbeziehungen - s. Gln. (2.30) und (2.31) - lässt sich die Beziehung (2.68) in der Ausgangskonfiguration formulieren, wobei  $\mathbf{N}$  die Normale des Randes  $\partial\mathcal{B}_0$  in der Ausgangskonfiguration darstellt. Es folgt

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{X}} \, dV = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{T}_0 \mathbf{N}(\mathbf{X}, t) \, dA + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{k}(\mathbf{X}, t) \, dV \quad (2.70)$$

und mit Hilfe des Divergenztheorems

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{X}} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \operatorname{DIV} \mathbf{T}_0 \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{k}(\mathbf{X}, t) \, dV . \quad (2.71)$$

Die lokale Form in materiellen Koordinaten lautet:

$$\operatorname{DIV} \mathbf{T}_0 + \rho_0 (\mathbf{k} - \ddot{\mathbf{X}}) = \mathbf{0} \quad (2.72)$$

wobei  $\mathbf{T}_0 = \det \mathbf{F} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}$  der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor ist und  $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}_0$  der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor wie bereits erwähnt - s. Gl. (2.58) und Gl. (2.59).

### 2.4.3 Drehimpulsbilanz

Der Drehimpuls  $\mathbf{D}_c$  eines materiellen Körpers in der Momentankonfiguration  $\mathcal{B}_t$ , der sich mit der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}$  bewegt, wird bezüglich eines raumfesten Punkts  $C$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{c}$  durch

$$\mathbf{D}_c := \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \dot{\mathbf{x}} \, dm \quad \text{mit} \quad dm = \rho \, dv \quad (2.73)$$

definiert. Der Drehimpulssatz besagt, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses gleich der Summe der Momente aller auf den Körper einwirkenden Kräfte ist. Mit Hilfe von  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{c}$  lautet der Drallsatz bezüglich des Punkts  $C$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}_c &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{k} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, da \\ &= \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{k} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{T} \mathbf{n} \, da . \end{aligned} \quad (2.74)$$

Der erste Teil bezeichnet das resultierende Moment der Volumenkraft  $\mathbf{k}$  und der zweite das Moment aus der Oberflächenkraft  $\mathbf{t}$  bezüglich des Punkts mit dem Ortsvektor  $\mathbf{c}$ . Die Anwendung des Divergenzoperators auf das Tensorfeld  $\mathbf{r} \times \mathbf{T}$  ergibt

$$\operatorname{div} [\mathbf{r} \times \mathbf{T}] = \mathbf{r} \times \left[ \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} \mathbf{g}_i \right] + T^{ij} \mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_i = \mathbf{r} \times \operatorname{div} \mathbf{T} - T^{ij} \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j$$

und führt zusammen mit Gl. (2.74) zu

$$\int_{\mathcal{B}_t} \left[ \mathbf{r} \times (\rho \ddot{\mathbf{x}} - \operatorname{div} \mathbf{T} - \rho \mathbf{k}) + T^{ij} \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j \right] dv = \mathbf{0} . \quad (2.75)$$

Aufgrund der lokalen Impulsbilanz reduziert sich die Drehimpulsbilanz auf die Forderung

$$\int_{\mathcal{B}_t} T^{ij} \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j \, dv = \mathbf{0} , \quad (2.76)$$

aus der mit der üblichen Stetigkeitsannahme die Beziehung

$$T^{ij} \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j = \mathbf{0}$$

folgt. Durch Umformung und Anwendung sowohl des CAUCHY-Theorems als auch des GAUSSSchen Integralsatzes erhält man unter Berücksichtigung der lokalen Impulsbilanz die Symmetrie des CAUCHYSchen Spannungstensors:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad (2.77)$$

d.h. die Symmetrie des CAUCHYSchen Spannungstensors wird bei hinreichender Stetigkeit aus der Gl. (2.76) hergeleitet. Es folgt dann, dass der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor nicht symmetrisch, wohingegen der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor symmetrisch ist.

$$\mathbf{T}_0 \neq \mathbf{T}_0^T \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}^T$$

## 2.5 Konstitutive Modellierung der linearen Elastizität

### 2.5.1 Allgemeines lineares Elastizitätsmodell

Mit Hilfe der konstitutiven Gleichungen, die das Verhalten eines Materials beschreiben, und der Bilanzgleichungen, die materialunabhängig gelten, kann ein Anfangsrandwertproblem für die Verschiebungen formuliert werden, wenn noch die kinematischen Beziehungen herangezogen werden. Im Allgemeinen stellt das Werkstoffmodell den Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen her. Die Materialgleichung der linearen Elastizitätstheorie wird durch den Materialsteifigkeitstensor  $\overset{4}{\mathbf{C}}$ , den zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  und den GREENSchen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  ausgedrückt:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \overset{4}{\mathbf{C}}[\mathbf{E}] . \quad (2.78)$$

Für nichtlinear, elastisches Materialverhalten ist der zweite PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor eine Tensorfunktion des Deformationsgradienten:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) , \quad (2.79)$$

d.h. für einen materiellen Punkt eines Körpers ist der Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  zu einem beliebigen Zeitpunkt eine Funktion des Deformationsgradienten [26].

Geht man davon aus, dass ein *spezifisches Formänderungspotenzial*  $W^{\text{int}}(\mathbf{E})$  existiert, so lassen sich zum einen, die Spannungen  $\tilde{\mathbf{T}}$  als erste Ableitung, und zum anderen der vierstufige Materialtensor  $\overset{4}{\mathbf{C}}$  als die zweite Ableitung des Potentials nach den Verzerrungen  $\mathbf{E}$  angeben:

$$\tilde{\mathbf{T}} := \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{und} \quad \overset{4}{\mathbf{C}} := \frac{\partial^2 W^{\text{int}}}{\partial \mathbf{E}^2} . \quad (2.80)$$

Für den Fall der linearen Elastizität stellt  $\overset{4}{\mathbf{C}}$  einen eindeutigen und linearen Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und dem Verzerrungstensor her<sup>3</sup> - s. Gl. (2.78) mit:

$$\overset{4}{\mathbf{C}} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Spannungstensors  $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}^T$  und des Verzerrungstensors  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$  ergeben sich folgende Symmetriebeziehungen für die Komponenten des Elastizitätstensors:

$$C^{ijkl} = C^{ijlk} = C^{jikl} = C^{jilk} . \quad (2.81)$$

Dadurch verringert sich die Zahl der unabhängigen elastischen Materialkennwerte von 81 auf 36 und die Überführung der tensoriellen Form in die Matrix-Vektor-Form wird ermöglicht (VOIGTsche Notation). Dazu werden die Spaltenmatrix  $\tilde{\mathbf{T}}$  der Spannungen,

---

<sup>3</sup>Verjüngung des vierstufigen Tensors  $\overset{4}{\mathbf{C}}$

die Spaltenmatrix  $\mathbf{E}$  der Verzerrungen und die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}$  definiert, wo die  $C^{ijkl}$  Komponenten des vierstufigen Materialsteifigkeitstensors  $\overset{4}{\mathbf{C}}$  einsortiert werden.

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{C} \mathbf{E} \quad (2.82)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}^{11} \\ \tilde{T}^{22} \\ \tilde{T}^{33} \\ \tilde{T}^{12} \\ \tilde{T}^{13} \\ \tilde{T}^{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1112} & C^{1113} & C^{1123} \\ C^{2211} & C^{2222} & C^{2233} & C^{2212} & C^{2213} & C^{2223} \\ C^{3311} & C^{3322} & C^{3333} & C^{3312} & C^{3313} & C^{3323} \\ C^{1211} & C^{1222} & C^{1233} & C^{1212} & C^{1213} & C^{1223} \\ C^{1311} & C^{1322} & C^{1333} & C^{1312} & C^{1313} & C^{1323} \\ C^{2311} & C^{2322} & C^{2333} & C^{2312} & C^{2313} & C^{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{bmatrix} .$$

Der Spannungszustand elastischer Werkstoffe ist nur vom momentanen Verzerrungszustand und nicht vom Deformationsprozess abhängig. Durch die Anwendung des SCHWARZschen Satzes, der besagt, dass die Reihenfolge der zweiten Ableitungen von  $W^{\text{int}}$  nach  $\mathbf{E}$  vertauschbar ist, ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 W^{\text{int}}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial^2 W^{\text{int}}}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} . \quad (2.83)$$

Daraus folgt die Hauptsymmetrie des Materialtensors  $\overset{4}{\mathbf{C}}$  und demzufolge die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}$ . Somit reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten auf 21. Ein solches Materialmodell besitzt keine werkstoffliche Symmetrieebene und die Steifigkeitsmatrix besitzt im Fall des linearen elastischen Verhaltens die Form:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1112} & C^{1113} & C^{1123} \\ C^{1122} & C^{2222} & C^{2233} & C^{2212} & C^{2213} & C^{2223} \\ C^{1133} & C^{2233} & C^{3333} & C^{3312} & C^{3313} & C^{3323} \\ C^{1112} & C^{2212} & C^{3312} & C^{1212} & C^{1213} & C^{1223} \\ C^{1113} & C^{2213} & C^{3313} & C^{1213} & C^{1313} & C^{1323} \\ C^{1123} & C^{2223} & C^{3323} & C^{1223} & C^{1323} & C^{2323} \end{bmatrix} . \quad (2.84)$$

Eine weitere Reduzierung der unabhängigen Materialkennwerte wird durch die Berücksichtigung der inneren Ausrichtung des Materials möglich. Es gibt die grundsätzliche Unterscheidung zwischen isotropen Materialien, die richtungsunabhängig sind und anisotropen Werkstoffen, die richtungsabhängiges Verhalten zeigen.

## 2.5.2 Symmetriebeziehungen für den Elastizitätstensor

Der Grad der Anisotropie kann durch die Anzahl der Symmetrieebenen klassifiziert werden. Nachfolgend werden die wichtigsten Symmetrieebenen für langfaserig bewehrtes Harz betrachtet und die entstehenden Steifigkeitsmatrizen aufgestellt [1].

### Monotropie

Monotropes Materialverhalten ist dadurch charakterisiert, dass eine werkstoffliche Symmetrieebene vorhanden ist. Für den Fall, dass die  $x_2 - x_3$  –Ebene die einzige Symmetrieebene des Materialverhaltens ist, liegt monotropes Verhalten vor. Es ergibt sich für die Symmetrieebene  $x_1 = \text{konst.}$  die nachfolgende Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{C}^{\text{Mon.}} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1112} & 0 & 0 \\ C^{1122} & C^{2222} & C^{2233} & C^{2212} & 0 & 0 \\ C^{1133} & C^{2233} & C^{3333} & C^{3312} & 0 & 0 \\ C^{1112} & C^{2212} & C^{3312} & C^{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{1313} & C^{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{1323} & C^{2323} \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

Dabei sind aus den 20 von null verschiedenen Komponenten nur 13 unabhängig voneinander. Monotrope Materialsymmetrie kann zum Beispiel bei unidirektional faserverstärkten Kunststoffen auftreten, wenn keine Koordinatenachse mit der Faserrichtung zusammenfällt. Man erkennt auch aus der Struktur der Steifigkeitsmatrix, dass es Schubbeanspruchungen  $\sigma_{12}$  gibt, die nicht nur mit den Schubverzerrungen  $\gamma_{12}$  verbunden sind, sondern auch von Normaldehnungen  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  und  $\varepsilon_{33}$  hervorgerufen werden.

### Orthotropie

Im Fall der Orthotropie existieren drei rechtwinklig zueinander stehende Symmetrieebenen und die Steifigkeitsmatrix ergibt sich zu:

$$\mathbf{C}^{\text{Ort.}} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C^{1122} & C^{2222} & C^{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C^{1133} & C^{2233} & C^{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{2323} \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

Dabei sind von den 12 Komponenten, die ungleich null sind, nur 9 voneinander unabhängig. Orthotropes Materialverhalten ist typisch für kreuzweise bewehrte Laminate.

Wenn die Koordinatenachsen den Orientierungen der Fasern entsprechen, so folgt der Stetigkeitstensor wie durch die Matrix in Gl. (2.86) dargestellt. Der Aufbau der Steifigkeitsmatrix zeigt, dass die Normalspannungen und die Schubspannungen voneinander entkoppelt sind, d.h. Normalspannungen erzeugen ausschließlich Dehnungen und Schubspannungen ausschließlich Gleitungen.

### Transversal isotropes Materialverhalten

Es gibt eine Zentralsymmetrie bezüglich einer Achse (die sogenannte Vorzugsrichtung). Für die  $x_1$ -Achse in Vorzugsrichtung ergibt sich die Steifigkeitsmatrix zu:

$$\mathbf{C}^{\text{Tr. Is.}} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C^{1122} & C^{2222} & C^{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C^{1122} & C^{2233} & C^{2222} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C^{2222} - C^{2323}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Es sind 5 unabhängige Materialkennwerte in den 12 von null verschiedenen Komponenten definierbar. Dieses Materialverhalten erfasst die elastische Materialsymmetrie bei unidirektional faserverstärkten Laminaten, falls die Koordinatenachse  $x_1$  der Faserorientierung entspricht und das Werkstoffverhalten in Schnittebenen rechtwinklig zum Faserverlauf als makroskopisch richtungsunabhängig betrachtet wird.

### Isotropes Materialverhaltens

Die materielle Isotropie ist die höchste Symmetriestufe mit unendlicher Anzahl von beliebig ausgedachten Symmetrieebenen in Raum. Es gibt dabei symmetrisches Verhalten in Bezug auf alle Ebenen und alle Achsen. Die Steifigkeitsmatrix ergibt sich zu:

$$\mathbf{C}^{\text{Is.}} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C^{1122} & C^{1111} & C^{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C^{1122} & C^{1122} & C^{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C^{1111} - C^{1122}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C^{1111} - C^{1122}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C^{1111} - C^{1122}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Als unabhängige elastische Materialkennwerte verbleiben nur  $C^{1111}$  und  $C^{1122}$ . Alternativ zu  $C^{1111}$  und  $C^{1122}$  läßt sich die Steifigkeitsmatrix mit Hilfe der LAMÉschen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  zu nachfolgender Beziehung angeben:

$$\mathbf{C}^{\text{Is.}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Dabei lauten die Ingenieurkonstanten für isotrope Materialien wie folgt:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{E-Modul}$$

$$G = \mu \quad \text{Schubmodul}$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad \text{Kompressionsmodul}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \text{Querdehnzahl}$$

Isotropes Werkstoffverhalten kann für Polymere, Glas und eine Vielzahl von Metallen vorausgesetzt werden.

**Fazit:** Tab. 2.1 liefert einen Überblick über häufig verwendete Materialien in der Mechanik. Sie unterscheiden sich nicht nur hinsichtlich ihrer Symmetrieebenen, sondern damit verbunden auch bezüglich der Anzahl der unabhängigen Materialkonstanten.

<i>Material</i>	anisotrop	monotrop	orthotrop	transversal- isotrop	isotrop
<i>Unabhängige Materialkonstanten</i>	21	13	9	5	2
<i>Symmetrieebenen</i>	0	1	3	$\infty$	$\infty$

**Tab. 2.1** Anzahl der Materialkonstanten und der Symmetrieebenen

Daher spricht man von monotropem bzw. orthotropem Material, wenn eine bzw. drei Symmetrieebenen vorhanden sind. Allerdings im Fall, dass unendlich viele Symmetrieebenen existieren, ist das Material entweder räumlich isotrop oder transversal isotrop in der Normalenebene zur Vorzugsrichtung.

## 2.6 Anfangsrandwertaufgabe der Mechanik

Das vollständige Verhalten eines materiellen Punkts in einem Bauteil wird durch die Erfüllung der Bilanzgleichungen unter bestimmten Randbedingungen ausgedrückt. Die daraus entstehenden Verschiebungsgleichungen werden nach der Zeit abgeleitet und dann als Anfangsrandwertaufgabe zusammengestellt. Man betrachte den Körper  $\mathcal{B}$  mit den materiellen Punkten  $P$  und dem Ortsvektor  $\mathbf{X}$ . Die Verschiebungen und Dehnungen sollen im Folgenden als klein angenommen werden, so daß nicht mehr zwischen den räumlichen und materiellen Ableitungen unterschieden werden muss. Dann ist  $\text{grad}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} \approx \text{GRAD}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{X}}$  bzw.  $\text{div}(\cdot) \approx \text{DIV}(\cdot)$  und es ist nicht mehr wichtig zwischen der Definition eines Tensors im Koordinatensystem der Ausgangs- und Momentankonfiguration  $\mathcal{B}_o$  bzw.  $\mathcal{B}_t$  zu unterscheiden oder zwischen den Spannungsmäßen  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}_o$  und  $\hat{\mathbf{T}}$  - s. Gl. (2.60).

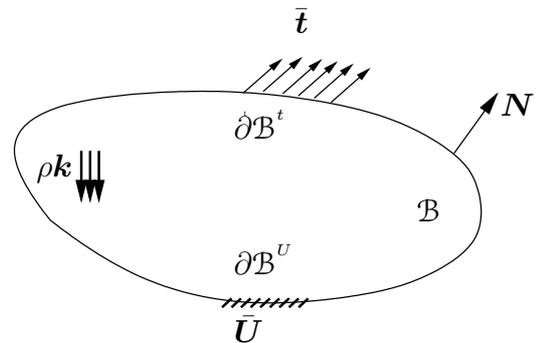
Der Körper ist durch den Rand  $\partial\mathcal{B}$  mit der nach außen gerichteten Normalen  $\mathbf{N}$  begrenzt. Die vorgegebenen Größen auf dem Rand  $\bar{\mathbf{U}}$  und  $\bar{\mathbf{t}}$  sind per Querstrich gekennzeichnet. Der Rand  $\partial\mathcal{B}$  wird aufgeteilt in die Punktmengen  $\partial\mathcal{B}^U$  und  $\partial\mathcal{B}^t$ , sodass gilt

$$\partial\mathcal{B}^U \cap \partial\mathcal{B}^t = \emptyset$$

und

$$\partial\mathcal{B}^U \cup \partial\mathcal{B}^t = \partial\mathcal{B}.$$

$\partial\mathcal{B}^U$  und  $\partial\mathcal{B}^t$  seien Kurven bzw. Flächen im räumlichen Fall.



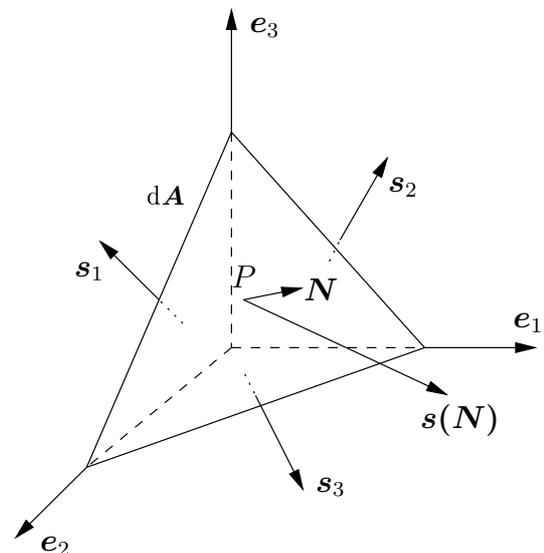
**Abb. 2.2:** Konfiguration des Körpers bei kleinen Verschiebungen

Wir betrachten in Abb. 2.3 einen beliebigen Punkt  $P$  auf einer Schnittfläche mit dem infinitesimalen Flächenelement  $d\mathbf{A}$  durch den Körper  $\mathcal{B}$ .

Die Schnittfläche  $d\mathbf{A}$  wird durch einen nach außen weisenden Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{N}$  charakterisiert. Das CAUCHY-Theorem besagt: Für jede beliebige Schnittfläche mit dem Normalenvektor  $\mathbf{N}$  gibt es eine lineare Abhängigkeit zwischen dem Spannungsvektor  $\mathbf{s}$  und dem Normalenvektor  $\mathbf{N}$  am Punkt  $P$  wie folgt:

$$\mathbf{s} = \mathbf{T} \mathbf{N}. \quad (2.90)$$

Die Vielzahl aller Spannungsvektoren  $\mathbf{s}$  auf allen möglichen Schnittflächen durch einen Materialpunkt des Körpers läßt sich mit denjenigen auf den Koordinatenflächen angeben, deren Spannungsvektoren  $\mathbf{s}_1$ ,  $\mathbf{s}_2$  und  $\mathbf{s}_3$  dann den Spannungszustand am Materialpunkt  $P$  bestimmen [26, 41].



**Abb. 2.3:** Spannungsvektor  $\mathbf{s}$  auf einer beliebigen Schnittfläche  $d\mathbf{A}$

Um die Materialgleichungen aufzustellen, gehen wir von folgenden Prämissen aus.

- Innerhalb des Körpers  $\mathcal{B}$  wirkt am Volumenelement die volumenbezogene Massenkraft  $\rho \mathbf{k}$ .
- Auf dem Randbereich  $\partial\mathcal{B}^t$  agieren die Flächenlasten  $\bar{\mathbf{t}}$ , die nach dem Reaktionsprinzip mit dem Spannungsvektor  $\mathbf{s}$  im Gleichgewicht sind:  $\mathbf{s} = \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{T} \mathbf{N}$ .
- Auf dem Randbereich  $\partial\mathcal{B}^U$  ist die Verschiebung  $\bar{\mathbf{U}}$  vorgegeben.

Mit diesen Feldlasten und Randbedingungen wird die **Randwertaufgabe** formuliert, die sich aus den Feldgleichungen und den Bedingungen an den Spannungs- und Verschiebungsrändern zusammensetzt, um die Lage eines Körpers und dessen Deformationsverhalten zu beschreiben. Mittels der zeitlichen Ableitung der Feldgleichungen und der Anfangsrandbedingungen wird die **Anfangsrandwertaufgabe** formuliert.

### Feldgleichungen für kleine Verzerrungen

Die Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{k} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.91)$$

beschreibt die lokale Impulsbilanz in Gl. (2.72) bei kleinen Verschiebungen. Die zeitliche Ableitung der kinematischen Beziehungen gemäß Gl. (2.51) ergibt bei kleinen Verschiebungen mit obigen Vereinfachungen:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{grad} \dot{\mathbf{u}} + (\operatorname{grad} \dot{\mathbf{u}})^T \right] = (\operatorname{grad} \dot{\mathbf{u}})^{\operatorname{sym}} \quad (2.92)$$

mit  $\dot{\mathbf{u}}$  als Geschwindigkeitsvektor und  $( )^{\operatorname{sym}}$  als symmetrischem Anteil des Verschiebungsgradienten. Gemeinsam ergeben die Bilanzgleichungen (2.91) und die kinematischen Beziehungen (2.92) die ratenabhängigen, werkstofffreien Feldgleichungen des mechanischen Problems.

### Randbedingungen

Die zeitlichen Ableitungen der Randbedingungen ergeben:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\bar{\mathbf{U}}} \quad \text{am Rand } \partial\mathcal{B}^U \quad (2.93)$$

mit  $\bar{\mathbf{U}}$  als vorgegebene Verschiebung am Rand  $\partial\mathcal{B}^U$  und

$$\dot{\mathbf{T}} \mathbf{N} = \dot{\bar{\mathbf{t}}} \quad \text{am Rand } \partial\mathcal{B}^t \quad (2.94)$$

mit  $\bar{\mathbf{t}}$  als Randlast am Rand  $\partial\mathcal{B}^t$  mit dem Normalenvektor  $\mathbf{N}$ .

### Materialgleichung in Ratenform

Die ratenabhängige Materialgleichung<sup>4</sup> ergibt sich zu:

$$\dot{\mathbf{T}} = \overset{4}{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\varepsilon})[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] \quad \text{bzw. in Indexnotation: } \dot{T}_{ij} = L_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (2.95)$$

mit  $\overset{4}{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\varepsilon})$  und Komponenten  $L_{ijkl}$  als Tangentenoperator, der ein Tensor vierter Ordnung ist. Mit Hilfe der Gl. (2.95) werden die mechanischen Materialeigenschaften, also das instantane Verformungsverhalten eines Körpers, im Laufe der Zeit beschrieben. Aufgrund der Drehimpulsbilanz ist die Rate des Spannungsfeldes symmetrisch, so dass im materiellen Körper  $\mathcal{B}$  gilt:

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}^T \quad \Leftrightarrow \quad \dot{T}_{ij} = \dot{T}_{ji}$$

und damit sind die Indizes des Tangentenoperators ( $L_{ijkl}$ ) paarweise vertauschbar, d.h.:

$$L_{ijkl} = L_{jikl} \quad (2.96)$$

Wegen der Symmetrie der Rate des Verzerrungstensors ( $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T$ ) gilt ebenso die Vertauschbarkeit des zweiten Indexpaares:

$$L_{ijkl} = L_{jilk} \quad (2.97)$$

Unter der Annahme einer linearen Kinematik berechnen sich die Verzerrungsraten  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  als symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten - s. Gl. (2.51) und (2.92). Die ratenabhängige Materialgleichung Gl. (2.95) ergibt sich demnach zu:

$$\dot{\mathbf{T}} = \overset{4}{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\varepsilon})[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \overset{4}{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\varepsilon})\left[\frac{1}{2} \left( \text{grad } \dot{\mathbf{u}} + (\text{grad } \dot{\mathbf{u}})^T \right)\right] = \overset{4}{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\varepsilon})[(\text{grad } \dot{\mathbf{u}})^{\text{sym}}] \quad (2.98)$$

und in Indexschreibweise<sup>5</sup>:

$$\dot{T}_{ij} = L_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{1}{2} (L_{ijkl} \dot{u}_{k,l} + L_{ijkl} \dot{u}_{l,k}) = L_{ijkl} (\dot{u}_{k,l})^{\text{sym}} \quad (2.99)$$

**Fazit:** Das vollständige Verhalten des beschriebenen Materials wird durch die Erfüllung der Bilanzgleichungen unter bestimmten Randbedingungen ausgedrückt. Die daraus entstehenden Gleichungen werden nach der Zeit abgeleitet und als Anfangsrandwertaufgabe zusammengestellt, die durch die Gln. (2.91), (2.92), (2.93), (2.94) und (2.95) festgelegt worden ist.

---

<sup>4</sup>s. S. 42

<sup>5</sup>Es gelte  $\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)' = \dot{u}_{k,l}$

# Kapitel 3

## Ebenes Schädigungsmodell für unidirektional verstärkte langfaserige Verbundwerkstoffe

In diesem Kapitel werden nach einer kurzen physikalischen Motivation des phänomenologischen Schädigungsmodells die grundlegenden Gleichungen der Kontinuumschädigungsmechanik angegeben. Diese Gleichungen dienen als Basis für die Herleitung der geschädigten Materialgleichungen [42]. Darüber hinaus werden mit Hilfe der zeitlichen Ableitung die ratenabhängigen Materialgleichungen hergeleitet. Zuerst wird jedoch ein kurze ingenieuranschauliche Deutung der Elastizitätsmoduli im ebenen orthotropen Spannungszustand gegeben.

### 3.1 Elastizität und Schädigung

#### 3.1.1 Orthotrop elastisches Materialverhalten im ebenen Spannungszustand

Das Materialverhalten von unidirektionalen Laminatschichten ist dadurch charakterisiert, dass drei bzw. zwei rechtwinklig Symmetrieebenen und fünf bzw. vier unabhängige Materialkonstanten im 3D bzw. 2D Fall existieren - s. Abschnitt 2.5.2 und Tab. 2.1 [1, 30]. Dieses Verhalten ist typisch für unidirektionalen Faserverbundwerkstoff, bei denen eine der Koordinatenachsen der Faserrichtung entspricht. Im ebenen Fall ergibt sich die Steifigkeitsmatrix Gl. (2.86), wenn die Fasern in  $x_1$ -Richtung verlaufen zu:

$$\mathbf{C}^{\text{Ort.}} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & 0 \\ C^{2211} & C^{2222} & 0 \\ 0 & 0 & C^{1212} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Die in Gl. (3.1) enthaltenen Materialparameter können im linear elastischen Fall anhand der Superposition unterschiedlicher Zugversuche bestimmt werden. Der Zugversuch in Faserrichtung führt zu Längs- und Querdehnungen:

$$\varepsilon_{11} = \frac{T_{11}}{E_1} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{22} = -\nu_{12}\varepsilon_{11},$$

während der Zugversuch in Querrichtung zu folgenden Werten führt:

$$\varepsilon_{11} = -\nu_{21}\varepsilon_{22} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{22} = \frac{T_{22}}{E_2} .$$

Die Superposition beider Versuche (in Faser- und in Querrichtung) führt schließlich zu:

$$\varepsilon_{11} = \frac{T_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} T_{22} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} T_{11} + \frac{T_{22}}{E_2} .$$

Aus der Struktur der Steifigkeitsmatrix Gl. (3.1) ist es offensichtlich, dass in der Theorie kleiner Verformungen die Normalspannungen ausschließlich Dehnungen erzeugen, während Schubspannung ausschließlich Gleitung hervorruft[1]. Somit kann die Materialgleichung im ebenen Fall mit Hilfe des Schubmoduls  $G_{12}$  in Matrizenform vollständig dargestellt werden - s. Gl. (3.2).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{S} \mathbf{T} \end{aligned} \quad (3.2)$$

In vereinfachter Indexschreibweise lauten die Nachgiebigkeiten  $S_{ij}$  ( $i = 1, 2, j = 1, 2$ ) und  $S_{44}$  demgemäß:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad S_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad \text{und} \quad S_{44} = \frac{1}{G_{12}} . \quad (3.3)$$

Durch die Inversion der Nachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{C}$  ergeben sich in Ingenieurnotation die nachfolgenden Steifigkeitskomponenten  $C_{ij}$ , die dann die Steifigkeitsmatrix bilden:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ C_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad \text{und} \quad C_{44} = G_{12} . \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Schädigung des elastischen Verhaltens

Die *Kontinuumsschädigungsmechanik* beschreibt die Entwicklung von Fehlstellen (Risse, Löcher) in Materialien und den damit einhergehenden Steifigkeitsverlust. Ferner beschreibt sie auch die Auswirkung der Versagensvorgänge auf der Makroskala. Dabei kommt es zu einem völligen Verlust der Materialsteifigkeit und häufig zur Akkumulation der Schädigung in Versagensbändern oder Versagenszonen[16, 17]. Bei der idealisierten Betrachtung des Schädigungsvorgangs von Materialien wird angenommen, dass sich die

Schädigung lediglich auf die elastischen Materialparameter auswirkt [18, 38, 45, 57, 60]. Dies bedeutet, dass eine Degradation der elastischen Materialparameter stattfindet, entsprechend der Vorstellung, dass die Schädigung eine Auswirkung der Reduktion der atomaren Verbindungen auf molekularer Ebene ist [50, 52, 58].

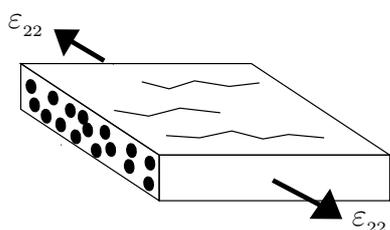
Die Grundlagen der Kontinuumsschädigungsmechanik werden beispielweise in [36, 37, 40] dargelegt. Dort wurde zur phänomenologischen Beschreibung der Degradation von Materialeigenschaften eine skalare Größe  $\delta$  eingeführt, die das Niveau der Schädigung angibt. Dabei gilt:

- Bei  $\delta = 0$  ist das Material ungeschädigt.
- Bei  $\delta = 1$  ist das Material vollständig geschädigt.

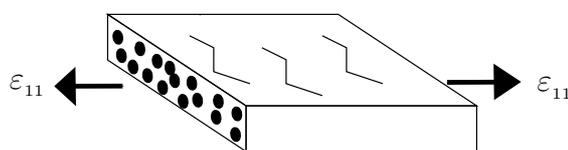
Zur Berücksichtigung anisotroper Schädigung werden isotrope Schädigungsmodelle erweitert. Dabei werden vektor- oder tensorwertige Schädigungsvariablen eingeführt.

## 3.2 Modellannahmen

Wie in Abschnitt 3.1.2 bereits erläutert, werden die elastischen Materialparameter als Schädigungsvariablen angenommen. Das verwendete Materialmodell - s. [35] und [42] - basiert auf der Beschreibung der Degradation von Elastizitätskennwerten in den einzelnen Vorzugsrichtungen. Demgemäß werden Schädigungsvariablen in den einzelnen Vorzugsrichtungen (Faserrichtung, Querrichtung) und für die Scherung eingeführt. Diese Variablen geben zusammen mit den damit verbundenen Abminderungen der Elastizitätskennwerte das Versagensverhalten an. Es wird weiterhin von der unveränderten Symmetrieklasse des Elastizitätsmodells infolge der Schädigungsvorgänge ausgegangen, d.h. diese ändern die elastischen Vorzugsrichtungen nicht [13, 32]. Alle Untersuchungen beschränken sich weiterhin auf die ebene Elastizitätstheorie, genauer gesagt auf den ebenen Spannungszustand.



**Abb. 3.1:** Rissbildung durch Querdehnungen



**Abb. 3.2:** Rissbildung durch Längsdehnungen

Das Versagensverhalten von Laminatschichten wird entscheidend von den bereits vorhandenen Defekten (Fehlstellen, Löcher, Mikrorissen) bestimmt, die sich unter Kraftbeanspruchung zu Makrorissen ausbilden [18, 19, 20, 42]. Deshalb wird das Phänomen der Rissbildung auf Laminatenebene genauer betrachtet, um die Herabsetzung der Steifigkeit des Laminats realitätsnah abzubilden [28, 29, 32]. Im Hinblick auf die Festigkeit des geschädigten Laminats wird die Wirkung von Rissen, sowohl parallel als auch senkrecht

zur Faser analysiert [34, 54, 57]. Die Untersuchung soll Rückschlüsse über das Laminatverhalten unter Beanspruchung durch Dehnungen in Abb. 3.1 und Abb. 3.2 liefern. Hierbei erkennt man unter dem Einfluss einer Belastung, dass Risse in Faserrichtung, die durch Querdehnungen  $\varepsilon_{22}$  verursacht werden eine untergeordnete Auswirkung auf die Steifigkeit in Faserrichtung haben. Somit werden die Querdehnungen keinen Einfluss auf den Steifigkeitsverlust in Faserrichtung haben. Folglich sind Längsdehnungen verantwortlich für Risse quer zur Faserrichtung. Die Steifigkeitsdegradation in Faserrichtung ist also nur durch die Längsdehnungen beeinflusst ( $\hat{E}_1(\varepsilon_{11})$ ), wohingegen die Steifigkeit in Querrichtung ausschließlich mit den Querdehnungen verbunden ist ( $\hat{E}_2(\varepsilon_{22})$ ). Es wird in der Literatur oft das Versagensphänomen durch geschädigte, veränderliche Größen, wie beispielweise den Materialeigenschaften als Schädigungsparameter angeführt. Demnach ist aus den zuvor getroffenen Annahmen die Steifigkeit in Faserrichtung bzw. Querrichtung ein Funktional der maximalen erreichten Längs-  $\hat{E}_1(\varepsilon_{11 \max})$  bzw. Querdehnungen  $\hat{E}_2(\varepsilon_{22 \max})$  [35, 42]. Im Folgenden werden die Elastizitätskennwerte, die als Schädigungsvariablen zur Verfügung stehen, nicht nur mathematisch beschrieben, sondern deren Abhängigkeit auch graphisch veranschaulicht.

### 3.2.1 Schädigung in Faserrichtung

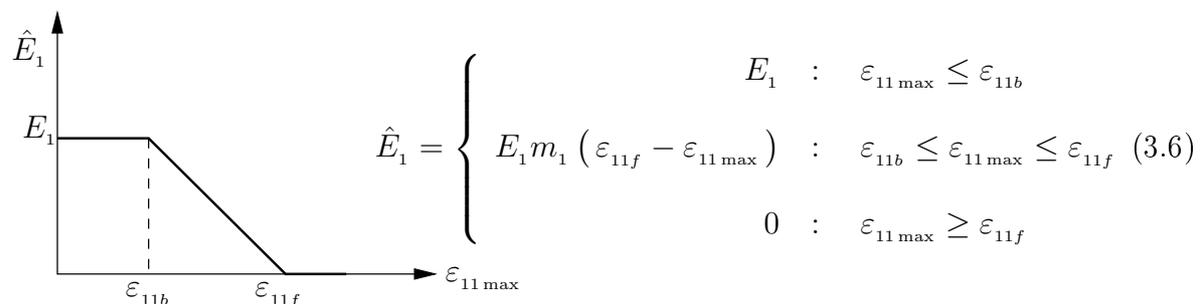
Der in diesem Abschnitt zu betrachtende Elastizitätskennwert  $\hat{E}_1$  für die Steifigkeit in Faserrichtung ist ein Funktional der Längsdehnungsgeschichte:

$$\hat{E}_1 = \tilde{\hat{E}}_1(\varepsilon_{11 \max}) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{11 \max} = \max_{s \leq t} [\varepsilon_{11}(s)].$$

Wie schon angedeutet, ist  $\hat{E}_1$  von der maximalen, bereits aufgetretenen Faserdehnung  $\varepsilon_{11 \max}$  abhängig. Der Einfachheit halber wird ein stückweise linearer Verlauf für  $\hat{E}_1$  in Abhängigkeit der maximalen Längsdehnungen angenommen. Mit Hilfe der Steigung

$$m_1 = \frac{1}{\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11b}} \quad (3.5)$$

wird ein Materialparameter eingeführt, der die mathematische Beschreibung der Degradation von  $\hat{E}_1$  vereinfacht - s. Gl. (3.6). Die graphische Darstellung ist der Abb. 3.3 zu entnehmen.



**Abb. 3.3:** Schadensverlauf in Faserrichtung

Entsprechend des Degradationsbegriffs beginnt der Abfall des Elastizitätskennwerts  $\hat{E}_1$  nachdem die Längsdehnung den Wert  $\varepsilon_{11b}$  erreicht hat. Dieser Wert wird als Anfangsdehnung der Degradation in Faserrichtung bezeichnet. Vom Wert  $\varepsilon_{11b}$  an soll der Abfall linear bis zum endgültigen Versagen des Materials bei  $\varepsilon_{11f}$  verlaufen - s. Abb. 3.3.

### 3.2.2 Schädigung in Querrichtung

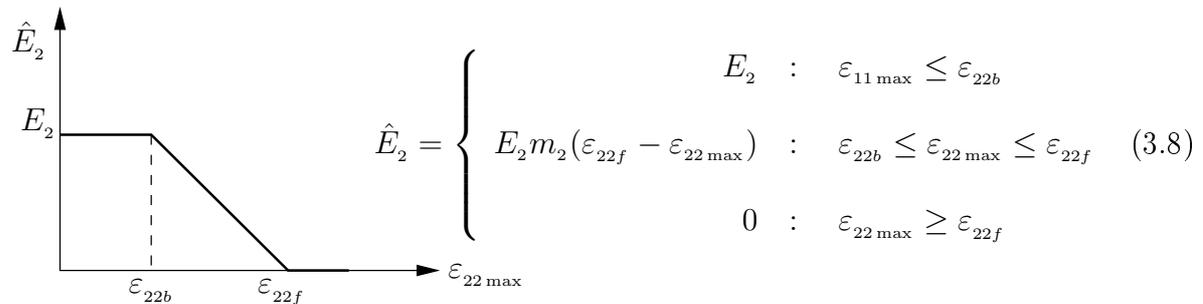
Analog zu den Betrachtungen im vorangegangenen Abschnitt ist der degradierte Elastizitätsmodul quer zur Faserrichtung  $\hat{E}_2$  ebenfalls ein Funktional der Dehnungsgeschichte und dementsprechend auch von der maximal aufgetretenen Querdehnung  $\varepsilon_{22 \max}$  abhängig:

$$\hat{E}_2 = \tilde{\hat{E}}_2(\varepsilon_{22 \max}) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{22 \max} = \max_{s \leq t} [\varepsilon_{22}(s)]$$

Die Abb. 3.4 stellt den angenommenen Verlauf der Dehnsteifigkeit  $\hat{E}_2$  quer zur Faserrichtung in Abhängigkeit der Querdehnung  $\varepsilon_{22 \max}$  dar. Die Einführung der Steigung

$$m_2 = \frac{1}{\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22b}} \quad (3.7)$$

ermöglicht die Vereinfachung der mathematischen Beschreibung der Degradation für den prozessabhängigen Elastizitätsmodul  $\hat{E}_2$  - s. Gl. (3.8).



**Abb. 3.4:** Schadensverlauf in Querrichtung

Beginnend mit der sogenannten Anfangsdehnung der Degradation  $\varepsilon_{22b}$  fällt der Elastizitätsmodul  $\hat{E}_2$  linear ab bis das Versagen durch Bruch bei der Querdehnung  $\varepsilon_{22f}$  erreicht wird.

### 3.2.3 Scherschadensverlauf

Anders als bei den zuvor erwähnten Schadensformen wird bei Scherbelastung die Schersteifigkeit eines Materials nicht nur von der Schubverzerrung  $\varepsilon_{12 \max}$ , sondern auch von den Längs-  $\varepsilon_{11 \max}$  und Querdehnungen  $\varepsilon_{22 \max}$  beeinflusst - s. [35, 42]. Es erscheint deshalb als notwendig, eine von allen Dehnungen abhängige Vergleichsdehnung  $\varepsilon_{12v}$  zu definieren, die vom einfachen und homogenen Schubversuch ausgeht. Dabei werden alle Dehnungskomponenten im ebenen Fall berücksichtigt und die Vergleichsdehnung wird wie folgt ausgedrückt:

$$\varepsilon_{12v} = \sqrt{(\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})^2 + \varepsilon_{12 \max}^2} \quad (3.9)$$

Diese Formulierung ist sinnvoll, weil auf die Schersteifigkeit  $G_{12} = \frac{1}{S_{44}}$  sowohl Faser- als auch Matrixrisse einwirken, die durch die Dehnungen  $\varepsilon_{11 \max}$  und  $\varepsilon_{22 \max}$  verursacht werden. Die Schersteifigkeit  $\hat{G}_{12}$  soll eben deshalb von der Vergleichsdehnung abhängig sein. In [42] wird darauf detaillierter eingegangen. Analog zu den Abschnitten 3.2.1 und

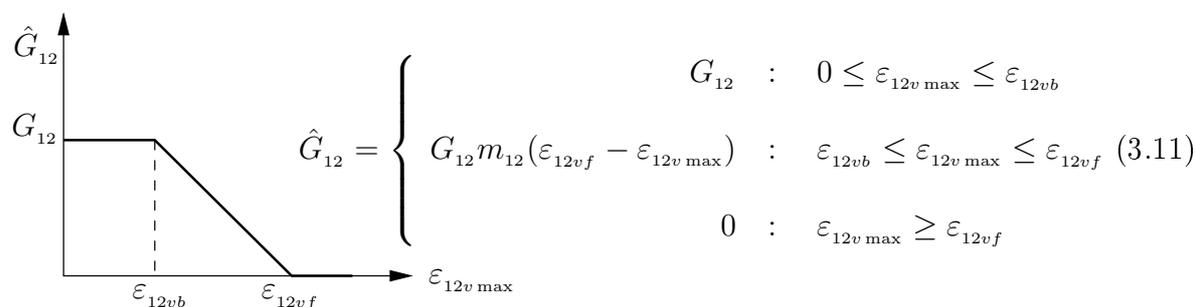
3.2.2 ist der Scherschadensverlauf  $\hat{G}_{12}$  von der Vergleichsdehnungsgeschichte abhängig und deswegen ein Funktional der maximalen, bereits aufgetretenen Vergleichsdehnung

$$\varepsilon_{12v \max} = \max_{s \leq t} [\varepsilon_{12v}(s)] ,$$

wobei  $\hat{G}_{12} = \tilde{G}_{12}(\varepsilon_{12v \max})$  gilt. Mit der Steigung in Gl. (3.10)

$$m_{12} = \frac{1}{\varepsilon_{12vf} - \varepsilon_{12vb}} \quad (3.10)$$

erhält man einen neuen Materialparameter, mit dem die Modellbeschreibung in Gl. (3.11) vereinfacht wird. Der Verlauf der Schubsteifigkeit wird wie folgt angenommen - s. Abb. 3.5.



**Abb. 3.5:** Schadensverlauf in Scherrichtung

Von einem festen, bestimmten Wert  $\varepsilon_{12vb}$  an, auch Anfangsvergleichsdehnung der Degradation genannt, fällt die Vergleichsdehnung linear bis zum endgültigen Versagen  $\varepsilon_{12vf}$  ab, wo der degradierte effektive Schubmodul null wird.

Anhand der vorgegebenen Anfangswerte für die Elastizitätsmoduli

$$E_1, \quad E_2 \quad \text{und} \quad G_{12}$$

und der angenommenen Steigungen

$$m_1, \quad m_2 \quad \text{und} \quad m_{12}$$

sowie der Anfangs- und Endwerte

$$\varepsilon_{11b}, \quad \varepsilon_{11f}, \quad \varepsilon_{22b}, \quad \varepsilon_{22f}, \quad \varepsilon_{12vb}, \quad \varepsilon_{12vf}$$

ist das Modell bis auf das Querdehnverhalten eindeutig beschrieben, das im Folgenden näher untersucht werden soll.

### 3.3 Annahmen für das Querdehnverhalten

Bei der vorliegenden Schädigungsmodellierung werden die prozessabhängigen Materialeigenschaften als Schadensvariable verwendet, die nun in die Komponenten der nachfolgenden Materialgleichungen eingebracht werden müssen [15, 54],

$$\{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \gamma_{12}\}^T = \hat{\mathbf{S}} \{T_{11} \quad T_{22} \quad T_{12}\}^T, \quad (3.12)$$

mit der Annahme, daß sich die Symmetrieeigenschaften des Materials während der Schädigungsentwicklung nicht ändern und demzufolge die geschädigte Nachgiebigkeitsmatrix die Form

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} & 0 \\ \hat{S}_{21} & \hat{S}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{S}_{44} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

annimmt.  $\mathbf{S}$  ist die entsprechende ungeschädigte Nachgiebigkeitsmatrix wie in Gl. (3.2). Die Nachgiebigkeiten in Gl. (3.13) stehen in unmittelbarem Zusammenhang zu den Prozess abhängigen Elastizitätsgrößen in den Gl. (3.6), (3.8) und (3.11) ebenso wie die Elastizitätskonstanten zu den  $S_{ij}$ -Werten in Gl. (3.3) im ungeschädigten Fall:

$$\hat{S}_{11} = \frac{1}{\hat{E}_1}, \quad \hat{S}_{12} = -\frac{\hat{\nu}_{21}}{\hat{E}_2}, \quad \hat{S}_{21} = -\frac{\hat{\nu}_{12}}{\hat{E}_1}, \quad \hat{S}_{22} = \frac{1}{\hat{E}_2} \quad \text{und} \quad \hat{S}_{44} = \frac{1}{\hat{G}_{12}} \quad (3.14)$$

Die Komponenten von  $\mathbf{S}$  sind Ingenieurgrößen, die durch Superposition von einaxialen Beanspruchungen hergeleitet worden sind. Durch die Inversion der erhaltenen Nachgiebigkeitsmatrix ergeben sich die Komponenten der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}$  - s. Abschnitt 3.1.1. Wie man in Gl. (3.14) erkennen kann, ergeben sich die Nachgiebigkeiten außerhalb der Hauptdiagonalen ( $\hat{S}_{12}$  und  $\hat{S}_{21}$ ) als Quotient von zwei unterschiedlichen Materialkennwerten, nämlich aus dem Querdehnparameter und aus dem degradierten Elastizitätsmodul. Es ist zu vermuten, dass die Degradationen der beiden Eigenschaften demnach gekoppelt ist. Physikalische Schlüsse hierzu werden im Folgenden näher erläutert.

### 3.3.1 Modellvorstellung für das Querdehnverhalten

Das Phänomen der Querkontraktion beschreibt das Verformungsverhalten eines Körpers quer zur Belastungsrichtung unter dem Einfluß einer Zugkraft bzw. Druckkraft. Der Körper reagiert in Richtung der Kraft mit einer Längenänderung und senkrecht dazu mit einer Verringerung oder Vergrößerung seines Durchmessers. Die relative Durchmesseränderung ist proportional zu der relativen Längenänderung, wobei der Proportionalitätsfaktor eine dimensionslose Größe ist, bekannt als Querkontraktionszahl. Für unidirektionales Laminat (orthotropes Material) wird je nach Belastungsart die große von der kleinen Querkontraktionszahl [1, 53] unterschieden. Der großen Querkontraktionszahl liegt Belastung in Faserrichtung zugrunde. Der Last in Richtung quer zur Faser liegt die kleine Querkontraktionszahl zugrunde, die das Verhältnis der Längenänderung in Faserrichtung bezüglich der Dehnung quer zur Faser bei Belastung quer zu Faser angibt. Die Berücksichtigung der Gl. (3.14) führt zu der Verknüpfung der Querkontraktionszahlen und der Elastizitätsmoduli eines geschädigten, unidirektionalen Laminats. Ausgehend von physikalischen Beobachtungen und Überlegungen wird vorausgesetzt, dass der Quotient  $\hat{\nu}_{12}/\hat{E}_1$  (Nachgiebigkeiten außerhalb der Hauptdiagonale) während des gesamten Schädigungsprozesses unverändert bleibt - s. [18, 38]. Risse parallel zu den Fasern behindern noch begünstigen das unbehinderte Querdehnverhalten bei Belastung in Faserrichtung. Dieser Ansatz bedeutet, dass  $\hat{\nu}_{12}$  und  $\hat{E}_1$  während der Deformation proportional zueinander sind. Dadurch ist auch die große Querkontraktionszahl

$\hat{\nu}_{12}$  ein Funktional

$$\mathcal{F}[\varepsilon_{11}(\tau)]_{\tau > -\infty}^{t=\tau}$$

der Längsdehnungsgeschichte ebenso wie auch  $\hat{E}_1$  gemäß Gl. (3.6) es ist und es gilt:  $\hat{\nu}_{12} = \tilde{\nu}_{12}(\varepsilon_{11 \max})$ . Der Bruch  $\hat{\nu}_{21}/\hat{E}_2$  (Nachgiebigkeiten außerhalb der Hauptdiagonale) soll aus physikalischen Gründen - Potentialeigenschaft der Elastizitätstheorie - ebenfalls konstant sein. Das bedeutet  $\hat{\nu}_{21}$  ist proportional zu  $\hat{E}_2$ . Somit ist die kleine Querkontraktionszahl  $\hat{\nu}_{21}$  auch ein Funktional

$$\mathcal{F}[\varepsilon_{22}(\tau)]_{\tau > -\infty}^{t=\tau}$$

der Querdehnungsgeschichte sowie auch  $\hat{E}_2$  und es gilt:  $\hat{\nu}_{21} = \tilde{\nu}_{21}(\varepsilon_{22 \max})$ . Die Querkontraktionszahlen werden abhängig von der Dehnungsgeschichte im Folgenden graphisch aufgetragen - s. Abschnitte 3.3.2 und 3.3.3.

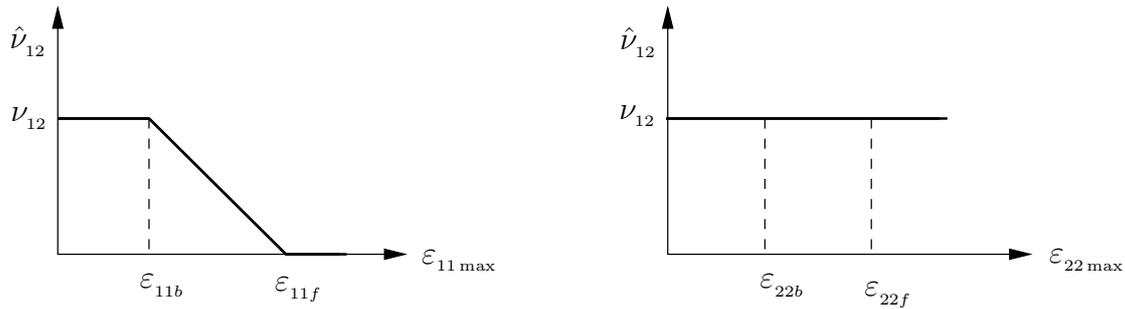
### 3.3.2 Große Querkontraktionszahl

Wie bereits in Abschnitt 3.3.1 erwähnt, ist die geschädigte große Querkontraktionszahl  $\hat{\nu}_{12}$  proportional zum Steifigkeitsabfall in Faserrichtung  $\hat{E}_1$ . Sie ergibt sich wegen der Stetigkeitsvoraussetzungen aus den Gln. (3.3) und (3.22) und drückt sich dann wie folgt aus

$$\hat{\nu}_{12}(\varepsilon_{11 \max}) = -S_{21} \hat{E}_1(\varepsilon_{11 \max}), \quad (3.15)$$

mit der Nachgiebigkeit  $S_{21}$  als Proportionalitätsfaktor. Der Verlauf der großen Querkontraktionszahl  $\hat{\nu}_{12}$  soll sowohl in Abhängigkeit der maximalen Längsdehnungen  $\varepsilon_{11 \max}$  als auch in Abhängigkeit der maximalen Querdehnungen  $\varepsilon_{22 \max}$  abgebildet werden. Allerdings haben die Querdehnungen aus physikalischen Gründen keinen nennenswerten Einfluss auf die Querkontraktion bei Belastung in Faserrichtung des durch Risse parallel zu den Fasern geschädigten Materials. Deswegen wird auch die große Querkontraktionszahl unabhängig von der maximalen Querdehnungen. Daher lässt sich deren Verlauf in Abhängigkeit der Querdehnungen als konstant annehmen - s. Abb. 3.6. Die mathematische Beschreibung von  $\hat{\nu}_{12}$  ist in Gl. (3.16) angegeben und in Abb. 3.6 zur Darstellung gebracht.

$$\hat{\nu}_{12} = \begin{cases} \nu_{12} & : & \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11b} \\ (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) m_1 \nu_{12} & : & \varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11f} \\ 0 & : & \varepsilon_{11 \max} \geq \varepsilon_{11f} \end{cases} \quad (3.16)$$



**Abb. 3.6:** Degradation der großen Querkontraktionszahl

**Fazit:** Es ist aus obigen Annahmen offensichtlich, dass aus physikalischen Voraussetzungen die große Querkontraktionszahl  $\hat{\nu}_{12}$  nur von der maximal erreichten Längsdehnung  $\epsilon_{11 \max}$  beeinflusst ist und die Querdehnungen keine Wirkung haben.

### 3.3.3 Kleine Querkontraktionszahl

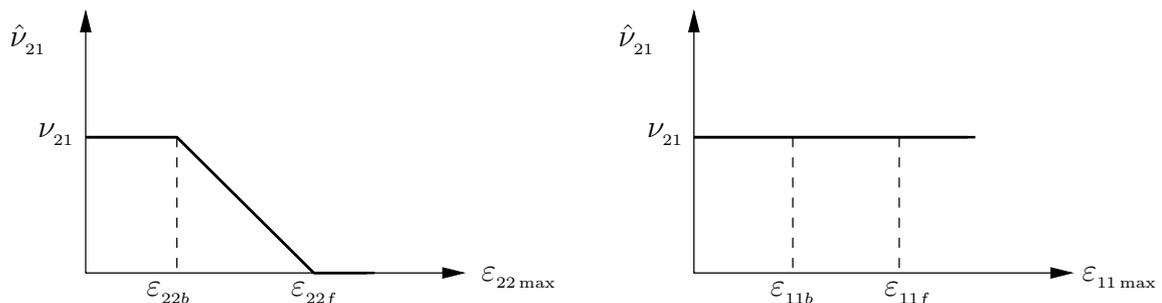
Analog zur obigen Ausführung soll ebenso die kleine Querkontraktionszahl  $\hat{\nu}_{21}$  proportional zur Steifigkeit in Querrichtung  $\hat{E}_2$  sein wie bereits erläutert. Mit Hilfe der Gln. (3.3) und (3.22) ergibt sich für die kleine Querkontraktionszahl der folgende Zusammenhang:

$$\hat{\nu}_{21}(\epsilon_{22 \max}) = -S_{12} \hat{E}_2(\epsilon_{22 \max}) \quad (3.17)$$

mit der Nachgiebigkeit  $S_{12}$  als Verhältnisgröße. Aus physikalischen Annahmen bietet sich die mathematische Beschreibung der kleinen Querkontraktionszahl wie folgt an:

$$\hat{\nu}_{21} = \begin{cases} \nu_{21} & : \quad \epsilon_{22 \max} \leq \epsilon_{22b} \\ (\epsilon_{22f} - \epsilon_{22 \max}) m_2 \nu_{21} & : \quad \epsilon_{22b} \leq \epsilon_{22 \max} \leq \epsilon_{22f} \\ 0 & : \quad \epsilon_{22 \max} \geq \epsilon_{22f} \end{cases} \quad (3.18)$$

Denn es wird auch an der Haupsymmetrie des konstitutiven Tensors im Sinne der Überlegungen von Gl. (2.83) festgehalten. Die graphische Darstellung erfolgt nicht nur in Abhängigkeit der maximalen Querdehnung  $\epsilon_{22 \max}$ , sondern auch in Abhängigkeit der größten Längsdehnung  $\epsilon_{11 \max}$ , die laut Modellvorstellung keinen Einfluss auf die Steifigkeit in Querrichtung haben soll - s. Abschnitt 3.3.1. Es entsteht daraus die mathematische Darlegung in Gl. (3.18) mit der Veranschaulichung in Abb. 3.7.



**Abb. 3.7:** Degradation der kleinen Querkontraktionszahl

**Fazit:** Da die Schubverzerrung  $\varepsilon_{12}$  keine Einwirkung auf die Querkontraktionszahlen hat, ist die kleine Querkontraktionszahl nur von der maximalen Querdehnung  $\varepsilon_{22 \max}$  abhängig und ebenso die große Querkontraktionszahl nur von der maximalen Längsdehnung  $\varepsilon_{11 \max}$ .

### 3.3.4 Resümee zum Schädigungseinfluß auf das Querdehnverhalten

Wie bereits in Gl. (3.14) erwähnt, sind die Querdehnparameter und die Elastizitätsmoduli in den Komponenten außerhalb der Hauptdiagonale der Nachgiebigkeitsmatrix gekoppelt. Demnach neutralisieren sich deren Degradationen im Verlauf des Schädigungsprozesses, was dazu führt, dass die Matrixkomponenten außerhalb der Hauptdiagonale unverändert bleiben; d.h. *Nachgiebigkeiten außerhalb der Hauptdiagonale bleiben während eines Schädigungsprozesses unverändert*, bzw. nur Komponenten auf der Hauptdiagonale der Nachgiebigkeitsmatrix ( $S_{11}$ ,  $S_{22}$ , und  $S_{44}$ ) degradieren während eines Schädigungsprozesses. Also gilt:

$$S_{12} = \hat{S}_{12} \quad \text{und} \quad S_{21} = \hat{S}_{21}. \quad (3.19)$$

Daraus folgt mit Hilfe der Gln. (3.3) und (3.14) der folgende Zusammenhang<sup>1</sup> für die geschädigten Querkontraktionszahlen und Elastizitätsmoduli:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\hat{\nu}_{21}}{\hat{E}_2} \quad \text{und} \quad \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\hat{\nu}_{12}}{\hat{E}_1}. \quad (3.20)$$

Ferner gilt aufgrund der Wegunabhängigkeit der Belastung im Fall des elastischen Materialverhaltens die Symmetrie des Nachgiebigkeitstensors in Matrizenform:

$$S_{12} = S_{21} \quad \text{und} \quad \hat{S}_{12} = \hat{S}_{21}. \quad (3.21)$$

Die Verknüpfung der Gln. (3.19), (3.20) und (3.21) führt zu folgendem Zusammenhang:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\hat{\nu}_{12}}{\hat{E}_1} = \frac{\hat{\nu}_{21}}{\hat{E}_2} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (3.22)$$

und somit zu einem *orthotropen, elastischen ebenen Materialmodell mit Schädigung*.

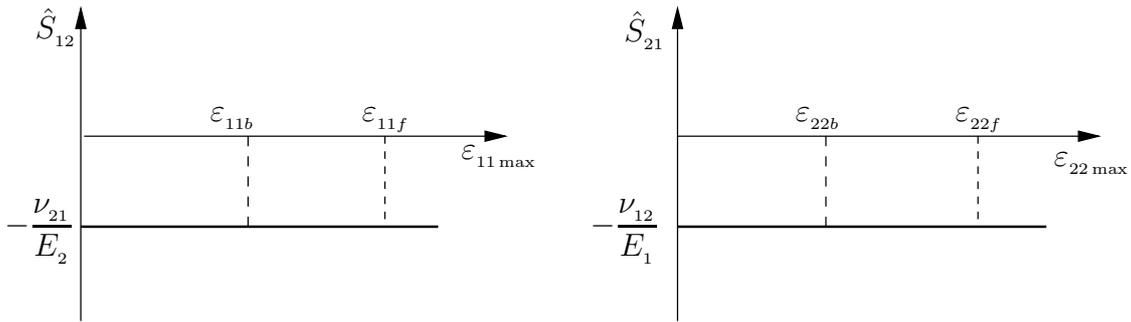
## 3.4 Darstellung der Nachgiebigkeiten des Faserverbundwerkstoffs

Für die im vorigen Abschnitt erwähnte geschädigte Nachgiebigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{S}}$  sind die Einzelkomponenten in Gl. (3.14) angegeben. Nach den bereits getroffenen Annahmen zur Schädigungsevolution bleiben die Komponenten außerhalb der Hauptdiagonale während des Schädigungsprozesses unverändert. Somit lassen sich die Nachgiebigkeiten  $\hat{S}_{12}$  und  $\hat{S}_{21}$  wie folgt darstellen.

$$\hat{S}_{12} = -\frac{\hat{\nu}_{21}}{\hat{E}_2} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} = S_{12} \quad \text{und} \quad \hat{S}_{21} = -\frac{\hat{\nu}_{12}}{\hat{E}_1} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = S_{21} \quad (3.23)$$

Selbstverständlich gilt auch für den geschädigten Verbundwerkstoff:  $\hat{S}_{12} = \hat{S}_{21}$

<sup>1</sup>Komponenten aus den Seiten 30 und 35



**Abb. 3.8:** Nachgiebigkeiten außerhalb der Hauptdiagonale

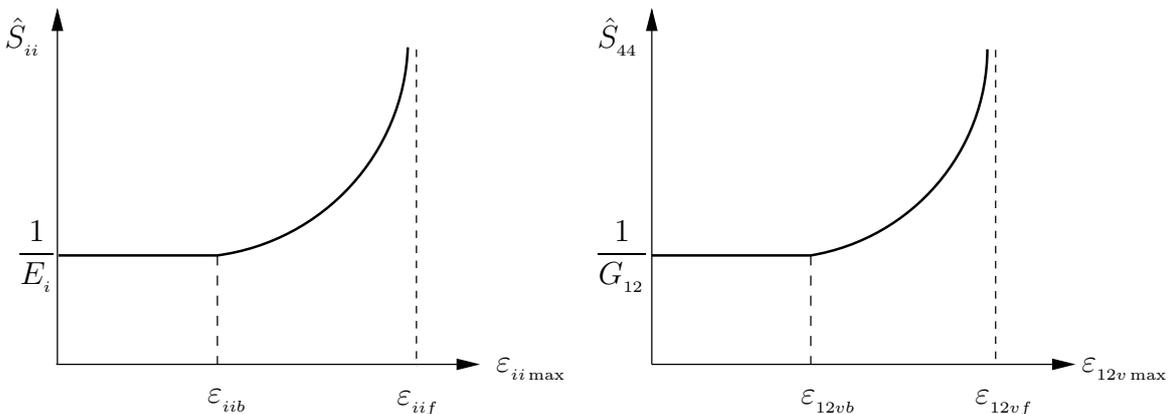
Lediglich die Komponenten der Hauptdiagonale ( $\hat{S}_{ii}$ ,  $i = 1, 2$  und  $\hat{S}_{44}$ ) verändern sich während der Prozessgeschichte. Diese Änderungen lassen sich mathematisch allgemein beschreiben,

$$\hat{S}_{ii} = \begin{cases} \frac{1}{E_i} & : \quad \epsilon_{ii \max} \leq \epsilon_{iib} \\ \frac{1}{E_i m_i (\epsilon_{iif} - \epsilon_{ii \max})} & : \quad \epsilon_{iib} \leq \epsilon_{ii \max} \leq \epsilon_{iif} \\ \infty & : \quad \epsilon_{ii \max} \geq \epsilon_{iif} \end{cases} \quad \text{für } i = 1, 2$$

und

$$\hat{S}_{44} = \begin{cases} \frac{1}{G_{12}} & : \quad 0 \leq \epsilon_{12v \max} \leq \epsilon_{12vb} \\ \frac{1}{G_{12} m_{12} (\epsilon_{12vf} - \epsilon_{12v \max})} & : \quad \epsilon_{12vb} \leq \epsilon_{12v \max} \leq \epsilon_{12vf} \\ \infty & : \quad \epsilon_{12v \max} \geq \epsilon_{12vf} \end{cases} ,$$

und durch die folgenden Kurvenverläufe veranschaulichen - s. Abb. 3.9.



**Abb. 3.9:** Nachgiebigkeiten auf der Hauptdiagonale

Mit zunehmender Norm der Dehnungsgeschichte erkennt man unschwer in Abb. 3.9, dass die Nachgiebigkeiten auf der Hauptdiagonalen  $\hat{S}_{11}$ ,  $\hat{S}_{22}$  und  $\hat{S}_{44}$  ab der Anfangsdegradation  $\varepsilon_{11b}$ ,  $\varepsilon_{22b}$  und  $\varepsilon_{12vb}$  ansteigen und bei der Versagensdehnungen  $\varepsilon_{11f}$ ,  $\varepsilon_{22f}$  und  $\varepsilon_{12vf}$  gegen unendlich streben. Die Nachgiebigkeiten  $\hat{S}_{11}$ ,  $\hat{S}_{22}$  und  $\hat{S}_{44}$  sind am Ende der Degradation über alle Maße groß.

Die Nachgiebigkeitsmatrix des geschädigten Laminats lautet also:

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{E}_1} & -\frac{\hat{\nu}_{21}}{\hat{E}_2} & 0 \\ -\frac{\hat{\nu}_{12}}{\hat{E}_1} & \frac{1}{\hat{E}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\hat{G}_{12}} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

# Kapitel 4

## Materialgleichung für Verbundwerkstoffe mit Schädigung

Die Idealisierung des Werkstoffverhaltens für spröde, unidirektional verstärkte Duro-  
mere anhand eines geschädigten Elastizitätsmodells - s. [35] und [42] - soll hier in die  
Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen eingebracht werden. Daraus erhält man  
die Materialgleichung für den geschädigten Werkstoff und mittels der zeitlichen Ablei-  
tung deren ratenabhängige Form. Dafür werden die Komponenten des Materialsteifig-  
keitstensors und des instantanen Materialsteifigkeitstensors angegeben.

### 4.1 Orthotrope ebene Materialsteifigkeit des geschä- digten Laminats

Für die weitere Anwendung muß das Schädigungsmodell steifigkeitsbasiert vorliegen  
und die Schädigungsentwicklung ist verzerrungskontrolliert zu formulieren. Zu jedem  
Materialpunkt können zu einem vorgegebenen Verzerrungszustand bei Kenntnis der  
Belastungsgeschichte die Spannungen und die Materialsteifigkeitstangente eindeutig be-  
stimmt werden:

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{C}} \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.1)$$

mit

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & 0 \\ \hat{C}_{21} & \hat{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_{44} \end{bmatrix}$$

als geschädigte Steifigkeitsmatrix. Analog zur Gl. (3.4) ergeben sich die Komponenten  
der geschädigten Steifigkeitsmatrix durch die Inversion der geschädigten Nachgiebig-  
keitsmatrix in Gl. (3.24) ( $\hat{\mathbf{S}}^{-1} = \hat{\mathbf{C}}$ ):

$$\begin{aligned} \hat{C}_{11} &= \frac{\hat{E}_1}{1 - \hat{\nu}_{12}\hat{\nu}_{21}}, & \hat{C}_{12} &= \frac{\hat{\nu}_{12}\hat{E}_2}{1 - \hat{\nu}_{12}\hat{\nu}_{21}}, & \hat{C}_{21} &= \frac{\hat{\nu}_{21}\hat{E}_1}{1 - \hat{\nu}_{12}\hat{\nu}_{21}} = \hat{C}_{12}, \\ \hat{C}_{22} &= \frac{\hat{E}_2}{1 - \hat{\nu}_{12}\hat{\nu}_{21}} & \text{und} & & \hat{C}_{44} &= \hat{G}_{12}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die abgeleiteten Beziehungen beschreiben somit ein orthotropes, steifigkeitsbasiertes Schädigungsmodell, wobei die Normalspannungen  $T_{11}$  und  $T_{22}$  von der Schubspannung  $T_{12}$  in den Materialgleichungen entkoppelt sind.

**Fazit:** Die elastischen Materialkonstanten  $\hat{E}_1$  und  $\hat{E}_2$  (Elastizitätsmoduli in Faser- und Querrichtung) sind unabhängig vom zeitlichen Verlauf der Schubverzerrung  $\varepsilon_{12 \max}$ , während der eingeführte effektive Schubmodul  $\hat{G}_{12}$  von der Vergleichsdehnung  $\varepsilon_{12v \max}$  beeinflusst ist, die wiederum eine Funktion der Schubverzerrungen  $\varepsilon_{12 \max}$  sowie der Längs- und Querdehnungen  $\varepsilon_{11 \max}$  bzw.  $\varepsilon_{22 \max}$  ist - s. Gl. (3.9).

## 4.2 Herleitung der ratenabhängigen Materialgleichung

Es wird die konstitutive Relation für die Schädigung im Materialmodell laut Gl. (4.1) betrachtet:

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varepsilon} .$$

Leitet man diese Relation nach der Zeit ab ( $\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{dt}(\phantom{x})$ ), so entsteht die ratenabhängige Materialgleichung - s. Gl. (2.95) -, die im Folgenden in VOIGTscher Notation,

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} , \quad (4.3)$$

angegeben wird. Sie dient als Basis für die Singularitätsanalyse und wird in Gl. (4.7) in Komponentenschreibweise angegeben. Wie zuvor erwähnt - s. Gl. (2.95) - ist der instantane Materialtensor  $\overset{4}{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\varepsilon})$  von der Dehnung  $\boldsymbol{\varepsilon}$  abhängig.

Durch die VOIGT-Notation wird die tensorielle Materialgleichung in die Vektor-Matrix-Form überführt. Somit wird der Materialsteifigkeitstensor als Matrix - s. Gl. (4.7) - und der Dehnungstensor als Vektor unter Bezugnahme auf die kinematische Beziehung wie folgt dargestellt<sup>1</sup>:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11 \max} \\ \varepsilon_{22 \max} \\ 2\varepsilon_{12 \max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{bmatrix} . \quad (4.4)$$

Die zeitliche Ableitung der Materialgleichung (4.1) ergibt nun die ratenabhängige Form

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\hat{\mathbf{C}}} \boldsymbol{\varepsilon} + \hat{\mathbf{C}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.5)$$

mit  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  als Dehnungsgeschwindigkeitsvektor. Der wesentliche Vorteil von Gl. (4.3) gegenüber der Beziehung in Gl. (4.1) besteht darin, dass diese Gleichung linear in der wesentlichen Variablen  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  ist und die Zustandsänderungen beschreibt. Aus der Gl. (4.3) können daher charakteristische Änderungen im Materialverhalten, wie sie bei Bruchvorgängen erwartet werden, mit Methoden der linearen Algebra ermittelt werden.

---

<sup>1</sup>s. Fußnote Seite 28

### 4.2.1 Bestimmung des instantanen Materialsteifigkeitstensors

Für den instantanen Materialsteifigkeitstensor  $\mathbf{L}$  gemäß Gl. (4.3) und Gl. (4.5) werden unter Verwendung von Gl. (4.4) die Komponenten hergeleitet:

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_{11} \\ \dot{T}_{22} \\ \dot{T}_{12} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{C}_{11} u_{1,1} + \dot{C}_{12} u_{2,2} \\ \dot{C}_{12} u_{1,1} + \dot{C}_{22} u_{2,2} \\ \dot{C}_{44} u_{1,2} + \dot{C}_{44} u_{2,1} \end{bmatrix}}_{\dot{\hat{C}} \boldsymbol{\epsilon}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \hat{C}_{11} \dot{u}_{1,1} + \hat{C}_{12} \dot{u}_{2,2} \\ \hat{C}_{12} \dot{u}_{1,1} + \hat{C}_{22} \dot{u}_{2,2} \\ \hat{C}_{44} \dot{u}_{1,2} + \hat{C}_{44} \dot{u}_{2,1} \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{C}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}};$$

es folgt:

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_{11} \\ \dot{T}_{22} \\ \dot{T}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{C}_{11} u_{1,1} + \dot{C}_{12} u_{2,2} + \hat{C}_{11} \dot{u}_{1,1} + \hat{C}_{12} \dot{u}_{2,2} \\ \dot{C}_{12} u_{1,1} + \dot{C}_{22} u_{2,2} + \hat{C}_{12} \dot{u}_{1,1} + \hat{C}_{22} \dot{u}_{2,2} \\ \dot{C}_{44} u_{1,2} + \dot{C}_{44} u_{2,1} + \hat{C}_{44} \dot{u}_{1,2} + \hat{C}_{44} \dot{u}_{2,1} \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der nachstehenden Bezeichnungen für die einzelnen partiellen Ableitungen der geschädigten Steifigkeitskomponenten,

$$A_{1111} = \frac{\partial \hat{C}_{11}}{\partial \varepsilon_{11 \max}} \quad \text{und} \quad A_{1122} = \frac{\partial \hat{C}_{11}}{\partial \varepsilon_{22 \max}} \quad \Rightarrow \quad \dot{C}_{11} = A_{1111} \dot{u}_{1,1} + A_{1122} \dot{u}_{2,2},$$

$$A_{1211} = \frac{\partial \hat{C}_{12}}{\partial \varepsilon_{11 \max}} \quad \text{und} \quad A_{1222} = \frac{\partial \hat{C}_{12}}{\partial \varepsilon_{22 \max}} \quad \Rightarrow \quad \dot{C}_{12} = A_{1211} \dot{u}_{1,1} + A_{1222} \dot{u}_{2,2},$$

$$A_{2211} = \frac{\partial \hat{C}_{22}}{\partial \varepsilon_{11 \max}} \quad \text{und} \quad A_{2222} = \frac{\partial \hat{C}_{22}}{\partial \varepsilon_{22 \max}} \quad \Rightarrow \quad \dot{C}_{22} = A_{2211} \dot{u}_{1,1} + A_{2222} \dot{u}_{2,2},$$

$$\chi = \frac{\partial \hat{C}_{44}}{\partial \varepsilon_{12v \max}}, \quad A_{4411} = \frac{\partial \varepsilon_{12v \max}}{\partial \varepsilon_{11 \max}}, \quad A_{4422} = \frac{\partial \varepsilon_{12v \max}}{\partial \varepsilon_{22 \max}}, \quad A_{4412} = \frac{\partial \varepsilon_{12v \max}}{\partial \varepsilon_{12 \max}}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{C}_{44} = \chi [A_{4411} \dot{u}_{1,1} + A_{4422} \dot{u}_{2,2} + \frac{1}{2} A_{4412} (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})],$$

(4.6)

besteht nach Umstellung folgender Zusammenhang :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{T}_{11} \\ \dot{T}_{22} \\ \dot{T}_{12} \end{bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} \hat{C}_{11} + A_{1111}u_{1,1} & \hat{C}_{12} + A_{1122}u_{1,1} & 0 \\ +A_{1211}u_{2,2} & +A_{1222}u_{2,2} & \\ \hat{C}_{12} + A_{1211}u_{1,1} & \hat{C}_{22} + A_{1222}u_{1,1} & 0 \\ +A_{2211}u_{2,2} & +A_{2222}u_{2,2} & \\ \chi A_{4411}(u_{1,2} + u_{2,1}) & \chi A_{4422}(u_{1,2} + u_{2,1}) & \hat{C}_{44} + \frac{1}{2}\chi A_{4412}(u_{1,2} + u_{2,1}) \end{bmatrix}}^{\mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_{1,1} \\ \dot{u}_{2,2} \\ \dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\
 &= \mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} .
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Für die einzelnen Komponenten des instantanen Materialsteifigkeitstensors

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{1111} & L_{1122} & L_{1112} \\ L_{2211} & L_{2222} & L_{2212} \\ L_{1211} & L_{1222} & L_{1212} \end{bmatrix}$$

gilt damit

$$\begin{aligned}
 L_{1111} &= \hat{C}_{11} + A_{1111}u_{1,1} + A_{1211}u_{2,2} \quad , \quad L_{1122} = \hat{C}_{12} + A_{1122}u_{1,1} + A_{1222}u_{2,2} \quad , \\
 L_{2211} &= \hat{C}_{12} + A_{1211}u_{1,1} + A_{2211}u_{2,2} \quad , \quad L_{2222} = \hat{C}_{22} + A_{1222}u_{1,1} + A_{2222}u_{2,2} \quad , \\
 L_{1211} &= \chi A_{4411}(u_{1,2} + u_{2,1}) \quad , \quad L_{1222} = \chi A_{4422}(u_{1,2} + u_{2,1}) \quad , \\
 L_{1212} &= \hat{C}_{44} + \frac{1}{2}\chi A_{4412}(u_{1,2} + u_{2,1}) \quad , \quad L_{1112} = L_{2212} = 0 \quad .
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Aus Gl. (4.8) folgt, dass der instantane Materialsteifigkeitstensor stets von der Form

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{1111} & L_{1122} & 0 \\ L_{2211} & L_{2222} & 0 \\ L_{1211} & L_{1222} & L_{1212} \end{bmatrix}$$

ist.

## 4.2.2 Komponenten des instantanen Materialsteifigkeitstensors

Es wird hier zunächst die Aufteilung des Verzerrungsraumes  $\mathbf{\epsilon}$  - s. Abb. 4.1 - vorgestellt und dann die zugehörigen Matrizen angegeben.

**Aufteilung des Verzerrungsraumes in Teilgebiete  $\mathbf{\epsilon}^I$  bis  $\mathbf{\epsilon}^{VIII}$**

$$\mathbf{\epsilon}^I := \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11b} \\ (\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max}, \varepsilon_{12v \max}) \mid \varepsilon_{22 \max} \leq \varepsilon_{22b} \\ 0 \leq \varepsilon_{12v \max} \leq \varepsilon_{12vb} \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{\epsilon}^{II} := \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11f} \\ (\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max}, \varepsilon_{12v \max}) \mid \varepsilon_{22 \max} \leq \varepsilon_{22b} \\ 0 \leq \varepsilon_{12v \max} \leq \varepsilon_{12vb} \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{\epsilon}^{III} := \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11b} \\ (\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max}, \varepsilon_{12v \max}) \mid \varepsilon_{22b} \leq \varepsilon_{22 \max} \leq \varepsilon_{22f} \\ 0 \leq \varepsilon_{12v \max} \leq \varepsilon_{12vb} \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{\epsilon}^{IV} := \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11f} \\ (\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max}, \varepsilon_{12v \max}) \mid \varepsilon_{22b} \leq \varepsilon_{22 \max} \leq \varepsilon_{22f} \\ 0 \leq \varepsilon_{12v \max} \leq \varepsilon_{12vb} \end{array} \right\} \quad (4.12)$$

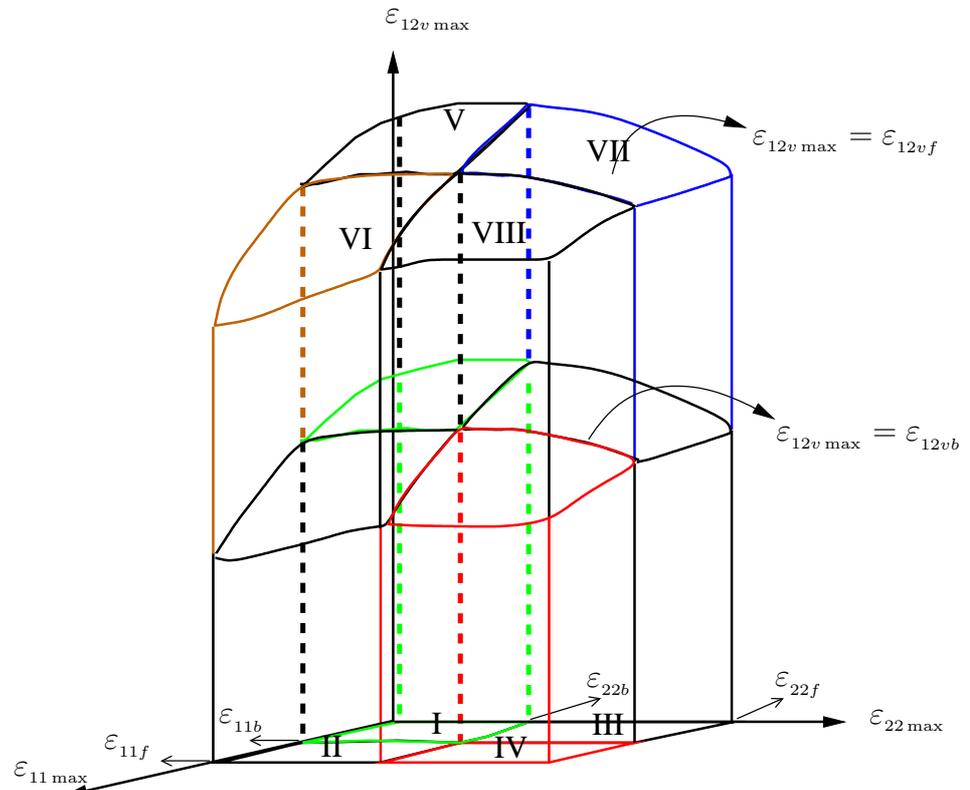
$$\mathbf{\epsilon}^V := \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11b} \\ (\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max}, \varepsilon_{12v \max}) \mid \varepsilon_{22 \max} \leq \varepsilon_{22b} \\ \varepsilon_{12vb} \leq \varepsilon_{12v \max} \leq \varepsilon_{12vf} \end{array} \right\} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{\epsilon}^{VI} := \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11f} \\ (\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max}, \varepsilon_{12v \max}) \mid \varepsilon_{22 \max} \leq \varepsilon_{22b} \\ \varepsilon_{12vb} \leq \varepsilon_{12v \max} \leq \varepsilon_{12vf} \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

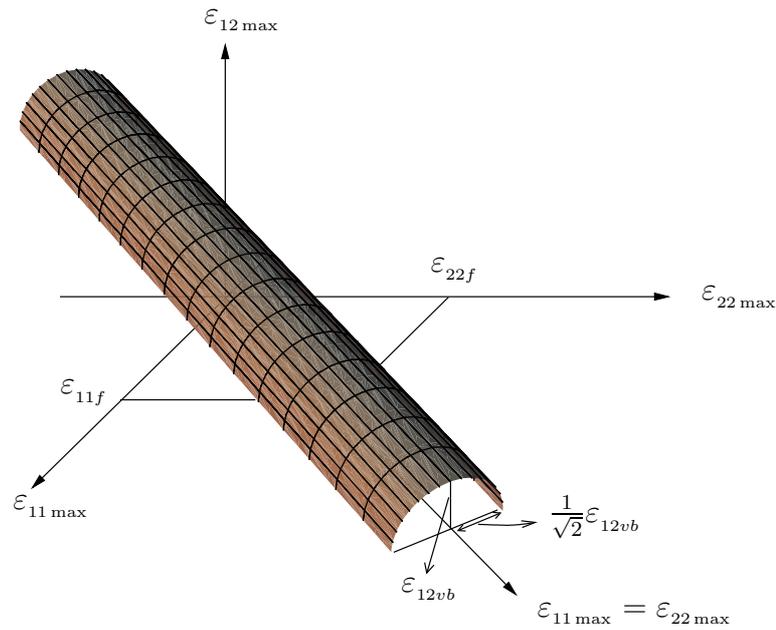
$$\boldsymbol{\epsilon}^{VII} := \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11b} \\ (\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max}, \varepsilon_{12v \max}) \mid \varepsilon_{22b} \leq \varepsilon_{22 \max} \leq \varepsilon_{22f} \\ \varepsilon_{12vb} \leq \varepsilon_{12v \max} \leq \varepsilon_{12vf} \end{array} \right\} \quad (4.15)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{VIII} := \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11f} \\ (\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max}, \varepsilon_{12v \max}) \mid \varepsilon_{22b} \leq \varepsilon_{22 \max} \leq \varepsilon_{22f} \\ \varepsilon_{12vb} \leq \varepsilon_{12v \max} \leq \varepsilon_{12vf} \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

In der Abb. 4.1 ist die *prinzipielle Aufteilung* des Raumes  $\boldsymbol{\epsilon}$  dargestellt. Die beiden Flächen  $\varepsilon_{12v \max} = \varepsilon_{12vb}$  und  $\varepsilon_{12v \max} = \varepsilon_{12vf}$  sind jeweils Teile einer elliptischen Zylinderfläche mit der Achse  $\varepsilon_{11 \max} = \varepsilon_{22 \max}$ . Die Fläche  $\varepsilon_{12v \max} = \varepsilon_{12vb}$  schneidet die Viertelebene  $\{(\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max}, 0) \mid \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11f}, \varepsilon_{22 \max} \leq \varepsilon_{22f}\}$  längs Parallelen zur Geraden  $\varepsilon_{11 \max} = \varepsilon_{22 \max}$ , s. Abb. 4.2 .



**Abb. 4.1:** Aufteilung des Verzerrungsraumes



**Abb. 4.2:** Elliptische Zylinderfläche  $\varepsilon_{12 v \max} = \varepsilon_{12 v b}$

Mit den zuvor eingeführten geschädigten Materialparametern (3.6) (3.8) (3.11) (3.16) (3.18) und den Steigungen - s. Gln. (3.5) (3.7) und (3.10) -

$$m_1 = \frac{1}{\varepsilon_{11 f} - \varepsilon_{11 b}}, \quad m_2 = \frac{1}{\varepsilon_{22 f} - \varepsilon_{22 b}} \quad \text{und} \quad m_{12} = \frac{1}{\varepsilon_{12 v f} - \varepsilon_{12 v b}}$$

erhalten die geschädigten Steifigkeits- und Tangentensteifigkeitsmatrizen folgende Gestalt.

### Steifigkeitsmatrix

Für die Steifigkeitsmatrix ergibt sich gemäß Gl. (4.2):

$$\hat{C}_{11} = \begin{cases} \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^I, \boldsymbol{\epsilon}^V \\ \frac{m_1 E_1 (\varepsilon_{11 f} - \varepsilon_{11 \max})}{1 - \nu_{12} \nu_{21} m_1 (\varepsilon_{11 f} - \varepsilon_{11 \max})} & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^{II}, \boldsymbol{\epsilon}^{VI} \\ \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21} m_2 (\varepsilon_{22 f} - \varepsilon_{22 \max})} & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^{III}, \boldsymbol{\epsilon}^{VII} \\ \frac{m_1 E_1 (\varepsilon_{11 f} - \varepsilon_{11 \max})}{1 - \nu_{12} \nu_{21} m_1 m_2 (\varepsilon_{22 f} - \varepsilon_{22 \max}) (\varepsilon_{11 f} - \varepsilon_{11 \max})} & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^{IV}, \boldsymbol{\epsilon}^{VIII} \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\hat{C}_{22} = \begin{cases} \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^I, \boldsymbol{\epsilon}^V \\ \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}m_1(\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max})} & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^{II}, \boldsymbol{\epsilon}^{VI} \\ \frac{m_2 E_2 (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22\max})}{1 - \nu_{12}\nu_{21}m_2(\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22\max})} & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^{III}, \boldsymbol{\epsilon}^{VII} \\ \frac{m_2 E_2 (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22\max})}{1 - \nu_{12}\nu_{21}m_1m_2(\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22\max})(\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max})} & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^{IV}, \boldsymbol{\epsilon}^{VIII} \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\hat{C}_{12} = \begin{cases} \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^I, \boldsymbol{\epsilon}^V \\ \frac{\nu_{12} m_1 E_2 (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max})}{1 - \nu_{12}\nu_{21}m_1(\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max})} & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^{II}, \boldsymbol{\epsilon}^{VI} \\ \frac{\nu_{12} m_2 E_2 (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22\max})}{1 - \nu_{12}\nu_{21}m_2(\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22\max})} & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^{III}, \boldsymbol{\epsilon}^{VII} \\ \frac{\nu_{12} m_1 m_2 E_2 (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max})(\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22\max})}{1 - \nu_{12}\nu_{21}m_1m_2(\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22\max})(\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max})} & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^{IV}, \boldsymbol{\epsilon}^{VIII} \end{cases} \quad (4.19)$$

und  $\hat{C}_{21} = \hat{C}_{12}$ ,

$$\hat{C}_{44} = \begin{cases} G_{12} & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^K, K = I, \dots, IV \\ m_{12} G_{12} (\varepsilon_{12vf} - \varepsilon_{12v\max}) = & \\ m_{12} G_{12} \left( \varepsilon_{12vf} - \sqrt{(\varepsilon_{11\max} - \varepsilon_{22\max})^2 + \varepsilon_{12\max}^2} \right) & : \text{ in } \boldsymbol{\epsilon}^K, K = V, \dots, VIII \end{cases} \quad (4.20)$$

### Tangentensteifigkeitsmatrix

Es ist

$$\dot{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial \varepsilon_{11\max}} & \frac{\partial T_{11}}{\partial \varepsilon_{22\max}} & \frac{1}{2} \frac{\partial T_{11}}{\partial \varepsilon_{12\max}} \\ \frac{\partial T_{22}}{\partial \varepsilon_{11\max}} & \frac{\partial T_{22}}{\partial \varepsilon_{22\max}} & \frac{1}{2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \varepsilon_{12\max}} \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial \varepsilon_{11\max}} & \frac{\partial T_{12}}{\partial \varepsilon_{22\max}} & \frac{1}{2} \frac{\partial T_{12}}{\partial \varepsilon_{12\max}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11\max} \\ \dot{\varepsilon}_{22\max} \\ 2\dot{\varepsilon}_{12\max} \end{bmatrix} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.21)$$

mit  $\mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon})$  aus Gl. (4.7). Die Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon})$  ist gemäß Gl. (4.7) bzw.

Gl. (4.8) für alle Teilräume  $\boldsymbol{\epsilon}^K$ ,  $K = I, \dots, VIII$ , zu ermitteln. Insbesondere ist in  $\boldsymbol{\epsilon}^K$ ,  $K = I, \dots, IV$ , wegen  $\chi = 0$

$$L_{1211} = L_{1222} = 0 \quad \text{und} \quad L_{1212} = G_{12}. \quad (4.22)$$

Ferner bekommt man in  $\boldsymbol{\epsilon}^K$ ,  $K = V, \dots, VIII$ , wegen

$$\chi = \frac{\partial \hat{C}_{44}}{\partial \varepsilon_{12v \max}} = -m_{12} G_{12}, \quad A_{4411} = \frac{\partial \varepsilon_{12v \max}}{\partial \varepsilon_{11 \max}} = \frac{\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max}}{\varepsilon_{12v \max}},$$

$$A_{4422} = \frac{\partial \varepsilon_{12v \max}}{\partial \varepsilon_{22 \max}} = -\frac{\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max}}{\varepsilon_{12v \max}}, \quad A_{4412} = \frac{\partial \varepsilon_{12v \max}}{\partial \varepsilon_{12 \max}} = \frac{\varepsilon_{12 \max}}{\varepsilon_{12v \max}}$$

die Komponenten

$$L_{1211} = -m_{12} G_{12} \frac{2\varepsilon_{12 \max} (\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})}{\varepsilon_{12v \max}} = -L_{1222} \quad (4.23)$$

und

$$\begin{aligned} L_{1212} &= m_{12} G_{12} \left[ \varepsilon_{12vf} - \varepsilon_{12v \max} - \frac{\varepsilon_{12 \max}^2}{\varepsilon_{12v \max}} \right] \\ &= m_{12} G_{12} \left[ \varepsilon_{12vf} - \frac{(\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})^2 + 2\varepsilon_{12 \max}^2}{\varepsilon_{12v \max}} \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Tangentensteifigkeitsmatrix im Raum  $\boldsymbol{\epsilon}^K$  wird mit  $\mathbf{L}^K = \left( L_{ijkl}^K \right)$ ,  $K = I, \dots, VIII$ , bezeichnet. Man erhält:

$\mathbf{L}^I$

$$L_{1111}^I = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad L_{1122}^I = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad L_{2211}^I = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad L_{2222}^I = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (4.25)$$

$$L_{1112}^I = L_{2212}^I = 0, \quad L_{1211}^I = -L_{1222}^I = 0 \quad \text{und} \quad L_{1212}^I = G_{12}.$$

$\mathbf{L}^{II}$

$$L_{1111}^{II} = \frac{m_1 E_1}{D_{II}^2} \left\{ \varepsilon_{11f} - 2\varepsilon_{11 \max} - \nu_{21} \varepsilon_{22 \max} - m_1 \nu_{12} \nu_{21} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max})^2 \right\},$$

$$L_{1122}^{II} = m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) L_{2222}^{II}, \quad L_{2211}^{II} = \nu_{21} L_{1111}^{II}, \quad L_{2222}^{II} = \frac{E_2}{D_{II}}, \quad (4.26)$$

$$L_{1112}^{II} = L_{2212}^{II} = 0, \quad L_{1211}^{II} = -L_{1222}^{II} = 0 \quad \text{und} \quad L_{1212}^{II} = G_{12}$$

mit

$$D_{II} := 1 - m_1 \nu_{12} \nu_{21} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}),$$

wobei  $0 < D_{II} \leq 1$  wegen  $0 \leq m_1 (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) \leq 1$ ,  $0 \leq \nu_{12} \nu_{21} < 1$ .

$\mathbf{L}^{III}$

$$\begin{aligned} L_{1111}^{III} &= \frac{E_1}{D_{III}}, & L_{1122}^{III} &= \nu_{12} L_{2222}^{III}, & L_{2211}^{III} &= m_2 \nu_{21} (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22 \max}) L_{1111}^{III}, \\ L_{2222}^{III} &= \frac{m_2 E_2}{D_{III}^2} \left\{ \varepsilon_{22f} - 2\varepsilon_{22 \max} - \nu_{12} \varepsilon_{11 \max} - m_2 \nu_{12} \nu_{21} (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22 \max})^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$L_{1112}^{III} = L_{2212}^{III} = 0, \quad L_{1211}^{III} = -L_{1222}^{III} = 0 \quad \text{und} \quad L_{1212}^{III} = G_{12}$$

mit

$$D_{III} := 1 - m_2 \nu_{12} \nu_{21} (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22 \max}),$$

wobei  $0 < D_{III} \leq 1$  wegen  $0 \leq m_2 (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22 \max}) \leq 1$ ,  $0 \leq \nu_{12} \nu_{21} < 1$ .

$\mathbf{L}^{IV}$

$$\begin{aligned} L_{1111}^{IV} &= \frac{m_1 E_1}{D_{IV}^2} \left\{ \varepsilon_{11f} - 2\varepsilon_{11 \max} - m_2 \nu_{21} (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22 \max}) \left[ \varepsilon_{22 \max} + m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max})^2 \right] \right\}, \\ L_{1122}^{IV} &= m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) L_{2222}^{IV}, & L_{2211}^{IV} &= m_2 \nu_{21} (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22 \max}) L_{1111}^{IV}, \\ L_{2222}^{IV} &= \frac{m_2 E_2}{D_{IV}^2} \left\{ \varepsilon_{22f} - 2\varepsilon_{22 \max} - m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) \left[ \varepsilon_{11 \max} + m_2 \nu_{21} (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22 \max})^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$L_{1112}^{IV} = L_{2212}^{IV} = 0, \quad L_{1211}^{IV} = -L_{1222}^{IV} = 0 \quad \text{und} \quad L_{1212}^{IV} = G_{12}$$

mit

$$D_{IV} := 1 - m_1 m_2 \nu_{12} \nu_{21} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22 \max}),$$

wobei  $0 < D_{IV} \leq 1$  wegen  $0 \leq m_1 m_2 (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22 \max}) \leq 1$ ,  $0 \leq \nu_{12} \nu_{21} < 1$ .

$\mathbf{L}^V$

$$L_{1111}^V = L_{1111}^I, \quad L_{1122}^V = L_{1122}^I, \quad L_{2211}^V = L_{2211}^I, \quad L_{2222}^V = L_{2222}^I, \quad L_{1112}^V = L_{2212}^V = 0,$$

$$L_{1211}^V = -L_{1222}^V = -m_{12} G_{12} \frac{2\varepsilon_{12 \max} (\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})}{\varepsilon_{12v \max}}, \quad (4.29)$$

$$L_{1212}^V = m_{12} G_{12} \left[ \varepsilon_{12vf} - \frac{(\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})^2 + 2\varepsilon_{12 \max}^2}{\sqrt{(\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})^2 + \varepsilon_{12 \max}^2}} \right].$$

$\mathbf{L}^{VI}$

$$L_{1111}^{VI} = L_{1111}^{II}, \quad L_{1122}^{VI} = L_{1122}^{II}, \quad L_{2211}^{VI} = L_{2211}^{II}, \quad L_{2222}^{VI} = L_{2222}^{II}, \quad L_{1112}^{VI} = L_{2212}^{VI} = 0,$$

$$L_{1211}^{VI} = -L_{1222}^{VI} = -m_{12} G_{12} \frac{2\varepsilon_{12 \max} (\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})}{\varepsilon_{12v \max}}, \quad (4.30)$$

$$L_{1212}^{VI} = m_{12} G_{12} \left[ \varepsilon_{12vf} - \frac{(\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})^2 + 2\varepsilon_{12 \max}^2}{\sqrt{(\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})^2 + \varepsilon_{12 \max}^2}} \right].$$

$\mathbf{L}^{VII}$

$$L_{1111}^{VII} = L_{1111}^{III}, \quad L_{1122}^{VII} = L_{1122}^{III}, \quad L_{2211}^{VII} = L_{2211}^{III}, \quad L_{2222}^{VII} = L_{2222}^{III}, \quad L_{1112}^{VII} = L_{2212}^{VII} = 0,$$

$$L_{1211}^{VII} = -L_{1222}^{VII} = -m_{12} G_{12} \frac{2\varepsilon_{12 \max} (\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})}{\varepsilon_{12v \max}}, \quad (4.31)$$

$$L_{1212}^{VII} = m_{12} G_{12} \left[ \varepsilon_{12vf} - \frac{(\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})^2 + 2\varepsilon_{12 \max}^2}{\sqrt{(\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})^2 + \varepsilon_{12 \max}^2}} \right].$$

$\mathbf{L}^{VIII}$

$$L_{1111}^{VIII} = L_{1111}^{IV}, \quad L_{1122}^{VIII} = L_{1122}^{IV}, \quad L_{2211}^{VIII} = L_{2211}^{IV}, \quad L_{2222}^{VIII} = L_{2222}^{IV}, \quad L_{1112}^{VIII} = L_{2212}^{VIII} = 0,$$

$$L_{1211}^{VIII} = -L_{1222}^{VIII} = -m_{12} G_{12} \frac{2\varepsilon_{12 \max} (\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})}{\varepsilon_{12v \max}}, \quad (4.32)$$

$$L_{1212}^{VIII} = m_{12} G_{12} \left[ \varepsilon_{12vf} - \frac{(\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})^2 + 2\varepsilon_{12 \max}^2}{\sqrt{(\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})^2 + \varepsilon_{12 \max}^2}} \right].$$

**Anmerkung:** Man beachte, dass die Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon})$  beim Übergang von einem Teilgebiet  $\boldsymbol{\varepsilon}^K$  zu einem anderen Teilgebiet  $\boldsymbol{\varepsilon}^{K'}$  nicht mehr stetig ist.

Das in Abschnitt 4.1 eingeführte und bisher angewendete Materialmodell beschreibt das Werkstoffverhalten nicht vollständig, da es die Bruchmodellierung nicht enthält - s. [35]. Wird die Beschreibung der Entstehung und Ausbreitung eines Bruches als zusätzliches Kriterium hinzugenommen, ist eine realistische Strukturberechnung bis in den Nachbruchbereich hinein möglich.

In Kapitel 5 werden verschiedene Brucher kennungsmethoden vorgestellt, die, wie wir sehen werden, die Entstehung und Ausbreitung eines Bruches beschreiben und somit zusätzliche Modellbeschreibungsinstrumente darstellen (s. [51, 61]).

Aus der detaillierten Analyse dieser Brucher kennungsmethoden stellt sich eine Methode als besonders geeignet heraus, da sie sowohl den Eintritt des Bruches als auch die entsprechende Rissrichtung anzeigt. Mit der Kenntnis über den Bruchursprung kann dann anhand von weiteren bekannten Methoden aus der Kontinuumsmechanik die zeitliche Entwicklung des Materialverhaltens eindeutig bestimmt werden.

# Kapitel 5

## Methoden zur Brucherkenung

### 5.1 Werkstoffversagen

Die in Kapitel 4 dargelegten Modellgleichungen beschreiben das Verhalten des unidirektionalen Faserverbundwerkstoffs unter der Voraussetzung, dass alle Annahmen, die in Kapitel 3 zu ihrer Herleitung gemacht werden mussten, gültig bleiben. Im Schädigungsfall wird das Materialverhalten verändert mit der Folge, dass die getroffenen Annahmen ihre Gültigkeit verlieren. Daraus folgt das Auseinanderbrechen eines Materials durch Rissbildung. Der eigentliche Bruchverlauf ist bisher aus dem verwendeten Modell nicht ermittelbar, da die physikalischen Phänomene, die diesen bedingen, im Modell nicht enthalten sind. Deshalb werden hier diese Bruchphänomene nicht modelliert, sondern die Risserkennung wird ganz auf die bisher dargestellten Ansätze beschränkt. Diese Ansätze werden aber um Kriterien ergänzt, die Materialversagen anzeigen.

Unter einem Versagenskriterium versteht man einen mathematischen Ausdruck, der durch die Variablen des ungeschädigten Materialverhaltens definiert ist. Trifft dieses Versagenskriterium zu, so schließt man auf das Auftreten eines Materialbruchs. Diese Information muss dann in das Materialmodell eingearbeitet werden, indem die Materialbruchkante zum Rand des Materials hinzugenommen wird, bevor das Materialmodell wieder als gültig vorausgesetzt werden kann.

Das Versagenskriterium selbst kann nicht aus dem Materialmodell abgeleitet werden, sondern muss als eine zusätzliche Annahme zur Materialbeschreibung hinzugenommen werden. Die Wahl des "richtigen" Versagenskriteriums muss sich im Vergleich mit Messdaten aus Materialbruchversuchen erweisen. In der Literatur werden mehrere mögliche Versagenskriterien vorgeschlagen, die sich wesentlich unterscheiden, indem sie

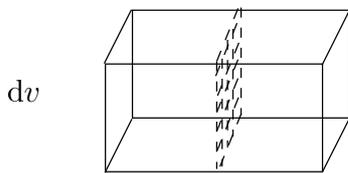
1. für unterschiedliche Materialzustände den Werkstoffbruch anzeigen,
2. neben der Bruchanzeige weitere Zusatzinformationen liefern.

Hier werden unterschiedliche Versagenskriterien vorgestellt und schließlich wird die Besonderheit der Bifurkationsanalyse als für unseren Anwendungsfall geeigneteste Methode begründet.

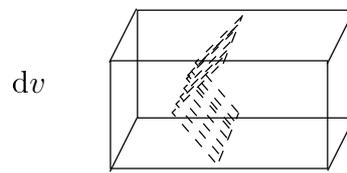
## 5.2 Grundsätzliche Überlegungen zu Schädigungskriterien

Der wesentliche Grund dafür, dass die im Modell ermittelte Materialschädigung - die vom Abfall der Werte der Materialparameter (Elastizitätsmoduli  $E$  oder Querdehnzahl  $\nu$ ) angezeigt wird - nicht direkt als Versagenskriterium verwendet werden kann, liegt darin, dass bei unseren Modellannahmen die Materialschädigung eine Eigenschaft des Volumenelements  $dv$  ist. Die Schädigung führt zu einer prinzipiellen Änderung des Materialverhaltens, wenn genügend Schädigungsenergie vorliegt, um diese Änderung zu bewirken. Diese Energien sind immer bezogen auf das Volumenelement  $dv$ . Bruch bedeutet dagegen eine Trennung von Volumenteilen und ist daher mittels Ebenen im Material definiert. Eine Ebene hat immer ein Volumenmaß identisch Null ( $dv \equiv 0$ ) und so verschwindet jedes Volumenintegral der Schädigungsvariablen über der Ebene. Die Modellvorstellungen führen somit nicht zwangsläufig zu einer eindeutigen Beziehung zwischen Schädigungsenergie und Energiefreisetzung beim Entstehen der neuen Bruchfläche.

Dieses Resultat ist natürlich auch physikalisch sinnvoll, denn in einem realen physikalischen Körper wird sich die Schädigungsenergie, die die Energiezustände der Moleküle des Materials charakterisiert, im Material ausbreiten. Diese Ausbreitung und die Wirkung der Schädigungsenergie auf den Stoffzusammenhalt ist aber stoffabhängig und kann somit nicht in einem allgemeinen kontinuumsmechanischen Materialmodell enthalten sein. In [42] haben Matzenmiller et al. daher zunächst ein einfaches und an empirische Erfahrungen anpassbares Versagenskriterium gewählt: "Bruch tritt in einem kleinen Volumenelement dann auf, wenn die ermittelten Materialschädigungsparameter (Elastizitätsmoduli  $E$  oder Querdehnzahl  $\nu$ ) in diesem Volumenelement eine gewisse Schranke unterschreiten." Das Problem bei diesem Ansatz besteht darin, dass nicht berücksichtigt werden kann, inwieweit der höhere Energiezustand, der im Material durch den Bruch entsteht (unter Einhaltung des Energieerhaltungssatzes) nun zu einer Verminderung der Schädigungsenergie im Umfeld des Bruchs führt. Das Versagen müsste als Bruch des Volumenelements dargestellt werden; damit wäre aber die Bruchenergie von der - in diesem Ansatz nicht ermittelbaren - Bruchrichtung abhängig.



**Abb. 5.1:** Bruchverlauf eines Volumenelementes  $dv$  mit kleiner Energie



**Abb. 5.2:** Bruchverlauf eines Volumenelementes  $dv$  mit großer Energie

Aus den dargelegten Vorüberlegungen erkennt man, dass Zusatzinformationen zur Richtungsangabe der Bruchfläche aus dem Bruchkriterium benötigt werden, um eine Beziehung zwischen Schädigungsenergie und Bruchfläche zu formulieren. Mittels dieser Zusatzinformation und einer empirisch ermittelten, materialabhängigen Funktion  $\mathcal{F}_B$ :

$$\text{Bruchfläche} = \mathcal{F}_B [\text{Schädigungsenergiegedichte im Umfeld des Bruchs}]$$

ist dann eine mathematische Beschreibung des Bruchphänomens gegeben.

## 5.3 Versagenskriterien

In diesem Abschnitt werden Versagenskriterien, die den Rissbeginn markieren, vorgestellt. Insbesondere wird auf die Frage eingegangen “wann entsteht ein Riss und in welche Richtung breitet er sich aus”.

Zur Beschreibung des Materialversagens kann grundsätzlich auf verschiedene Ansätze der Singularitätsanalyse zurückgegriffen werden, mittels der das Lösungsverhalten der konstitutiven Materialgleichungen Gl. (4.3) untersucht wird [33, 50, 52]. Ist die Lösung eines Gleichungssystems nicht eindeutig oder ändert sich die prinzipielle Struktur der Gleichung, so spricht man von einer Singularität. Um die Nichteindeutigkeit von Lösungen eines Gleichungssystems festzustellen, existieren in der Literatur viele Kriterien, die jedoch überwiegend auf der Auswertung der Determinanten basieren. Diesem Ansatz folgend, werden hier einige Singularitätskriterien (Brucherkenntnismethoden) abgeleitet und ausführlich diskutiert. Dabei wird der Fokus auf die Suche nach einem Kriterium gerichtet, das die Übereinstimmung mit empirischen Daten erfüllt und auch die Rissbildung als Zusatzinformation liefert. Diese Methode ist dann geeignet, im Materialmodell die Entstehung und die Ausbreitung eines Bruchs zu beschreiben.

Für unsere eigentliche Vorgehensweise nutzen wir einige bekannte Versagensindikatoren (Singularitätskriterien) aus der Literatur, die im Kern jedoch nur den Beginn des eigentlichen Bruchvorgangs markieren [2, 13, 17, 53, 59].

### 1. Maximalspannungskriterium

Das Kriterium geht auf W.J.M. RANKINE (1820-1872), G. LAMÉ (1795-1870) und C.L. NAVIER (1785-1836) zurück. Es wird angenommen, dass ein Bruch (Riss) eintritt, sobald eine Hauptspannung unabhängig vom Betrag der anderen Hauptspannungen einen vom Material abhängigen Grenzwert erreicht. Dabei kann zwischen einem Grenzwert im Zugbereich ( $T_z$ ) und einem Grenzwert im Druckbereich ( $T_d$ ) unterschieden werden [24, 25]. Wenn eine der Bedingungen

$$T = T_z \quad \text{oder} \quad T = -T_d$$

erfüllt ist, gibt es Versagen. Dieses Charakteristikum beschreibt überwiegend das spröde Versagen von Werkstoffen. Die Verschiebungsgleichungen der elastischen Schädigungstheorie, welche die strukturmechanische Verhaltensweise als System partieller Differentialgleichungen darlegen, können dabei die Eigenschaft der Elliptizität verlieren und somit nicht eindeutig werden. Diese Änderung deutet jedoch nicht notwendigerweise auf ein Strukturversagen am Materialpunkt hin [45, 54]. Bei dem hier angewendeten Materialmodell [35, 42] ist die Maximalspannung dann erreicht, sobald das ratenabhängige Materialgleichungssystem singular wird. Daraus folgt, dass die Determinante des instantanen Materialsteifigkeitstensors null sein muss. Aus  $\det(\mathbf{L}) = 0$  werden die Singularitätskriterien unmittelbar abgeleitet, die auch den Materialbruch kennzeichnen. Daher ist diese Maximalspannung nur von den instantanen Steifigkeitskomponenten abhängig, die wiederum von den Dehnungen beeinflusst sind.

### 2. Änderung des Wachstumsverhaltens

Das entfestigende Materialverhalten hat für die Stabilität der Lösung von Rand- oder Anfangsrandwertaufgaben weitreichende Konsequenzen. Bei kleinen Änderungen (Störung) der Eingangsparameter bleiben die Änderungen der stabilen

Lösungen hinreichend klein, wohingegen die instabilen Lösungen zu großen Abweichungen in den Ergebnissen neigen. Während die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Ausgangsparametern bei Stabilität gewährleistet ist, ist diese bei Instabilität nicht mehr gegeben. Der Stabilitätsverlust der Rand- oder Anfangsrandwertaufgabe ist durch die Lösung eines zugehörigen Eigenwertproblems gegeben, wobei der Realteil der Eigenwerte im instabilen Fall positiv ist. Zur Untersuchung der Änderung des Wachstumsverhaltens werden die Eigenwerte des linearisierten konstitutiven Gleichungssystems ausgewertet. Falls ein Eigenwert mit positivem Realteil vorhanden ist, schließt man auf Stabilitätsverlust. Dieser Schluss ist jedoch für Eigenwerte mit kleinem Realteil und für kleine Intervalle problematisch, weil dann zwischen Instabilität und Stabilität nicht auch qualitativ unterschieden werden kann.

### 3. Bifurkationsanalyse

Die Lösung der Rand- oder Anfangsrandwertaufgabe kann bei entfestigendem Materialverhalten ihre Eindeutigkeit verlieren. Ein geeigneter Indikator zur Feststellung des Verlustes der Eindeutigkeit ist die Auswertung des sogenannten Lokalisierungstensors. Wir erhalten so ein lokales Versagenskriterium, weil die Auswertung an einem Materialpunkt erfolgt und wenden hier dieses Kriterium auf die Abhängigkeit der Spannungsänderung  $\dot{\mathbf{T}}$  bezüglich des Dehnungszuwachses  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  an. Existieren zur Spannungsableitung  $\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)$  in einem Raumpunkt  $(\mathbf{x}, t)$  verschiedene Dehnungsänderungen  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_2$ , so wird hier die Annahme getroffen, dass es zum Verlust der Kopplung zwischen  $\dot{\mathbf{T}}$  und  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  und damit zu einem Materialbruch gekommen sein muss. Dieses Charakteristikum führt als Brucherscheinungsterm zu einem quartischen Polynom, das von entscheidender Bedeutung für die Bestimmung der Rissrichtung ist.

*Eines der wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit ist der Nachweis, dass die reellen Nullstellen des quartischen Polynoms als Rissnormalen interpretiert werden können.* Es wird ferner der Nachweis erbracht, dass das erstmalige Auftreten einer Singularität durch den Lokalisierungstensor bestimmbar ist, und zwar durch die Untersuchung der Nullstellen der Determinante des Lokalisierungstensors.

Die Singularität des Gleichungssystems Gl. (4.3) führt zu Kriterien oder Bedingungen, die von den Komponenten  $(L_{1111}, L_{1122}, L_{2211}, L_{2222}, L_{1211}, L_{1222}, L_{1212})$  des instantanen Materialsteifigkeitstensors  $\mathbf{L}$  abhängen. Die eindeutige Bestimmung der Komponenten von  $\mathbf{L}$  ist also von entscheidender Bedeutung für die Beurteilung des Materialversagens.

## 5.4 Maximalspannungskriterium

Wie zuvor erwähnt, ist das Erreichen der Maximalspannung gleichbedeutend mit dem Verschwinden der Determinante des instantanen Materialsteifigkeitstensors. Wir zeigen:

**Satz 5.1:** Gegeben sei der instantane Materialsteifigkeitstensor im Raum  $\boldsymbol{\epsilon}^K$

$$\mathbf{L}^K = \begin{bmatrix} L_{1111}^K & L_{1122}^K & 0 \\ L_{2211}^K & L_{2222}^K & 0 \\ L_{1211}^K & L_{1222}^K & L_{1212}^K \end{bmatrix}$$

gemäß Gl. (4.8) bzw. Gln. (4.25) - (4.32).

Das Gleichungssystem  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  ist genau dann singulär, wenn mindestens eine der Komponenten in der Hauptdiagonalen  $(L_{1111}^K, L_{2222}^K, L_{1212}^K)$  identisch null ist.

**Beweis:** Für die Determinante von  $\mathbf{L}^K$  in  $\boldsymbol{\varepsilon}^K$  gilt gemäß Gl. (4.8)

$$\det \mathbf{L}^K = L_{1212}^K \left( L_{1111}^K L_{2222}^K - L_{1122}^K L_{2211}^K \right).$$

Das Gleichungssystem (4.3) ist im Raum  $\boldsymbol{\varepsilon}^K$  genau dann singulär, wenn die Determinante von  $\mathbf{L}^K$  gleich null ist. Da

$$\det \mathbf{L}^K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L_{1212}^K (L_{1111}^K L_{2222}^K - L_{1122}^K L_{2211}^K) = 0, \quad (5.1)$$

führt dies mit den Beziehungen (4.25) bis (4.32) im Raum  $\boldsymbol{\varepsilon}^K$ ,  $K = I, \dots, VIII$ , zur Bedingungsgleichung

$$L_{1212}^K L_{1111}^K L_{2222}^K D_K = 0, \quad (5.2)$$

wobei

$$D_I := 1 - \nu_{12} \nu_{21}, \quad D_K := D_{K-IV}, \quad K = V, \dots, VIII. \quad (5.3)$$

Da nach Gl. (4.26) bis Gl. (4.28) und Gl. (5.3)  $D_K \neq 0$  ist, folgt aus Gl. (5.2), dass Singularität genau dann vorliegt, wenn einer der Terme  $L_{1111}^K$ ,  $L_{2222}^K$  oder  $L_{1212}^K$  im Verzerrungsraum identisch null ist, d.h.:

$$L_{1111}^K = 0 \quad \text{oder} \quad L_{2222}^K = 0 \quad \text{oder} \quad L_{1212}^K = 0. \quad (5.4)$$

Da nach Gl. (4.21)

$$L_{1111} = \frac{\partial T_{11}}{\partial \varepsilon_{11 \max}}, \quad L_{2222} = \frac{\partial T_{22}}{\partial \varepsilon_{22 \max}}, \quad L_{1212} = \frac{1}{2} \frac{\partial T_{12}}{\partial \varepsilon_{12 \max}},$$

führen obige Überlegungen zur folgenden Maximalspannungshypothese.

### Maximalspannungshypothese

Für einen kritischen Verzerrungszustand  $(\varepsilon_{11 \text{krit}}, \varepsilon_{22 \text{krit}}, \varepsilon_{12 \text{krit}})^T$  gilt

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial \varepsilon_{11 \max}} \frac{\partial T_{22}}{\partial \varepsilon_{22 \max}} \frac{\partial T_{12}}{\partial \varepsilon_{12 \max}} = 0; \quad (5.5)$$

d.h., mindestens eine der folgenden Beziehungen ist erfüllt:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial \varepsilon_{11 \max}} = 0, \quad \frac{\partial T_{22}}{\partial \varepsilon_{22 \max}} = 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial \varepsilon_{12 \max}} = 0.$$

### Bemerkungen

- Durch Gl. (5.5) sind im Verzerrungsraum drei Bruchgrenzflächen definiert, die - entsprechend zusammengefügt - die ganze Bruchgrenzfläche bilden.
- Wegen der Unstetigkeit der Tangentensteifigkeitsmatrix bei den Übergängen von  $\boldsymbol{\varepsilon}^K$  zu  $\boldsymbol{\varepsilon}^{K'}$  (s. Anmerkung S. 51) kann es zu Verletzungen der Bedingung (5.5) kommen.

### 5.4.1 Beschreibung der Bruchgrenzfläche im Dehnungsraum

Die notwendigen Bedingungen in Gl. (5.4) bzw. Gl. (5.5) werden durch die Matrixkomponenten auf der Hauptdiagonale von  $\mathbf{L}^K$  gegeben, die entweder von Quer- und Faserlängsdehnung ( $\varepsilon_{22\max}$ ,  $\varepsilon_{11\max}$ ) wie im Fall von

$$L_{1111}^K = f_1(\varepsilon_{11\max}, \varepsilon_{22\max}), \quad L_{2222}^K = f_2(\varepsilon_{11\max}, \varepsilon_{22\max})$$

oder von Schub-, Quer- und Faserlängsdehnung ( $\varepsilon_{12\max}$ ,  $\varepsilon_{22\max}$ ,  $\varepsilon_{11\max}$ ) wie bei

$$L_{1212}^K = f_{12}(\varepsilon_{11\max}, \varepsilon_{22\max}, \varepsilon_{12\max})$$

abhängig sind. Die in Tab. 7.1 aufgeführten Materialparameter aus [35] finden hier Anwendung. Es werden dabei für unterschiedliche Querkontraktionszahlen Diagramme erstellt, die zur Veranschaulichung der Zusammenhänge zwischen Längs- und Querdehnungen (Dehnungs-Kurven) oder Spannung und Dehnung (Spannungs-Dehnungs-Flächen) dienen.

1. Die Fläche  $\frac{\partial T_{11}}{\partial \varepsilon_{11\max}} = 0$  in  $\boldsymbol{\epsilon}^{II}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}^{VI}$

Aus der Bedingung

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial \varepsilon_{11\max}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad L_{1111}^{II} = 0 \quad (5.6)$$

folgt nach Gl. (4.26)

$$\varepsilon_{11f} - 2\varepsilon_{11\max} - \nu_{21}\varepsilon_{22\max} - m_1\nu_{12}\nu_{21}(\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max})^2 = 0. \quad (5.7)$$

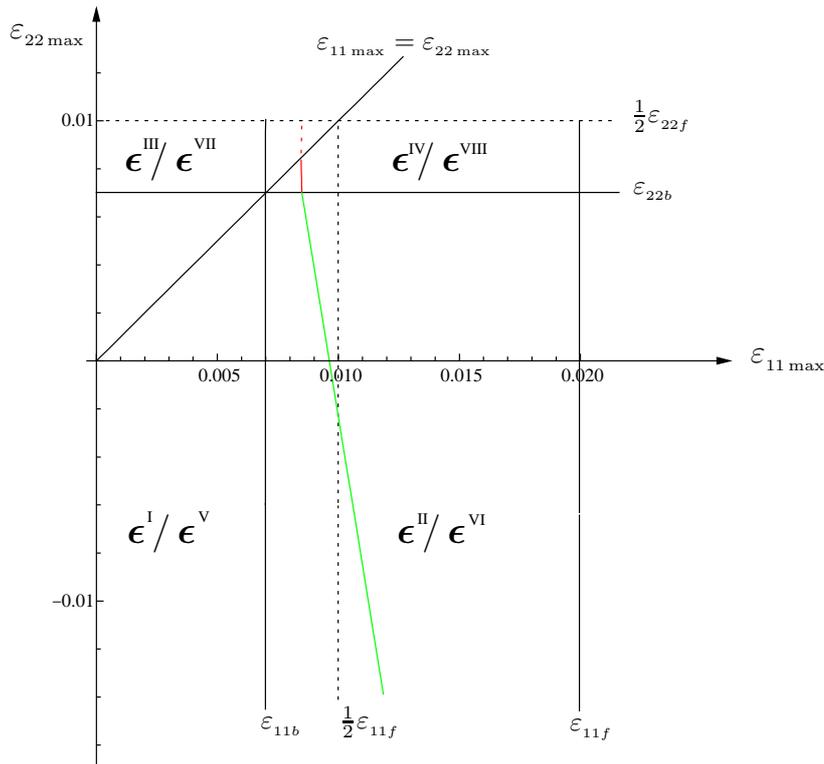
Da Gl. (5.7) von  $\varepsilon_{12\max}$  unabhängig ist, wird dadurch eine auf der  $(\varepsilon_{11\max}, \varepsilon_{22\max})$ -Ebene senkrecht stehende Bruchgrenzfläche definiert.

- Im Spezialfall  $\nu_{21} = 0$  erhält man als Bruchgrenzkurve in der  $(\varepsilon_{11\max}, \varepsilon_{22\max})$ -Ebene die Gerade  $\varepsilon_{11\text{krit}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{11f}$ .
- Im Falle  $\nu_{12} = 0$  und  $\nu_{21} \neq 0$  entspricht die Bruchgrenzkurve der Geraden  $\varepsilon_{22\text{krit}} = \frac{2}{\nu_{21}}(\frac{1}{2}\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\text{krit}})$ .
- Für  $\nu_{12}\nu_{21} \neq 0$  stellt die Bruchgrenzkurve  $\varepsilon_{22\text{krit}}(\varepsilon_{11\text{krit}})$  eine Parabel dar. Mit den Zahlenwerten  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3$  ist der Verlauf des in  $\boldsymbol{\epsilon}^{II}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}^{VI}$  interessierenden Parabelastes in Abb. 5.3 skizziert.

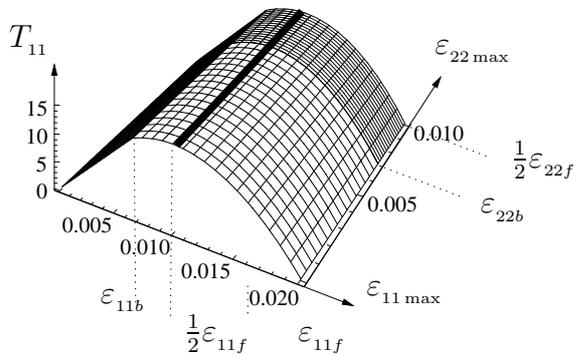
In den Abbildungen 5.4, 5.5 ist die Spannungsfläche  $T_{11}(\varepsilon_{11\max}, \varepsilon_{22\max})$  über den Bereich

$$\{(\varepsilon_{11\max}, \varepsilon_{22\max}) \mid 0 \leq \varepsilon_{11\max} \leq \varepsilon_{11f}, \quad 0 \leq \varepsilon_{22\max} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_{22f}\}$$

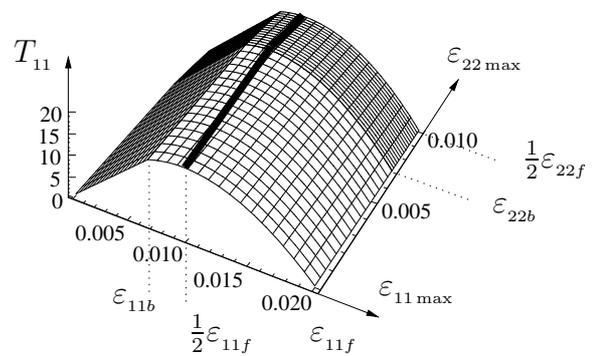
dargestellt, wobei sie in jedem Teilbereich mittels der entsprechenden Steifigkeitsmatrix aus (4.17) bis (4.19) erzeugt wird.



**Abb. 5.3:** Leitlinie der senkrecht stehenden Bruchgrenzfläche in den Verzerrungsräumen  $\epsilon^{II}/\epsilon^{VI}$  bzw.  $\epsilon^{IV}/\epsilon^{VIII}$  für  $\epsilon_{11\text{krit}} \geq \epsilon_{22\text{krit}}$  und  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3$



**Abb. 5.4:** Spannungs-Dehnungs-Diagramm  $T_{11}(\epsilon_{11\text{max}}, \epsilon_{22\text{max}})$  für  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0$



**Abb. 5.5:** Spannungs-Dehnungs-Diagramm  $T_{11}(\epsilon_{11\text{max}}, \epsilon_{22\text{max}})$  für  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3$

Auf der  $T_{11}$ -Fläche werden auch die kritischen Punkte, die über der Bruchgrenzkurve liegen, eingetragen; den Abb. 5.5 liegt die Bruchgrenzkurve aus Abb. 5.3 zugrunde.

2. Die Fläche  $\frac{\partial T_{22}}{\partial \varepsilon_{22 \max}} = 0$  in  $\mathbf{\epsilon}^{III}, \mathbf{\epsilon}^{VII}$

---

Aus Symmetriegründen erhält man die Bruchgrenzfläche aus obiger Fläche durch Spiegelung an der Ebene  $\varepsilon_{11 \max} = \varepsilon_{22 \max}$  (s. Abb. 5.9).

3. Die Flächen  $\frac{\partial T_{11}}{\partial \varepsilon_{11 \max}} = 0, \frac{\partial T_{22}}{\partial \varepsilon_{22 \max}} = 0$  in  $\mathbf{\epsilon}^{IV}, \mathbf{\epsilon}^{VIII}$

---

Aus der Bedingung

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial \varepsilon_{11 \max}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad L_{1111}^{IV} = 0 \quad (5.8)$$

ergibt sich nach Gl. (4.28) für die Bruchgrenzkurve in der  $(\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max})$ -Ebene

$$\varepsilon_{11f} - 2\varepsilon_{11 \max} - m_2 \nu_{21} (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22 \max}) \left[ \varepsilon_{22 \max} + m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max})^2 \right] = 0. \quad (5.9)$$

- Im Spezialfall  $\nu_{21} = 0$  reduziert sich Gl. (5.9) auf die Gerade  $\varepsilon_{11 \text{krit}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{11f}$ .
- Im Falle  $\nu_{12} = 0$  und  $\nu_{21} \neq 0$  ist die Bruchgrenzkurve durch

$$\varepsilon_{11 \text{krit}} = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_{11f} - m_2 \nu_{21} (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{22 \text{krit}}) \varepsilon_{22 \text{krit}} \right] \quad (5.10)$$

beschrieben.

- Für  $\nu_{12} \nu_{21} \neq 0$  steht auf der linken Seite in Gl. (5.9) ein Polynom 3. Grades; Gl. (5.9) kann aber mit der quadratischen Lösungsformel sowohl nach  $\varepsilon_{11 \text{krit}}$  als auch nach  $\varepsilon_{22 \text{krit}}$  aufgelöst werden.

In Abb. 5.3 ist die durch Gl. (5.9) definierte Kurve  $(\varepsilon_{11 \text{krit}}, \varepsilon_{22 \text{krit}})$  für  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3$  in  $\mathbf{\epsilon}^{IV}$  dargestellt.

Die Bruchgrenzfläche aus  $\frac{\partial T_{22}}{\partial \varepsilon_{22}} = 0$  erhält man wiederum durch Spiegelung an der Ebene  $\varepsilon_{11 \max} = \varepsilon_{22 \max}$  (s. Abb. 5.9).

4. Die Fläche  $\frac{\partial T_{12}}{\partial \varepsilon_{12 \max}} = 0$  in  $\mathbf{\epsilon}^V, \mathbf{\epsilon}^{VI}, \mathbf{\epsilon}^{VII}, \mathbf{\epsilon}^{VIII}$

---

Aus der Bedingung

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial \varepsilon_{12 \max}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad L_{1212}^V = 0$$

folgt nach Gl. (4.24)

$$\varepsilon_{12vf} - \frac{(\varepsilon_{11\max} - \varepsilon_{22\max})^2 + 2\varepsilon_{12\max}^2}{\sqrt{(\varepsilon_{11\max} - \varepsilon_{22\max})^2 + \varepsilon_{12\max}^2}} = 0. \quad (5.11)$$

Durch Gl. (5.11) ist im Dehnungsraum eine gekrümmte Bruchgrenzfläche  $(\varepsilon_{11\text{krit}}, \varepsilon_{22\text{krit}}, \varepsilon_{12\text{krit}})$  definiert; sie ist von  $\nu_{12}, \nu_{21}$  unabhängig. Für  $\varepsilon_{11\text{krit}} = \varepsilon_{22\text{krit}}$  ist  $\varepsilon_{12\text{krit}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{12vf}$ , und allgemein gilt für  $\varepsilon_{11\text{krit}} - \varepsilon_{22\text{krit}} = \text{const.}$  auch  $\varepsilon_{12\text{krit}} = \text{const.}$ ; d.h., die Niveaulinien der Bruchgrenzfläche Gl. (5.11) verlaufen parallel zur Diagonalen  $\varepsilon_{11\text{krit}} = \varepsilon_{22\text{krit}}$ . Zur Veranschaulichung der Bruchgrenzfläche führen wir daher das gedrehte Koordinatensystem  $(\xi, \eta)$  ein mit  $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{11\max} + \varepsilon_{22\max})$ ,  $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{22\max} - \varepsilon_{11\max})$  (Abb. 5.6). Es interessiert dann nur die Kontur der Fläche in der  $(\eta, \varepsilon_{12\max})$ -Ebene.

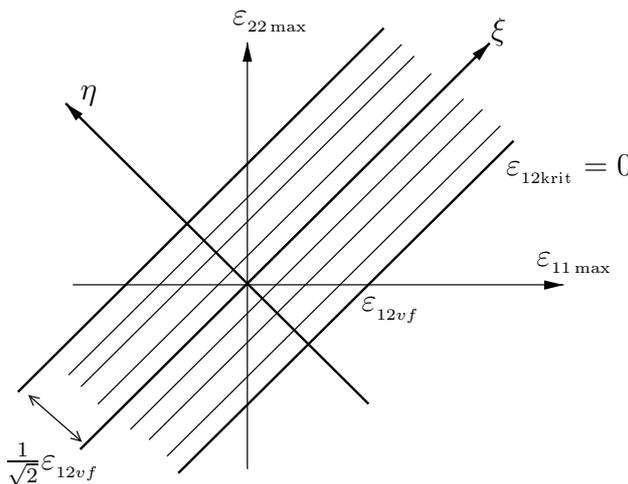


Abb. 5.6: Niveaulinien

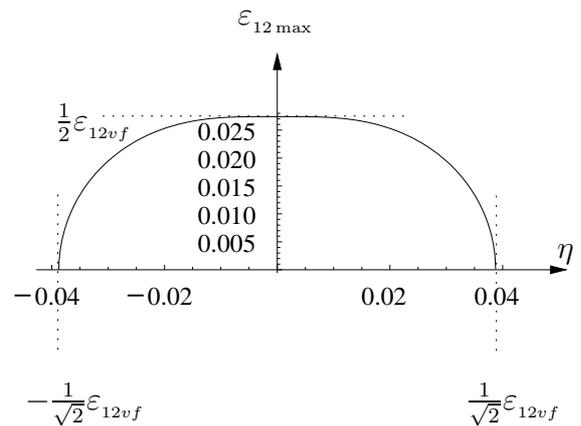


Abb. 5.7: Kontur in der  $(\eta, \varepsilon_{12\max})$ -Ebene

Die Kontur in der  $(\eta, \varepsilon_{12\max})$ -Ebene ist gegeben durch

$$\varepsilon_{12vf} - \frac{2\eta^2 + 2\varepsilon_{12\text{krit}}^2}{\sqrt{2\eta^2 + \varepsilon_{12\text{krit}}^2}} = 0 \quad (5.12)$$

(s. Abb. 5.7). In Abb. 5.8 ist ein Ausschnitt der Fläche  $\frac{\partial T_{12}}{\partial \varepsilon_{12\max}} = 0$  dargestellt.

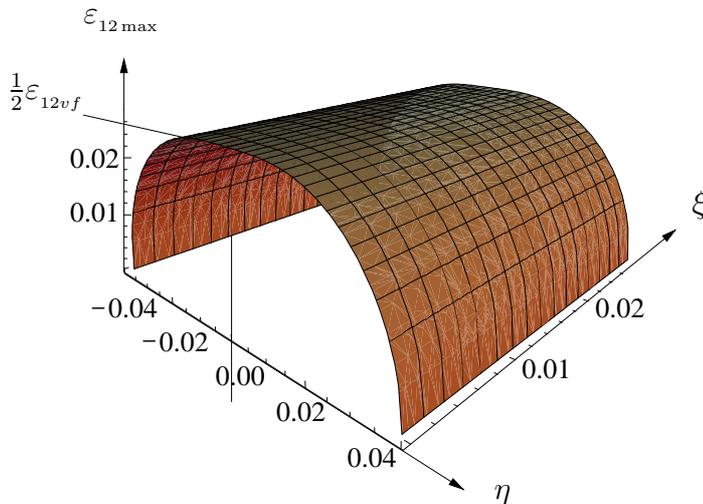


Abb. 5.8:  $\varepsilon_{12\text{krit}}$ -Fläche in Abhängigkeit von  $\xi$  und  $\eta$

Abb. 5.9 zeigt den Verlauf der aus den sechs Kurvenstücken zusammengesetzten Bruchgrenzkurve in der  $(\varepsilon_{11\text{max}}, \varepsilon_{22\text{max}})$ -Ebene für  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3$ .

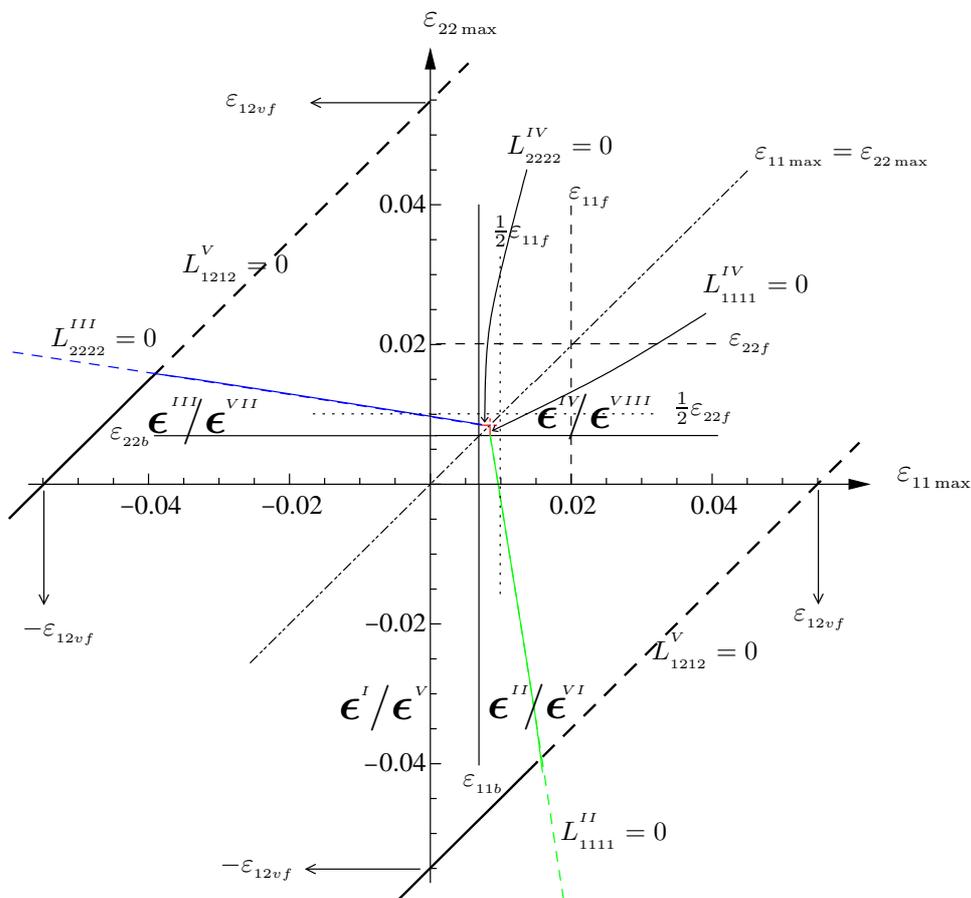


Abb. 5.9: Verlauf der Bruchgrenzkurve in der  $(\varepsilon_{11\text{max}}, \varepsilon_{22\text{max}})$ -Ebene für  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3$  (Wegen des Verlaufs der Kurve im Bereich  $\mathbf{\epsilon}^{IV}/\mathbf{\epsilon}^{VIII}$  - s. Abb. 5.3)

### 5.4.2 Die Spannungs-Dehnungs-Fläche $T_{12}(\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max}, \varepsilon_{12 \max})$

Nach Gl. (4.1) und Gl. (4.20) ist

$$T_{12}(\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max}, \varepsilon_{12 \max}) = \begin{cases} 2G_{12}\varepsilon_{12 \max} : & 0 \leq \varepsilon_{12v \max} \leq \varepsilon_{12vb} \\ 2m_{12}G_{12}(\varepsilon_{12vf} - \varepsilon_{12v \max})\varepsilon_{12 \max} : & \varepsilon_{12vb} \leq \varepsilon_{12v \max} \leq \varepsilon_{12vf} \end{cases} \quad (5.13)$$

mit

$$\varepsilon_{12v \max} = \sqrt{(\varepsilon_{11 \max} - \varepsilon_{22 \max})^2 + \varepsilon_{12 \max}^2}.$$

Da  $T_{12}$  von  $\varepsilon_{11 \max}$ ,  $\varepsilon_{22 \max}$ ,  $\varepsilon_{12 \max}$  abhängig ist, kann das Verhalten von  $T_{12}$  nur über ebenen Schnitten des Definitionsbereichs dargestellt werden. ( $T_{12}(\varepsilon_{11 \max}, \varepsilon_{22 \max}, \varepsilon_{12 \max})$  ist eine Hyperfläche im Spannungs-Dehnungs-Raum.) Entsprechend der Symmetrien der Bruchgrenzfläche (Abb. 5.6, 5.8, 5.9) interessieren insbesondere die Schnitte  $\xi = 0$  und  $\eta = 0$ .

#### 1. $T_{12}$ -Fläche für $\eta = 0$

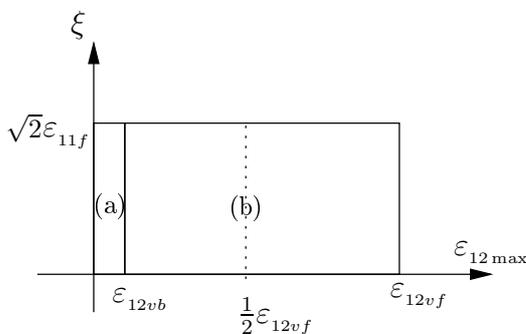
$T_{12}(\xi, 0, \varepsilon_{12 \max})$  wird über dem Bereich

$$\{(\xi, \varepsilon_{12 \max}) \mid 0 \leq \xi \leq \sqrt{2}\varepsilon_{11f}, \quad 0 \leq \varepsilon_{12 \max} \leq \varepsilon_{12vf}\}$$

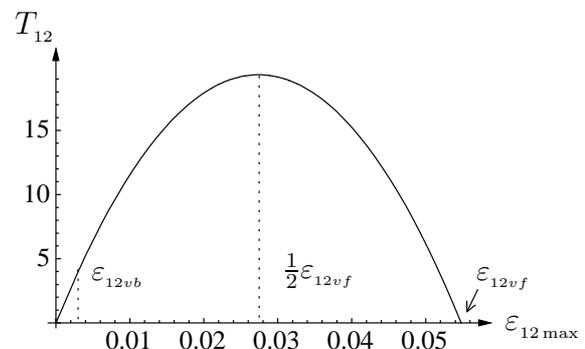
dargestellt (s. Abb. 5.10). Für  $\eta = 0$  ist  $\varepsilon_{12v \max} = \varepsilon_{12 \max}$  und somit nach Gl. (5.13)

$$T_{12}(\xi, 0, \varepsilon_{12 \max}) = \begin{cases} 2G_{12}\varepsilon_{12 \max} : & 0 \leq \varepsilon_{12 \max} \leq \varepsilon_{12vb} \quad \text{(a)} \\ 2m_{12}G_{12}(\varepsilon_{12vf} - \varepsilon_{12 \max})\varepsilon_{12 \max} : & \varepsilon_{12vb} \leq \varepsilon_{12 \max} \leq \varepsilon_{12vf} \quad \text{(b)} \end{cases} \quad (5.14)$$

Da sowohl (5.14-a) als auch (5.14-b) von  $\xi$  unabhängig ist, sind die Parallelen zur  $\xi$ -Achse Niveaulinien der Fläche. Es interessiert daher nur die Kontur in der  $(\varepsilon_{12 \max}, T_{12})$ -Ebene (s. Abb. 5.12).

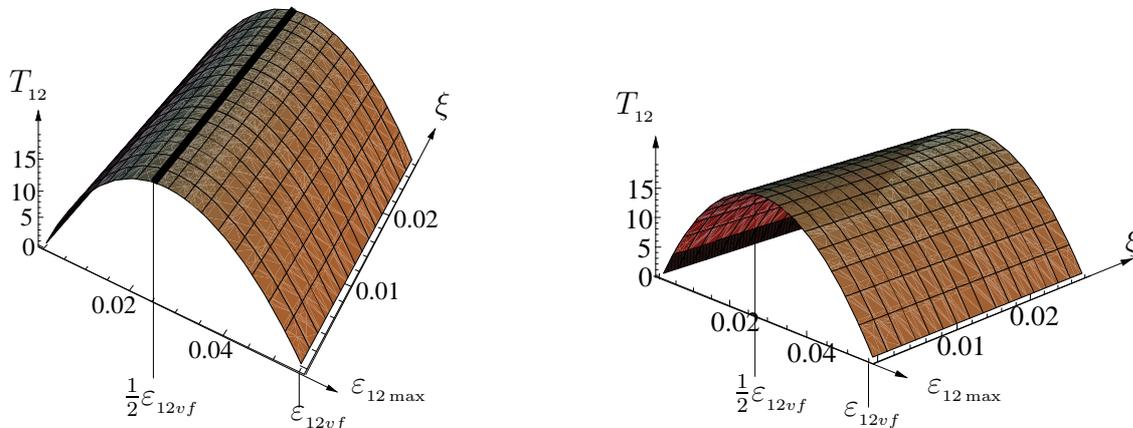


**Abb. 5.10:** Gültigkeitsbereich der Formeln (5.14-a) und (5.14-b)



**Abb. 5.11:** Kontur in der  $(\varepsilon_{12 \max}, T_{12})$ -Ebene ( $\xi = 0, \eta = 0$ )

In Abb. 5.7 bzw. Abb. 5.11 ist abzulesen, dass die kritischen Punkte über der Geraden  $\varepsilon_{12 \max} = \frac{1}{2}\varepsilon_{12vf}$  liegen. In Abb. 5.12 ist die  $T_{12}$ -Fläche für  $\eta = 0$  dargestellt, wobei links die kritischen Punkte eingetragen sind.



**Abb. 5.12:**  $T_{12}$ -Fläche für  $\eta = 0$  mit kritischen Punkten (links)

## 2. $T_{12}$ -Fläche für $\xi = 0$

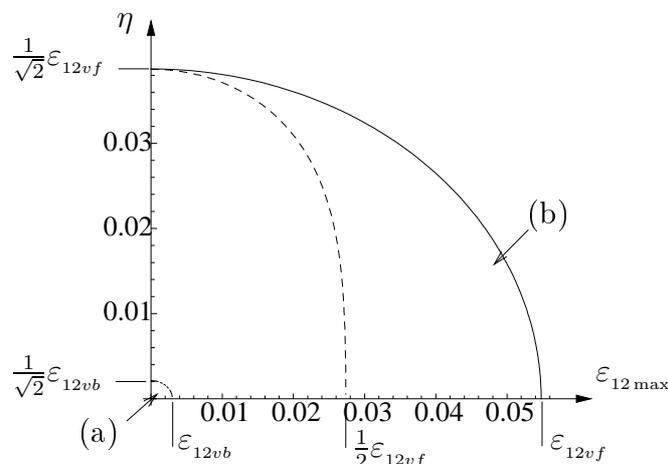
$T_{12}(0, \eta, \varepsilon_{12 \max})$  wird über dem Bereich

$$\left\{ (\eta, \varepsilon_{12 \max}) \mid 0 \leq \eta \leq \frac{\varepsilon_{12vf}}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq \varepsilon_{12 \max} \leq \varepsilon_{12vf} \right\}$$

dargestellt (s. Abb. 5.6). Für beliebiges  $\xi$  ist  $\varepsilon_{12v \max} = \sqrt{2\eta^2 + \varepsilon_{12 \max}^2}$  und somit nach Gl. (5.13) insbesondere

$$T_{12}(0, \eta, \varepsilon_{12 \max}) = \begin{cases} 2G_{12}\varepsilon_{12 \max} : & 0 \leq \varepsilon_{12v \max} \leq \varepsilon_{12vb} \quad (\text{a}) \\ 2m_{12}G_{12} \left( \varepsilon_{12vf} - \sqrt{2\eta^2 + \varepsilon_{12 \max}^2} \right) \varepsilon_{12 \max} : & \varepsilon_{12vb} \leq \varepsilon_{12v \max} \leq \varepsilon_{12vf} \quad (\text{b}) \end{cases} \quad (5.15)$$

Die Begrenzungen in (5.15) sind ähnliche Ellipsen. Die kritischen Punkte liegen über der Kontur der Bruchgrenzfläche in Abb. 5.7.



**Abb. 5.13:** Gültigkeitsbereich der Formeln (5.15-a), (5.15-b) (o.B.d.A. auf  $\eta \geq 0$  beschränkt) und Projektionskurve der kritischen Punkte

Abb. 5.14 zeigt die  $T_{12}$ -Fläche für  $\xi = 0$  mit den kritischen Punkten. (Da Gl. (5.15) von  $\xi$  unabhängig ist, erhält man für beliebiges festes  $\xi = \xi_0$  dieselbe Fläche.)

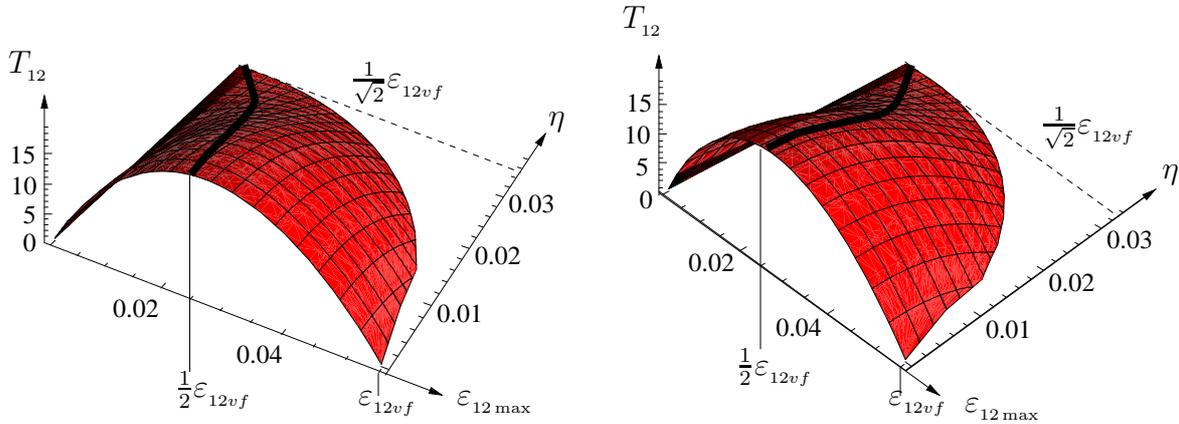


Abb. 5.14:  $T_{12}$ -Fläche für  $\xi = 0$  mit kritischen Punkten

Der Schnitt der Fläche  $T_{12}(0, \eta, \varepsilon_{12\max})$  bei  $\eta = 0$  stimmt mit der Kontur in Abb. 5.11 überein. Für den Schnitt der Fläche  $T_{12}(0, \eta, \varepsilon_{12\max})$  bei  $\varepsilon_{12\max} = \text{const.} = c$  gilt nach Gl. (5.15)

$$T_{12}(0, \eta, c) = \begin{cases} 2G_{12}c, & 0 \leq \sqrt{2\eta^2 + c^2} \leq \varepsilon_{12vb} \quad (\text{a}) \\ 2m_{12}G_{12}c \left( \varepsilon_{12vf} - \sqrt{2\eta^2 + c^2} \right), & \varepsilon_{12vb} \leq \sqrt{2\eta^2 + c^2} \leq \varepsilon_{12vf} \quad (\text{b}) \end{cases} \quad (5.16)$$

In Abb. 5.15 sind die Schnitte der Fläche  $T_{12}(0, \eta, \varepsilon_{12\max})$  für  $c = 0.002$  (links) und  $c = 0.035$  (rechts) dargestellt.

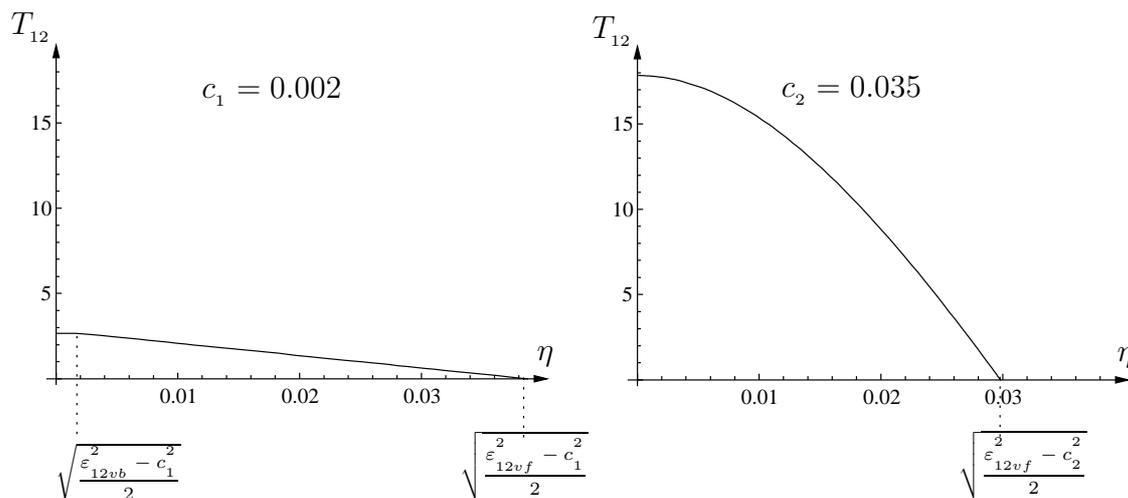


Abb. 5.15: Schnitt der Fläche  $T_{12}(0, \eta, \varepsilon_{12\max})$  bei  $\varepsilon_{12\max} = \text{const.} = c_1$  bzw.  $c_2$

### 5.4.3 Fazit aus der Analyse des Maximalspannungskriteriums

Aus der obigen Diskussion des Maximalspannungskriteriums zur Bestimmung der kritischen Verzerrungszustände lässt sich nun folgern, dass aufgrund der einfachen mathematischen Struktur der Bruchgrenzfläche das Kriterium leicht zu handhaben ist. In Kapitel 7 wird das Maximalspannungskriterium bei verschiedenen Spannungszuständen angewendet. Das Kriterium liefert aber primär keine Information über die Rissrichtung, lediglich der kritische Spannungszustand wird angegeben. Bei den in Kapitel 7 diskutierten Anwendungsfällen zeigt sich, dass die in Abschnitt 5.6 entwickelte Methode zur Ermittlung der Rissrichtung im Prinzip in Verbindung mit dem Maximalspannungskriterium auch eingesetzt werden kann.

## 5.5 Änderung des Wachstumsverhaltens

Gegeben sei ein System von gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen  $\Sigma$  erster Ordnung:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{U}) \quad (5.17)$$

mit dem Vektor der Unbekannten  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{f}(\mathbf{U})$  als vektorwertige Funktion von  $\mathbf{U}$ . Das Gleichungssystem  $\Sigma$  wird im Zustand  $\mathbf{U}^0$  exponentiell anwachsen, falls ein Eigenwert  $\lambda_{\max}$  der Matrix der partiellen Ableitungen erster Ordnung der rechten Seite

$$\mathbf{A} := \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^0} \right\}$$

einen Realteil  $\Re(\lambda_{\max})$  besitzt, dessen Wert größer null ist. Dieser Sachverhalt bedeutet in Kurzschreibweise:

$$\exists \lambda_{\max} \in \text{EW} \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^0} \right\} \quad \text{mit} \quad \Re(\lambda_{\max}) > 0. \quad (5.18)$$

Das Kriterium in Gl. (5.18) wird beispielweise in der PRANDTLschen Grenzschichttheorie zur Erkennung des Umschlagpunkts vom laminaren zum turbulenten Strömungsverhalten verwendet.  $\mathbf{U}^0$  stellt dabei die Grundlösung dar und die Matrix  $\mathbf{A}$  beschreibt das exponentielle Anwachsen kleiner Störungen

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{U}^0$$

im Zustand  $\mathbf{U}^0$  falls  $\Re(\lambda_{\max}) > 0$  ist.

### Anwendung

Im vorliegenden Fall wird die Variable  $\mathbf{U}$  wie folgt definiert:

$$\mathbf{U}^T = \left[ \mathbf{u} \quad \dot{\mathbf{u}} \quad \mathbf{T} \right] = \left[ \mathbf{u} \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad \mathbf{T} \right]$$

mit  $\mathbf{u}$  als Verschiebungsfeld,  $\dot{\mathbf{u}}$  als Geschwindigkeitsfeld und  $\mathbf{T}$  als Spannungstensor [13, 17]. Die Zusammenstellung der Feldgleichungen (2.91), (2.92) und (2.95) gemäß der

Form in Gl. (5.17) ergibt:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v} & \text{mit } \mathbf{v} \text{ als Geschwindigkeitsfeld,} \\ \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{k}) & \text{mit } \rho \mathbf{k} \text{ als Volumenkraft,} \\ \dot{\mathbf{T}} = \overset{4}{\mathbf{L}} [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \overset{4}{\mathbf{L}} \left[ (\operatorname{grad} \mathbf{v})^{\operatorname{sym}} \right] & \text{Materialgleichung mit } \overset{4}{\mathbf{L}} \text{ als} \\ & \text{Tangentenoperator vierter Ordnung.} \end{cases}$$

Die Taylor-Reihenentwicklung der rechten Seite von Gl. (5.17) um  $\mathbf{U}^0$  ergibt:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^0 + \Delta\mathbf{U}) \cong \mathbf{f}(\mathbf{U}^0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}^0} \Delta\mathbf{U};$$

daraus folgt nach Einsetzen in Gl. (5.17):

$$\dot{\mathbf{U}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}^0} \Delta\mathbf{U} + \mathbf{f}(\mathbf{U}^0) =: \mathbf{A} \Delta\mathbf{U} + \mathbf{f}(\mathbf{U}^0) \quad (5.19)$$

mit  $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}(t=0)$  als vorgegebener Anfangslösung. Die Berechnung der Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  ermöglicht die Auswertung des Gleichungssystems (5.19). Gibt es einen Eigenwert  $\lambda_A$ , dessen Realteil positiv ist ( $\Re(\lambda_A) > 0$ ), so schließen wir auf Instabilität. Diese Eigenschaft kann zum Brucheintritt bei spröden Werkstoffen führen oder auch zu Scherbändern (Gleitebenen) im Fall eines duktilen Materials wie für Umformstahl.

Bei der Anwendung dieses Kriteriums treten im vorliegenden Fall folgende Probleme auf:

1. *Ein kurzeitiges instabiles Wachstumsverhalten des nichtlinearen Systems ändert das qualitative Systemverhalten nicht. D.h., die Existenz eines kleinen Eigenwerts führt nicht notwendigerweise zum Materialbruch.*
2. *Das Kriterium liefert keine Aussage über die mögliche Rissrichtung.*

## 5.6 Bifurkationsanalyse

Bei der Bifurkationsanalyse zur Untersuchung mehrdeutiger Lösungen des Geschwindigkeitsfeldes wird in der Ausgangsgleichung (5.20) die Kopplung zwischen der Spannungsrate und der Verzerrungsrate betrachtet:

$$\dot{\mathbf{T}} = \overset{4}{\mathbf{L}}[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \overset{4}{\mathbf{L}} \left[ \frac{1}{2} \left( \operatorname{grad} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T \right) \right] = \overset{4}{\mathbf{L}} \left[ (\operatorname{grad} \mathbf{v})^{\operatorname{sym}} \right]. \quad (5.20)$$

Wenn die eindeutige Kopplung - bijektive Abbildung zwischen  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{v}$  - verloren geht, gibt es Mehrdeutigkeit der Lösung des Gleichungssystems, d.h., es gibt für ungeänderte Spannungszustände zwei verschiedene Verzerrungsraten, die das Gleichungssystem

(5.20) erfüllen. Diese Tatsache bedeutet, dass die Differenz von zwei zulässigen Geschwindigkeitsfeldern  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2 \neq \mathbf{0}$  eine Lösung des Gleichungssystems (5.21)

$$\mathbf{L}[\underbrace{(\text{grad } \Delta \mathbf{v})^{\text{sym}}}_{\Delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}] = \mathbf{0} \tag{5.21}$$

ist [10]. Daher entsteht die Mehrdeutigkeit als Existenz eines Spannungszustandes mit zwei oder mehr zugehörigen unterschiedlichen Geschwindigkeitszuständen des materiellen Punkts.

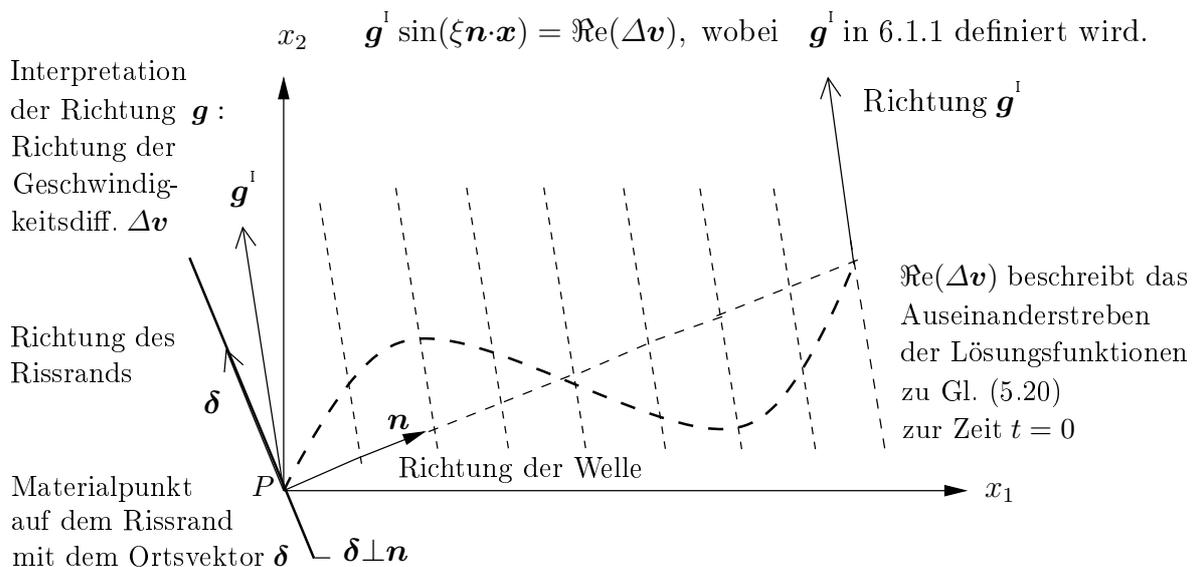
### 5.6.1 Darstellung der Differenzfunktion $\Delta \mathbf{v}$

**Ansatz 1:** Wir betrachten die Differenz von zwei zulässigen Lösungen in der folgenden Form

$$\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{g} \exp(\pm i \xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \tag{5.22}$$

mit  $i$  als imaginärer Einheit. Der Ansatz 1 beschreibt eine Momentaufnahme zum Zeitpunkt  $t = 0$  des Geschwindigkeitsfelds als elastodynamische Wellenausbreitung in einem räumlichen Kontinuum in der Richtung des Vektors  $\mathbf{n}$  mit  $\xi$  als Wellenzahl (Inverse der Wellenlänge) und  $\mathbf{x}$  als Ortsvektor eines Materialpunkts, der sich mit einer Geschwindigkeit  $\Delta \mathbf{v}$  in Richtung des Vektors  $\mathbf{g}$  bewegt - s. Abb. 5.16. Es wird darauf hingewiesen, dass dies ein spezieller Ansatz ist, begründet durch Überlegungen zur Entwicklung der allgemeinen Lösung in eine Fourierreihe [11, 31, 56].

Abb. 5.16 zeigt die qualitative Darstellung von  $\Delta \mathbf{v}$  über einer Linie von Materialpunkten in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene. Bei  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{0}$  gilt die Eindeutigkeit und bei  $\Delta \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  die Mehrdeutigkeit; die Grenzlinien zwischen diesen Gebieten beschreiben die Rissrichtungen, die in Abhängigkeit von  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{g}$  entstehen.



**Abb. 5.16:** Graphische Veranschaulichung der Differenzfunktion  $\Delta \mathbf{v}$  in der Ebene der Ortspunkte

Nach Gl. (5.20) beschreibt  $(\text{grad } \Delta \mathbf{v})^{\text{sym}} = \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  die Mehrdeutigkeit der Änderung des Dehnungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}$  zu gleichen Werten der Spannungsrate  $\dot{\mathbf{T}}$ . Die Normale  $\mathbf{n}$  beschreibt die Richtung in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene, in der diese Änderung ihren maximalen Wert annimmt. Senkrecht zu dieser Richtung findet kein Wachstum von  $\Delta \mathbf{v}$  statt, d.h., in dieser Richtung gibt es keinen Materialbruch. Diese Richtung muss daher den Rissrand kennzeichnen.

**Rissbildungshypothese:** Es gäbe  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{g} \exp(\pm i\xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$  als Bifurkationslösung<sup>1</sup>, dann ist die Rissrichtung senkrecht zur Wellenausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$ .

**Fazit:** Die Bifurkationsanalyse zeigt also den Materialbruch und damit die Richtung, in die sich ein Riss im spröden Werkstoff entwickeln kann. Bezüglich der Rissentstehung wird im Folgenden das Kriterium bewiesen:

**Satz 5.2: (Rissbildungskriterium)**

Es sei

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{g} \exp(\pm i\xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$$

als Differenz von zwei Lösungen  $\mathbf{v}^1$  und  $\mathbf{v}^2$  der Anfangsrandwertaufgabe und die Materialbeziehung in Gl. (5.20) als Kopplung zwischen der Spannungs- und Verzerrungsrate gegeben. Ferner sei der Richtungsvektor  $\mathbf{n}$  in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene - s. Abb. 5.16 - wie folgt parametrisiert:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}^T. \quad (5.23)$$

Falls ein  $\theta_R$  existiert, so dass eine reelle Zahl  $z_R = \tan \theta_R$  eine Nullstelle des quartischen Polynoms

$$\begin{aligned} P(z) &:= z^4 L_{1212} L_{2222} + z^3 L_{1211} (L_{2222} + L_{2211}) \\ &\quad - z^2 [L_{1212} (L_{2211} + L_{1122}) - L_{1111} L_{2222} + L_{1122} L_{2211}] \\ &\quad - z L_{1211} (L_{1111} + L_{1122}) + L_{1212} L_{1111} \end{aligned} \quad (5.24)$$

ist, dann ist ein Riss vorhanden, der senkrecht zur Normalen mit dem Neigungswinkel  $\theta_R$  verläuft. Das Polynom  $P(z)$  wird im Folgenden hergeleitet - s. Abschnitt 5.6.3.

---

<sup>1</sup>Indizes werden weggelassen, weil - falls es überhaupt solche  $\Delta \mathbf{v}$  gibt - sie von der Form Gl. (5.22) sind.

### 5.6.2 Herleitung des Rissbildungskriteriums

Eine Bifurkation der Gl. (5.20) bedeutet:

$$\dot{\mathbf{T}}_1 = \overset{4}{\mathbf{L}} [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1] \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{T}}_2 = \overset{4}{\mathbf{L}} [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2] \quad \text{für} \quad \dot{\mathbf{T}}_1 = \dot{\mathbf{T}}_2 \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \neq \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$$

Für  $\Delta \dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}_1 - \dot{\mathbf{T}}_2 = \mathbf{0}$  und  $\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \neq \mathbf{0}$  folgt damit:

$$\mathbf{0} = \Delta \dot{\mathbf{T}} = \overset{4}{\mathbf{L}} [\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] \quad (5.25)$$

Die Tensorgleichung (5.25) wird mit einem beliebigen Vektor  $\mathbf{N}$  skalar multipliziert und zu einer Vektorgleichung verjüngt:

$$\mathbf{0} = \Delta \dot{\mathbf{T}} \mathbf{N} = \dot{\mathbf{T}}_1 \mathbf{N} - \dot{\mathbf{T}}_2 \mathbf{N} = \overset{4}{\mathbf{L}} [\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] \mathbf{N}. \quad (5.26)$$

Die Größe

$$\dot{\mathbf{s}} := \dot{\mathbf{T}} \mathbf{N} \quad (5.27)$$

kann als Zeitableitung des Spannungsvektors interpretiert werden, der bezüglich einer Ebene entsteht, die senkrecht zu  $\mathbf{N}$  durch den betrachteten Ortspunkt im Material verläuft - s. Abb. 2.3. Wegen

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left[ \text{grad } \Delta \mathbf{v} + (\text{grad } \Delta \mathbf{v})^T \right] \quad (5.28)$$

ergibt Gl. (5.26)

$$\mathbf{0} = \Delta \dot{\mathbf{s}} = \Delta \dot{\mathbf{T}} \mathbf{N} = \overset{4}{\mathbf{L}} [\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] \mathbf{N}. \quad (5.29)$$

Mit Gl. (5.28) folgt für  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{g} \exp(i \xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = i \xi \frac{1}{2} [\mathbf{g} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}] \exp(i \xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}). \quad (5.30)$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie des instantanen Materialsteifigkeitstensors  $L_{ijkl}$  hinsichtlich der Vertauschbarkeit der Indizes  $k$  und  $l$  ergibt die Gl. (5.29) zusammen mit Gl. (5.30):

$$\mathbf{0} = \Delta \dot{\mathbf{s}} = \Delta \dot{\mathbf{T}} \mathbf{N} = \overbrace{\left( \overset{4}{\mathbf{L}} [\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] \right)}^{(*)} \mathbf{N} = i \xi \exp(i \xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \overbrace{\left( \overset{4}{\mathbf{L}} [\mathbf{g} \otimes \mathbf{n}] \right)}^{(**)} \mathbf{N}. \quad (5.31)$$

Wegen Symmetrien von  $\overset{4}{\mathbf{L}}$  folgt aus (\*) dann (\*\*). Da  $\mathbf{N}$  beliebig ist, kann man  $\mathbf{N} = \mathbf{n}$  wählen.

**Bemerkung:** Die Wahl  $\mathbf{N} = \mathbf{n}$  kann damit motiviert werden, dass beim Entstehen des Bruchs in der Richtung, die parallel zum Bruchrand verläuft, keine Mehrdeutigkeit der Änderung des Spannungsvektors vorhanden sein darf. In Rissrichtung ist die Bedingung (5.31) trivial erfüllt, da sie aus der Annahme folgt, dass das Material in dieser Richtung unbeschädigt ist, d.h. keine Bifurkation auftritt. Damit folgt aus Gl. (5.31) die Vektorgleichung

$$\pm i \xi \overbrace{\exp(i \xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}^{\neq 0} \left( \overset{4}{\mathbf{L}} [\mathbf{g} \otimes \mathbf{n}] \right) \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (5.32)$$

Der exponentielle Vorfaktor ist i.a. ungleich null, so dass Gl. (5.32) zu folgendem homogenen Gleichungssystem führt:

$$\left[ \mathbf{n} \overset{4}{\mathbf{L}} \mathbf{n} \right] \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \mathbf{H} \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (5.33)$$

mit dem Lokalisierungstensor

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n} \overset{4}{\mathbf{L}} \mathbf{n}], \quad (5.34)$$

dessen Bildungsgesetz mittels Indexschreibweise in Gl. (5.36) erklärt wird. Da  $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$  vorausgesetzt ist, bedeutet dies, dass das Gleichungssystem (5.33) singularär ist, d.h.

$$\det [\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \det \left[ \mathbf{n} \overset{4}{\mathbf{L}} \mathbf{n} \right] = 0. \quad (5.35)$$

Gl. (5.35) stellt somit die Bifurkationsbedingung dar, die in Satz 5.2 behauptet wurde. Es wird das Polynom P in Gl. (5.24) durch

$$P(\tan \theta) = \det \left[ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \overset{4}{\mathbf{L}} (\boldsymbol{\varepsilon}) \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \right]$$

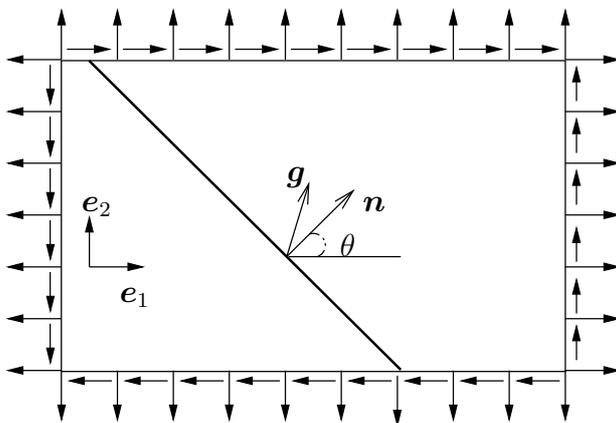
definiert.

### 5.6.3 Lokalisierungstensor als Funktion der Winkelkoordinate

Der Lokalisierungstensor  $\mathbf{H}$  ist ein Indikator zur Feststellung der Nichteindeutigkeit des Gleichungssystems gemäß Gl. (5.33). Er ist durch die einzelnen Komponenten  $H_{ik}$  laut Gl. (5.34) gegeben:

$$H_{ik} = n_j L_{ijkl} n_l \quad \text{mit} \quad i, j, k, l = 1, 2. \quad (5.36)$$

Wie in Abb. 5.17 zu sehen ist, wird eine Parametrisierung des Richtungsvektors gemäß Gl. (5.23)  $\mathbf{n} = [\cos \theta \quad \sin \theta]^T$  vorgenommen. Damit erhält man den Lokalisierungstensor  $\mathbf{H}$  als Funktion der Winkelkoordinate  $\theta$ . Die Determinante des Lokalisierungstensors ist somit ein Polynom mit der Winkelkoordinate  $\theta$  als Variable. Die Unbekannte  $\theta$  stellt, wie auf Seite 69 angedeutet, die Rissnormale dar - s. Abb. 5.17.



**Abb. 5.17:** Allgemein belastetes infinitesimales Element der Ebene

Die Singularitätsbedingung  $\det \left[ \mathbf{n} \overset{4}{\mathbf{L}} \mathbf{n} \right] = 0$  ergibt die Nullstellen des Polynoms in Gl. (5.24). Die Existenz von reellen Nullstellen bedeutet, dass ein Vektor

$$\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$$

existiert, der die *Rissnormalenrichtung* darstellt, sobald der Bruch auftritt.

Die Komponenten des Lokalisierungstensors  $\mathbf{H}$  lauten gemäß Gl. (5.36):

$$\begin{aligned}
H_{11} &= L_{1111} \cos^2 \theta + L_{1212} \sin^2 \theta + L_{1211} \cos \theta \sin \theta \\
H_{12} &= (L_{1122} + L_{1212}) \cos \theta \sin \theta - L_{1211} \sin^2 \theta \\
H_{21} &= (L_{2211} + L_{1212}) \cos \theta \sin \theta + L_{1211} \cos^2 \theta \\
H_{22} &= L_{1212} \cos^2 \theta + L_{2222} \sin^2 \theta - L_{1211} \cos \theta \sin \theta
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Das Auswerten der Determinante in Gl. (5.35) ergibt ein Polynom  $Q(\mathbf{n})$ :

$$\det[\mathbf{H}] = \det \left[ \mathbf{n} \overset{4}{\mathbf{L}} \mathbf{n} \right] =: Q(\mathbf{n}) = 0. \tag{5.38}$$

Die Existenz reeller Nullstellen des Polynoms  $Q(\mathbf{n})$  wird als Materialversagen interpretiert. Die Nullstelle gibt die Rissrichtung an. Mit Gl. (5.23) und Gl. (5.38) hat die Singularitätsbedingung Gl. (5.35) die Gestalt

$$Q(\theta) := H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = 0 \tag{5.39}$$

mit

$$\begin{aligned}
Q(\theta) &= \sin^4 \theta L_{1212} L_{2222} + \sin^3 \theta \cos \theta L_{1211} (L_{2222} + L_{2211}) \\
&\quad - \sin^2 \theta \cos^2 \theta [L_{1212} (L_{2211} + L_{1122}) - L_{1111} L_{2222} + L_{1122} L_{2211}] \\
&\quad - \sin \theta \cos^3 \theta L_{1211} (L_{1111} + L_{1122}) + \cos^4 \theta L_{1212} L_{1111}.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Das Dividieren durch  $\cos^4 \theta$  führt zu:

$$\begin{aligned}
Q_1(\theta) := \frac{Q(\theta)}{\cos^4 \theta} &= \tan^4 \theta L_{1212} L_{2222} + \tan^3 \theta L_{1211} (L_{2222} + L_{2211}) \\
&\quad - \tan^2 \theta [L_{1212} (L_{2211} + L_{1122}) - L_{1111} L_{2222} + L_{1122} L_{2211}] \\
&\quad - \tan \theta L_{1211} (L_{1111} + L_{1122}) + L_{1212} L_{1111}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Das gesuchte Polynom  $P(z)$  in Gl. (5.24) entsteht durch die Substitution von  $\tan \theta = z$

aus  $Q_1(\theta)$  :

$$\begin{aligned}
P(z) = & z^4 L_{1212} L_{2222} + z^3 L_{1211} (L_{2222} + L_{2211}) \\
& - z^2 [L_{1212} (L_{2211} + L_{1122}) - L_{1111} L_{2222} + L_{1122} L_{2211}] \\
& - z L_{1211} (L_{1111} + L_{1122}) + L_{1212} L_{1111} .
\end{aligned} \tag{5.42}$$

$P(z)$  ist ein *quartisches Polynom*, das maximal vier reelle Nullstellen besitzt. Man erhält somit die Brucherkennungsbedingung. Das Polynom  $P(z)$  hängt über seine Parameter  $L_{ijkl}$  von den folgenden physikalischen Größen ab:

- $\boldsymbol{x}$ , dem Ortsvektor des Materialpunkts
- $\boldsymbol{\epsilon}$ , dem Dehnungszustand, der im Ortspunkt  $\boldsymbol{x}$  angenommen wird
- von vorgegebenen Materialparametern

Während eines Belastungsprozesses (Variation von  $\boldsymbol{\epsilon}$ ) werden die Nullstellen  $z$  von  $P(z)$  untersucht. Sobald eine reelle Nullstelle auftritt, ist eine Bifurkation erkannt und es wird auf einen Materialbruch geschlossen.

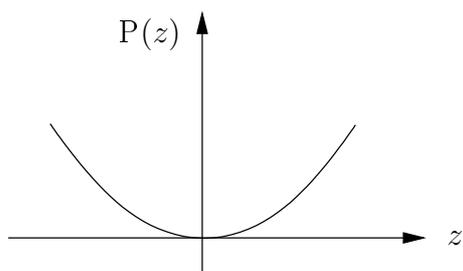
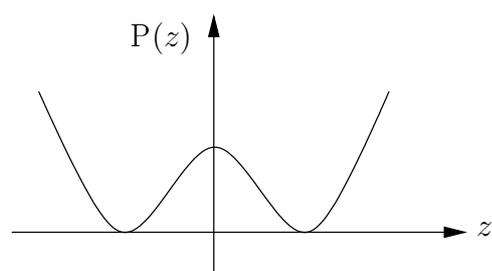
**Bruchbedingung:** Man schließt auf das Ende der Materialstabilität im Punkt  $\boldsymbol{x}$ , falls beim Dehnungsprozess  $\boldsymbol{\epsilon}(t)$  ( $t \in [t_0, t_{\text{Bruch}}]$ ) beginnend mit dem Zeitpunkt  $t_0$  das Polynom  $P(\boldsymbol{\epsilon}, z)$  für den Brucheintritt  $t = t_{\text{Bruch}}$  eine reelle Nullstelle hat.

Reelle Nullstellen dieses Polynoms erhärten nicht nur die Existenz von Rissen, sondern sie stellen auch Winkel  $\theta$  dar, welche die mögliche Rissrichtung darlegen. Man unterscheidet für die Bestimmung des Rissverlaufs zwischen dem Existieren von einer und mehr als einer reellen Nullstelle. Die Rissrichtung ist eindeutig, wenn nur eine Nullstelle existiert, andernfalls kann sie mehrdeutig sein - s. Lemma 5.3.

#### 5.6.4 Interpretation der Anzahl von reellen Nullstellen der Singularitätsbedingung

**Lemma 5.3:** Die Anzahl von reellen Nullstellen lässt sich für die Bestimmung der Rissrichtung in zwei Kategorien unterteilen. Zur ersten Kategorie gehören die Polynome mit nur einer einzigen reellen Nullstelle. Zur zweiten Kategorie zählen alle Polynome mit mehr als einer reellen Nullstelle:

1. Falls es nur eine reelle Nullstelle gibt, dann ist sie mindestens doppelt oder gar vierfach - s. Abb. 5.18. Dies bedeutet, dass der Bruch in einer festgelegten Richtung erfolgt.
2. Falls mehr als eine reelle Nullstelle existiert (Abb. 5.19), so bedeutet dies, dass der Bruch in einer unbestimmten Richtung erfolgt. Somit kann sich in jeder der ermittelten Richtungen ein Riss bilden.

**Abb. 5.18:** Eine doppelte reelle Nullstelle**Abb. 5.19:** Mehrere reelle Nullstellen

Falls das Polynom  $P(z)$  in Gl. (5.24) mehrere reelle Nullstellen besitzt, so erscheint es zunächst möglich, dass durch die Bildung einer Linearkombination der zugehörigen Lösungen neue Lösungen mit anderen Rissrichtungen entstehen können. Alle diese Möglichkeiten werden im nächsten Kapitel untersucht.

# Kapitel 6

## Rissbildung

Zunächst wird mit Hilfe der Bifurkationsanalyse das Berechnungsverfahren zur Rissbildung beschrieben und anschließend dessen Anwendung an einfachen Teststrukturen vorgestellt.

### 6.1 Rissbildung und Berechnung des Rissrands

Die Interpretation des Trennungsverhaltens von festen Körper wird im Folgenden formuliert. Dabei wird untersucht, welche Rissränder entstehen, um anschließend die Rissrandkurve darzustellen.

**Bedingung für die Stetigkeit der Rissentstehung:** Da der betrachtete Punkt der Rissentstehung an den Ursprung des Koordinatensystems gelegt wird, muss für eine gegebene Separationsfunktion  $\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x})$  für stetiges Anwachsen des Risses die Bedingung

$$\Delta \mathbf{v}[\mathbf{x} = \mathbf{0}, t = t_{\text{Bruch}}] = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

gelten, mit  $t_{\text{Bruch}}$  als Zeitpunkt des Rissbeginns.

#### 6.1.1 Der Fall einer eindeutigen Kennzeichnung des Rissrands

Wir setzen hier voraus, dass beim Übergang der Nullstellen des quartischen Polynoms aus dem Komplexen ins Reelle nur eine (doppelte) reelle Nullstelle entsteht. Mit Hilfe der EULERSchen Formel wird der allgemeine Lösungsansatz aus der Gl. (5.22) ( $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{g} \exp(\pm i \xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$ ) umgeformt und in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{g} \exp(\pm i \xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) = \overbrace{\Delta \mathbf{v}^{\text{R}}(\mathbf{x})}^{\text{Realteil}} + i \overbrace{\Delta \mathbf{v}^{\text{I}}(\mathbf{x})}^{\text{Imaginär}}. \quad (6.2)$$

Der Vektor  $\mathbf{g}$  für die Koeffizienten muss komplex angenommen werden:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^{\text{R}} \pm i \mathbf{g}^{\text{I}}. \quad (6.3)$$

Nach Umformung des Ausdrucks in Gl. (6.2) und Einsetzen von Gl. (6.3) erhält man:

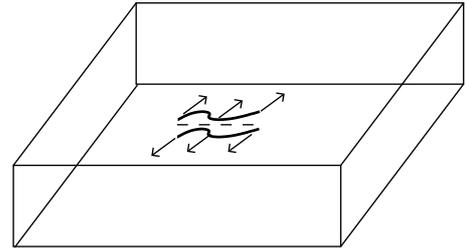
$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \left[ \mathbf{g}^{\text{R}} \pm i \mathbf{g}^{\text{I}} \right] \left[ \cos(\xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \pm i \sin(\xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \right] \\ &= \underbrace{\mathbf{g}^{\text{R}} \cos(\xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{g}^{\text{I}} \sin(\xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}_{=:\Delta \mathbf{v}^{\text{R}}(\mathbf{x})} \pm i \underbrace{\left[ \mathbf{g}^{\text{I}} \cos(\xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{g}^{\text{R}} \sin(\xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \right]}_{=:\Delta \mathbf{v}^{\text{I}}(\mathbf{x})}.\end{aligned}$$

Der imaginäre Teil  $i\Delta \mathbf{v}^{\text{I}}$  des Geschwindigkeitsfeldes ist ohne physikalische Bedeutung und wird nicht weiter verfolgt. Für die Bestimmung der reellen Nullstellen des quartischen Polynoms in Gl. (5.24), wird nur der Realteil in Gl. (6.2)  $\Delta \mathbf{v}^{\text{R}}(\mathbf{x})$  weiter betrachtet. Er lautet:  $\Delta \mathbf{v}^{\text{R}} = \Re[\Delta \mathbf{v}]$  und liefert das tatsächliche Auseinanderstreben der Lösungen nach dem Beginn des Bifurkationsvorgangs. Der Realteil der allgemeinen Lösung für das Nullstellenproblem des quartischen Polynoms<sup>1</sup> ergibt sich zu:

$$\Delta \mathbf{v}^{\text{R}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^{\text{R}} \cos(\xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{g}^{\text{I}} \sin(\xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad (\mathbf{g}^{\text{R}}, \mathbf{g}^{\text{I}} \in \mathbb{R}^2) \quad (6.4)$$

mit  $\mathbf{g}^{\text{R}}$  als Real- und  $\mathbf{g}^{\text{I}}$  als Imaginärteil von  $\mathbf{g}$  - s. Gl. (6.3).

In Abb. 6.1 ist die Forderung nach Stetigkeit der Rissentstehung veranschaulicht, wo der Bruch mit seinen anfangsparallelen Rissränder aus dem Kontinuumszustand heraus eine allmählich von "null" aus anwachsende Klaffung verursacht. Ferner soll der Prozess der Rissentstehung stetig sein. Dabei soll - ohne Beschränkung der Allgemeinheit (O.B.d.A.) - die Annahme getroffen werden, dass der Ursprung des Koordinatensystems an den betrachteten Punkt gelegt wird. Dann ist  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  an der Rissstelle gültig, d.h. der Riss soll im Koordinatenursprung sich von Null an öffnen - s. Gl. (6.1).



**Abb. 6.1:** Riss mit Bewegungsrichtung der Rissränder

Zusammen mit Gl. (6.4) folgt aus Gl. (6.1), dass  $\Delta \mathbf{v}^{\text{R}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  sein muss, denn die Cosinus-Glieder sind bei  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  nicht null. Dann folgt:

$$\mathbf{g}^{\text{R}} \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}^{\text{I}} \in \mathbb{R}^2$$

und es verbleibt in Gl. (6.4):

$$\Delta \mathbf{v}^{\text{R}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^{\text{I}} \sin(\xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}).$$

Die Rissöffnung ( $\Delta \mathbf{v}^{\text{R}}$ ) erfolgt daher in Form einer sinusförmigen Wellenausbreitung. Sie bewirkt, dass die Bruchränder in Richtung des Vektors  $\mathbf{n}$  auseinanderstreben, während der Riss selbst dann senkrecht zu  $\mathbf{n}$  verläuft.

**Ergebnis:** Hat das quartische Polynom nur eine (doppelte) reelle Nullstelle beim Übergang der Nullstellen ins Reelle, so entsteht ein Riss mit einer Richtung, die überall senkrecht zu  $\mathbf{n}$  also in Richtung von  $\mathbf{n}^{\perp}$  verläuft.

<sup>1</sup>s. Gl. (5.42) S.73

### 6.1.2 Der Fall einer mehrdeutigen Kennzeichnung des Rissrands

Anhand einer Linearkombination der reellen Lösungen  $\Delta \mathbf{v}^{1R}(\mathbf{x})$  und  $\Delta \mathbf{v}^{2R}(\mathbf{x})$ , die Nullstellen des quartischen Polynoms in Gl. (5.24) entsprechen, wird geprüft, ob sie sich überlagern und dabei möglicherweise neue Bruchränder entstehen können. Es sei  $\Theta(\mathbf{x})$  eine Funktion, die die Kurve  $\Sigma$  des Rissrands Gl. (6.5) darstellt:

$$\Sigma = \{ \mathbf{x} \mid \Theta(\mathbf{x}) = 0 \} \quad (6.5)$$

O.B.d.A. der Lösung  $\mathbf{x}$

wird so gewählt, dass  $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0]^T$  den Punkt beschreibt, an dem die Rissbildung beginnt. Um die Kurve  $\Theta(\mathbf{x}) = 0$  zu bestimmen, betrachten wir die Überlagerung von  $\Delta \mathbf{v}^{1R}(\mathbf{x})$  und  $\Delta \mathbf{v}^{2R}(\mathbf{x})$ , die den Bifurkationsvorgang in den Richtungen  $\mathbf{n}^1$  und  $\mathbf{n}^2$  angibt. Existiert mehr als eine reelle Nullstelle des quartischen Polynoms, so ergeben sich zwei Normalenrichtungen  $\mathbf{n}^1$  und  $\mathbf{n}^2$ . Dann ergibt sich die allgemeine reelle Lösung  $\Delta \mathbf{v}^R(\mathbf{x})$  als Linearkombination der einzelnen Lösungen zu:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}^R(\mathbf{x}) &= \left( \mathbf{g}^{1R} \cos(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{g}^{1I} \sin(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) \right) \alpha_1 \\ &+ \left( \mathbf{g}^{2R} \cos(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{g}^{2I} \sin(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x}) \right) \alpha_2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

mit  $\mathbf{n}^1$  und  $\mathbf{n}^2$  als Richtungen aus der Parametrisierung der reellen Nullstellen des quartischen Polynoms. Da die Funktion  $\Delta \mathbf{v}^R(\mathbf{x})$  am Rissbeginn identisch Null ist, so ergibt sich für die Kurve  $\Sigma$ , die den Rissrand darstellt, folgender Zusammenhang zum Zeitpunkt des Rissbeginns (Anfangsbedingung):

$$\Delta \mathbf{v}^R(\mathbf{x}) \Big|_{\Sigma} = \mathbf{0}. \quad (6.7)$$

Wählen wir wieder o.B.d.A.  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  als Ort am Zeitpunkt des Rissbeginns, so folgt wegen Annahme (6.1) bzw. (6.7):

$$\alpha_1 \mathbf{g}^{1R} + \alpha_2 \mathbf{g}^{2R} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \mathbf{g}^{1R} = -\alpha_2 \mathbf{g}^{2R}. \quad (6.8)$$

Mit Hilfe der Taylorreihe stellt man fest, dass der Einfluss der cosinus-Terme auf das Wachstum der Funktion  $\Delta \mathbf{v}^R$  quadratisch ist. Für die cosinus-Terme in Gl. (6.6) gilt nun:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}^R(\mathbf{x}) &= \alpha_1 \mathbf{g}^{1R} \cos(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) - \alpha_1 \mathbf{g}^{1R} \cos(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x}) \\ &= \alpha_1 \mathbf{g}^{1R} \left[ \cos(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) - \cos(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x}) \right] \simeq \alpha_1 \mathbf{g}^{1R} \left( O(|\mathbf{x}|^2) \right) \end{aligned}$$

Dieser Einfluss der cosinus-Terme ist deshalb für das stetige Anwachsen des Risses von Null aus vernachlässigbar gegenüber dem der sinus-Terme, für die gilt:

$$\sin(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) \simeq O(|\mathbf{x}|)$$

Die Richtung, in der der Riss auftritt, wird hauptsächlich von den sinus-Termen bestimmt:

$$\Delta \mathbf{v}^R(\mathbf{x}) \simeq \tilde{\Delta} \mathbf{v}^R(\mathbf{x}) = \alpha_1 \mathbf{g}^{1I} \sin(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) + \alpha_2 \mathbf{g}^{2I} \sin(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x}) \quad (6.9)$$

Aus der Forderung, dass der Lösungsansatz Gl. (6.9) am Rissrand stetig sein soll, entsteht nachfolgende Beziehung Gl. (6.10) für den Rissrand:

$$\tilde{\Delta \mathbf{v}}^R(\mathbf{x}) = \alpha_1 \mathbf{g}^{11} \sin(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) + \alpha_2 \mathbf{g}^{21} \sin(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (6.10)$$

Diese Beziehung verwenden wir nun zur Bestimmung der gesuchten Funktion  $\Theta(\mathbf{x})$ . In der Notation von Gl. (6.10) sind die Größen

$$\beta^1 := \sin(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \beta^2 := \sin(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x})$$

Skalare. Der Ortsvektor  $\mathbf{x}$  wird so definiert, dass bei  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ein Riss beginnt. Eine Kompensation der Sinus-Terme, die am Rissrand vorausgesetzt werden muss, bedeutet  $\sin(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) = 0$  und  $\sin(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x}) = 0$ . In diesem Fall erhält man die Rissränder, die schon im Fall der einzelnen Nullstelle besprochen wurden. Eine neue Richtung kann daher nur entstehen, wenn sich die sinus-Termen gegenseitig in Gl. (6.10) kompensieren. Für die Erfüllbarkeit von Gl. (6.10) müssen die Vektoren  $\mathbf{g}^{11}$  und  $\mathbf{g}^{21}$  somit linear abhängig sein:

$$\alpha_1 \mathbf{g}^{11} + \alpha_2 \mathbf{g}^{21} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit wird die Beziehung Gl. (6.10) darstellbar durch:

$$\tilde{\Delta \mathbf{v}}^R(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^{11} \left[ \alpha_1 \sin(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) + \alpha_2 \sin(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x}) \right] = \mathbf{g}^{11} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

mit

$$f(\mathbf{x}) = \alpha_1 \sin(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) + \alpha_2 \sin(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x}). \quad (6.11)$$

Da der Vektor  $\mathbf{g}^{11} \neq \mathbf{0}$  ist, muss die Forderung  $f(\mathbf{x}) = 0$  erfüllt werden. Aus diesem Grund ist  $f = \Theta$  die gesuchte Beschreibungsfunktion des Rissrands. Die Menge aller Materialpunkte  $\mathbf{x}$ , die die Bedingung  $\Theta(\mathbf{x}) = 0$  einhalten, stellt somit die Kurve des Rissrands dar:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{ \mathbf{x} \mid \alpha_1 \sin(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) + \alpha_2 \sin(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x}) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2, \xi \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \mathbf{x} \mid \sin(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) + \alpha \sin(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x}) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha := \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \xi \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

### 6.1.3 Untersuchung der Randkurven

Durch Einsetzen von zwei unterschiedlichen Einheitsvektoren  $\mathbf{n}^1$  und  $\mathbf{n}^2$  der beiden Lösung  $\Delta \mathbf{v}^{1R}$  und  $\Delta \mathbf{v}^{2R}$  in Gl. (6.11) wird mit  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$  die Funktion  $\Theta(\mathbf{x})$  in folgender Form angegeben:

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{x}) &= \sin(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) + \alpha \sin(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x}) \\ &= \sin(\xi n_1^1 x_1 + \xi n_2^1 x_2) + \alpha \sin(\xi n_1^2 x_1 + \xi n_2^2 x_2) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Anhand der Darstellung von Gl. (6.12) kann die Untersuchung des Kurvenverlaufs von  $\Theta(\mathbf{x})$  vorgenommen werden. Dazu stellen wir für die Materialpunkte  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$ , für die  $\Theta(\mathbf{x}) = 0$  gilt, eine Komponente (z.B.  $x_2$ ) als Funktion der anderen Komponente (hier z. B.  $x_1$ ) dar, d.h.  $x_2 = f_1(x_1)$  bzw.  $x_1 = f_2(x_2)$ . Die Randkurven sind

sowohl von der skalaren Größe  $\alpha$  als auch von der Wellenzahl  $\xi$  und den Einheitsvektoren  $\mathbf{n}^1$  und  $\mathbf{n}^2$  abhängig. Untersuchungen des Verlaufs der Randkurven werden im Folgenden in Abhängigkeit von der skalaren Größe  $\alpha$  vorgenommen. Aus der Gl. (6.12) lassen sich die Funktionen  $f_1(x_1)$  und  $f_2(x_2)$  bestimmen. Für den speziellen Fall  $\alpha = \pm 1$  können die Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  explizit angegeben werden. Es folgt:

$$\sin\left(\xi n_1^1 x_1 + \xi n_2^1 x_2\right) = \pm \sin\left(\xi n_1^2 x_1 + \xi n_2^2 x_2\right)$$

und dies führt nach Umformung zu

$$x_2 = f_1(x_1) = \frac{-n_1^1 \pm n_1^2}{n_2^1 \pm n_2^2} x_1 \quad \text{oder} \quad x_1 = f_2(x_2) = \frac{n_2^2 \pm n_2^1}{n_1^1 \pm n_1^2} x_2 .$$

In den anderen Fälle (d.h.  $\alpha \neq \pm 1$ ) lassen sich nur unter expliziter Kenntnis von  $\alpha$ ,  $\xi$ ,  $\mathbf{n}^1$  und  $\mathbf{n}^2$  die Funktionsgleichungen  $f_1$  bzw.  $f_2$  für den Verlauf des Rissränder explizit angeben. Diese Kurven - nachfolgend als Rissränder bezeichnet - werden einer Parameterstudie an einigen Sonderfälle unterzogen. Mit den daraus gewonnenen Erkenntnissen lassen sich Rückschlüsse auf mögliche Verläufe der Rissränder auch für den allgemeinen Fall ableiten.

### Erläuterung der Argumentation

Die Beziehung (6.12) Seite 78 mit  $\Theta(\mathbf{x}) \equiv 0$  wird nur für reelle  $x_1, x_2$  im Punkt  $(x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$  untersucht. Gibt es keine reellen  $x_1, x_2$  so gibt es auch keinen Bruch und daher keine Notwendigkeit diese Gleichung weiter auszuwerten. Untersucht wird für  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$  die Gleichung (6.12):

$$\sin\left(\xi n_1^1 x_1 + \xi n_2^1 x_2\right) = -\alpha \sin\left(\xi n_1^2 x_1 + \xi n_2^2 x_2\right)$$

$\alpha$  ist in der weiteren Argumentation ein fester Parameter. Die Untersuchung erfolgt für einen Punkt im  $\mathbb{R}^2$ , der hier o.B.d.A als der Punkt  $(0,0)$  betrachtet wird.

**Annahme:**  $|\alpha| \leq 1^2$

Die Sinusfunktion ist von

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

bijektiv d.h. bei diesem Definitionbereich ist die Gl. (6.12) eindeutig auflösbar nach  $x_1$  für  $x_2$  vorgegeben, wenn nur der Lösungszweig, der stetig durch den Anfangspunkt  $(x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$  verläuft, beobachtet wird.

Im Fall

$$\mathbf{n}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{n}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

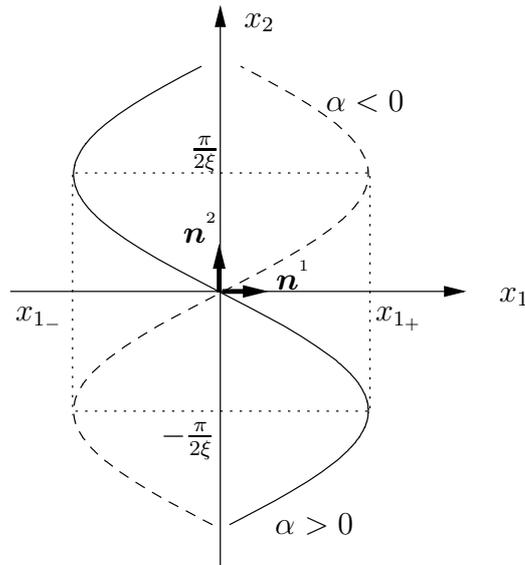
ergibt sich Gl. (6.12) zu

$$\sin(\xi x_1) = -\alpha \sin(\xi x_2) \tag{6.13}$$

Für vorgegebene  $x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2\xi}, \frac{\pi}{2\xi}\right]$  ist diese Gleichung mit  $|\alpha \sin(\xi x_2)| < 1$  für  $x_1$  im Intervall  $[x_{1-}, x_{1+}]$  eindeutig auflösbar. Die Randwerte  $(x_{1-}, x_{1+})$  ergeben sich aus  $\sin(\xi x_{1-}) = \alpha$  und  $\sin(\xi x_{1+}) = -\alpha$ .

---

<sup>2</sup>Wäre  $|\alpha| > 1$  untersuchen wir  $-\frac{1}{\alpha} \sin(\xi n_1^1 x_1 + \xi n_2^1 x_2) = \sin(\xi n_1^2 x_1 + \xi n_2^2 x_2)$



**Abb. 6.2:** Rissränder falls  $|\alpha| < 1$

Die in Abb. 6.2 gestrichelte Kurve wird von den Werten  $(x_{1-}, -\frac{\pi}{2\xi})$  nach unten bzw.  $(x_{1+}, \frac{\pi}{2\xi})$  nach oben für weitere  $x_2$  Werte stetig fortgesetzt, daher muss der  $x_1$  Wert bei  $x_{1-}$  erhöht bzw. bei  $x_{1+}$  erniedrigt werden, wenn  $x_2$  über  $\frac{\pi}{2\xi}$  anwächst bzw.  $-\frac{\pi}{2\xi}$  abfällt. Die graphischen Veranschaulichungen sind für  $\alpha$  positiv und negativ in Abb. 6.2 dargestellt. Der Parameter  $\xi$  kann als Skalierungsfaktor aufgefasst werden. Die Vergrößerung von  $\xi$  entspricht einer Maßstabvergrößerung d.h. einer Verkleinerung der Kurven. Dadurch wird gezeigt, dass die in Abb. 6.2 gekennzeichneten Kurven für  $\xi \rightarrow \infty$  gegen die  $x_2$ -Achse streben.

Im Fall

$$\mathbf{n}^1 = [1 \quad 0]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{n}^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} [1 \quad 1]^T$$

führt Gl. (6.12) zu

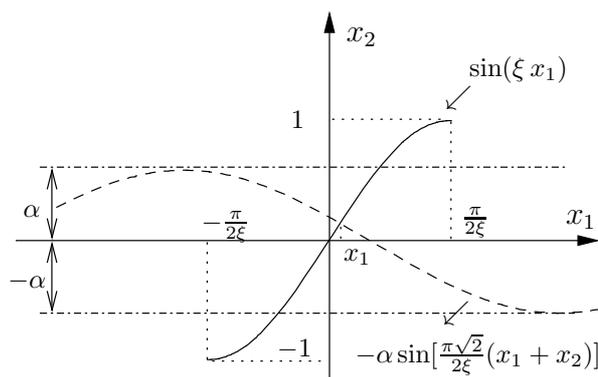
$$\sin(\xi x_1) = -\alpha \sin\left(\xi \frac{\sqrt{2}}{2} (x_1 + x_2)\right) \quad (6.14)$$

Da die Abbildung

$$x_1 \rightarrow \sin(\xi x_1) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

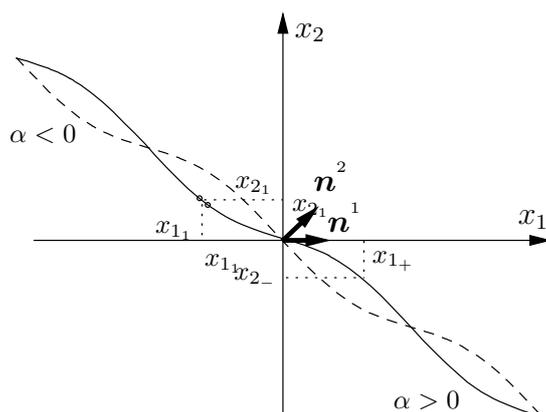
bijektiv ist, so gibt es ein eindeutig bestimmtes  $x_1$  sodass die Gl. (6.14) für ein vorgegebenes  $x_2$  erfüllt ist. Diese Tatsache sieht man auf folgende Weise:

Für ein beliebiges  $x_2$  bleibt der Wert vom Term  $-\alpha \sin\left(\xi \frac{\sqrt{2}}{2} (x_1 + x_2)\right)$  im Intervall  $[-\alpha, \alpha]$ . Da der Wert des Terms  $\sin(\xi x_1)$  monoton und stetig von  $-1$  bis  $1$  anwächst, falls die Variable  $x_1$  vom Punkt  $-\frac{\pi}{2\xi}$  zum  $\frac{\pi}{2\xi}$  sich verändert, muss die Kurve für die Funktion  $\sin(\xi x_1)$  für ein  $x_1$  die Kurve  $-\alpha \sin\left(\xi \frac{\sqrt{2}}{2} (x_1 + x_2)\right)$  (bei festen  $x_2$ ) schneiden - s. Abb. 6.3.



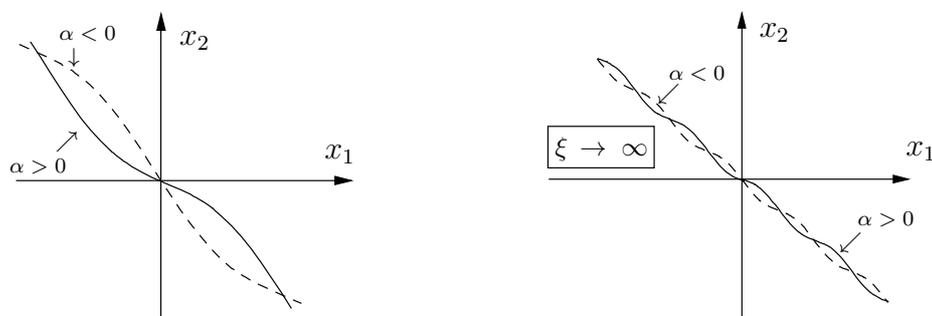
**Abb. 6.3:** Zusammenstellung der Funktionen  $\sin(\xi x_1)$  und  $-\alpha \sin\left[\xi \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + x_2)\right]$  ( $x_2$  fest)

Der kleinste  $x_1$  Wert, für den sich die Kurven in Abb. 6.3 schneiden, wird als Lösung gewählt. Für wachsende  $x_2$  Werte wird immer der  $x_1$  Wert gewählt, der die Kurve *stetig* fortsetzt. Eine solche stetige Fortsetzung ist möglich, da  $\sin \xi x_1$  im Bereich  $[-\frac{\pi}{2\xi}, \frac{\pi}{2\xi}]$  eine eindeutige Abbildung der Funktion von  $[-\frac{\pi}{2\xi}, \frac{\pi}{2\xi}]$  nach  $[-1, 1]$  ist. Die Kurve, die sich als Lösung hier von Gl. (6.14) ergibt, ist in Abb. 6.4 dargestellt.



**Abb. 6.4:** Rissränder falls  $|\alpha| < 1$

Die Variation von  $\xi$  in Abb. 6.5 führt zu Streckung bzw. Stauchung der Lösungskurve, wobei die Graphen für  $\xi \rightarrow \infty$  die Winkelhalbierende annähern.



**Abb. 6.5:** Rissränder falls  $\xi \rightarrow \infty$

D.h. die Lösungskurven in Gl. (6.14) streben im Grenzfall ( $\xi \rightarrow \infty$ ) gegen die Winkelhalbierende.

**Ergebnis für Gl. (6.14):** Die stetige Kurve, die Gl. (6.14) löst und durch den Anfangspunkt  $(x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$  verläuft, strebt für  $\xi \rightarrow \infty$  gegen die Winkelhalbierende.

Die Winkelhalbierende wird physikalisch von uns daher als Richtung postuliert, in der ein lokaler Riss, der im Anfangspunkt  $(0, 0)$  verläuft.

**Ergebnis:** Hat das quartische Polynom zwei verschiedene reelle Nullstellen beim Übergang ins Reelle, so ergeben sich für die Entstehung der Rissbildung folgende Möglichkeiten:

1. Der Riss kann senkrecht zu einer der Richtungen  $\mathbf{n}^1$  und  $\mathbf{n}^2$  verlaufen. Diese Richtungen sind stabil, d.h. eine kleine Parameteränderung von  $\alpha$  ( $\alpha \neq 1$ ) führt zu keinen Änderungen der Rissrichtung.
2. Der Riss kann entlang einer der beiden Winkelhalbierenden von  $\mathbf{n}^1$  und  $\mathbf{n}^2$  verlaufen; diese Verlaufsrichtungen sind instabil, da eine geringe Abweichung des Parameters  $\alpha$  vom ausgezeichneten Wert ( $\alpha = \pm 1$ ) zur Folge hat, dass ein Übergang zu einer der stabilen Rissrichtungen ( $\alpha \neq \pm 1$ ) erfolgt.

## 6.2 Rissbildung als PITCHFORK-Bifurkation

### 6.2.1 Bifurkationstheorie

Die Bifurkationstheorie untersucht das Verhalten von Systemen bezüglich ihrer Abhängigkeit von Parametern. Dabei interessieren besonders die Übergänge des Systems in denen dieses seine grundsätzlichen Verhaltensweisen verliert oder abändert. Solche (Übergangs)-Punkte werden nach René Thom [55] Katastrophen-Punkte genannt. Beispiele hierzu sind:

#### 1. Knicken eines längsbeanspruchten Biegestabs unter der Last $P$

Längsbeanspruchte Biegestäbe können ihre Stabilität verlieren und quer zur Beanspruchungsrichtung ausweichen. Das Phänomen des Ausknickens ist sichtbar oberhalb einer bestimmten kritischen Last  $P_{kr.}$  ( $P > P_{kr.}$ ), wobei es mehr als eine Gleichgewichtslage gibt. Der Stabilitätsverlust ist also mit einer Verzweigung des Gleichgewichtszustandes verbunden [27].

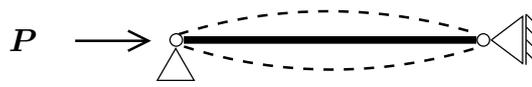


Abb. 6.6: Mögliche Gleichgewichtslagen

#### 2. Bogenbrücke unter der Belastung $G$

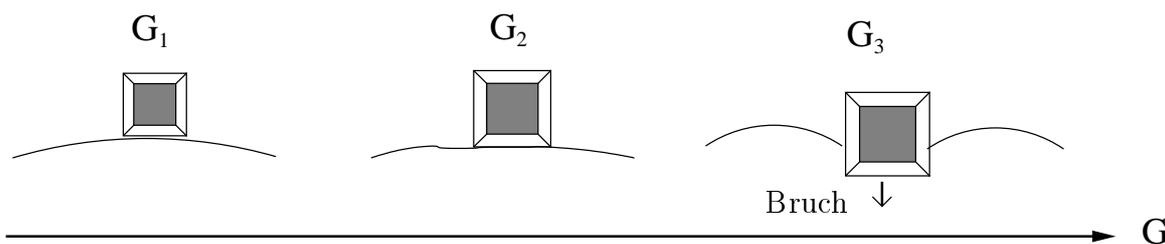
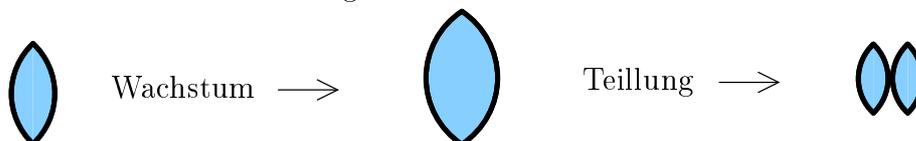


Abb. 6.7: Brückenformen bei wachsender Belastung  $G$  bis zum Durchschlagen

An den Punkten der Grenzbelastung, den Versagenspunkten, ändert die Brücke ihre topologische Gestalt.

### 3. Die Zellteilung in der Mikrobiologie

Die Zellteilung ist der biologische Vorgang der Teilung einer Zelle, wobei die Mutterzelle auf die Tochterzellen aufgeteilt wird - s. Abb. 6.8.



**Abb. 6.8:** Wachstum und Teilung einer Zelle

In der Mikrobiologie wird durch das Wachstum einer Zelle der Zellinhalt zunächst vergrößert bis im Moment der Teilung, eine unstetige Bifurkation erfolgt.

### 4. Der Zusammenbruch eines Marktes

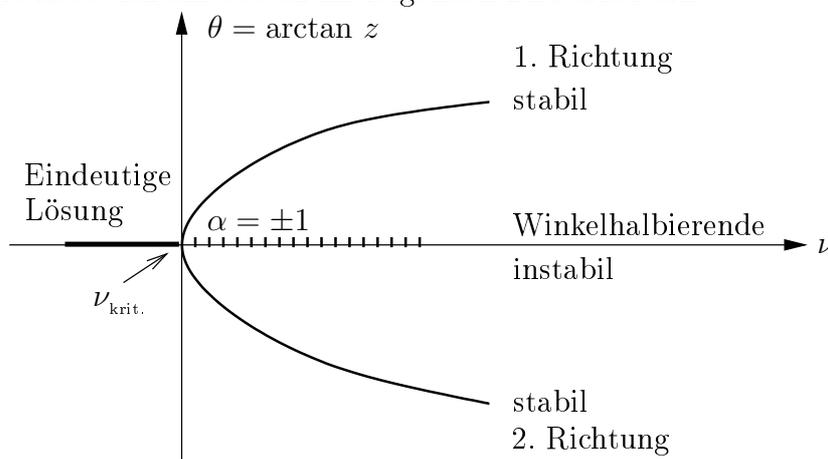
Angebot und Nachfrage sind nicht mehr im Gleichgewicht, das Marktgeschehen erfährt eine totale Änderung.

In der Katastrophentheorie wird versucht, diese charakteristischen Übergangsphänomene zu klassifizieren. Ein der wichtigsten und ältesten Übergangsphänomene ist die PITCHFORKSche Bifurkation.

#### 6.2.2 Rissbildungsphänomene als Beispiel einer PITCHFORK-Bifurkation

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Einordnung des Phänomens der Rissbildung in den allgemeinen Rahmen der Bifurkationstheorie. Bei Überlagerung verschiedener Bruchrichtungen würde man zunächst eine beliebige Zwischenrichtung für die möglichen Bruchrichtungen erwarten. Dies ist hier bis auf eine einzige Ausnahme nicht der Fall. Die Winkelhalbierende für  $\alpha = \pm 1$  ist die einzige Zwischenrichtung, die eine instabile zusätzliche Bruchrichtung als Überlagerung anderer Bruchrichtungen darstellt. Diese Betrachtungen lassen sich als PITCHFORKSches Bifurkationsphänomen beschreiben und als Folge der Aufspaltung der Bruchrichtungen. Die PITCHFORKSche Bifurkation ist eines der bestuntersuchten Phänomene der Chaostheorie. Die Anwendung auf die hier untersuchten Fälle lässt sich am besten im folgenden Bild erläutern.

Eine oder zwei reelle Nullstellen können beim Übergang der Nullstellen des quartischen Polynoms ins Reelle für einen Materialparameter  $\nu$  entstehen. Die Größe  $\nu_{\text{krit.}}$  bezeichnet den Wert von  $\nu$ , bei dem der Übergang erfolgt - s. Abb. 6.9.



**Abb. 6.9:** PITCHFORKSche Bifurkation

Für  $\nu < \nu_{\text{krit.}}$  ergibt sich dann nur eine zur Körpergeometrie symmetrische Bruchrichtung. Wird  $\nu$  jedoch größer als  $\nu_{\text{krit.}}$ , dann entstehen zwei Bruchrichtungen, die jede für sich allein die Symmetrien der Ausgangskonfiguration bricht. Durch Überlagerung dieser neuen Bruchrichtungen ergibt sich wieder eine symmetrische, jedoch instabile Bruchrichtung. Nach Überschreiten des kritischen Werts  $\nu_{\text{krit.}}$  überlagern sich die Bruchrichtungen  $\theta_1$  und  $\theta_2$  mit  $\alpha = \pm 1$  auf eine instabile Bruchrichtung nämlich entlang den Winkelhalbierenden. Diese Instabilität führt durch kleine Störungen zu den stabilen Bruchrichtungen mit  $\alpha \neq \pm 1$  herbei. In den untersuchten Rissbildungsphänomenen tritt dieser Fall tatsächlich für praktisch relevante Parameter auf: im folgenden Bild - Abb. 6.10 - sind die Ergebnisse zusammengefasst.

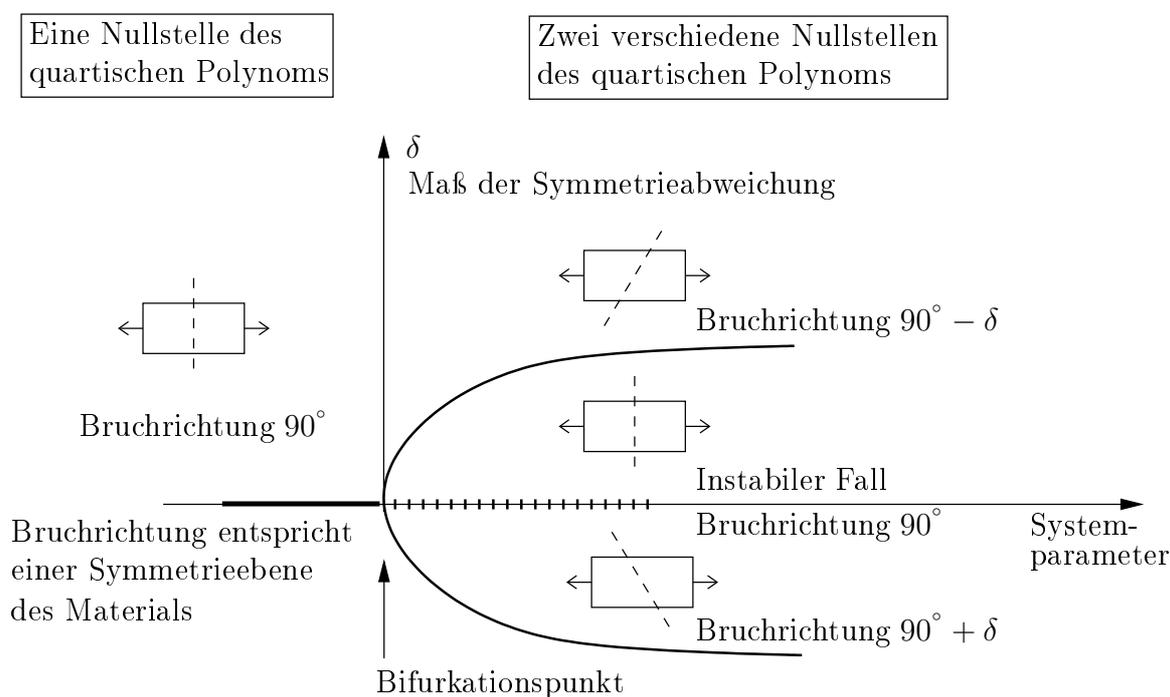


Abb. 6.10: Zusammenstellung der Ergebnisse

### 6.2.3 Symmetriebrechung

Häufig führen Bifurkationsphänomene zur Verletzung einer Invarianz (Symmetriebrechung). Unter einem Symmetriebruch wird in der Physik die Verletzung eines symmetrischen Zustand und speziell der Übergang von einer Phase oder einer Konfiguration höherer Symmetrie in eine Phase oder eine Lage geringerer Symmetrie verstanden. Dieses Phänomen soll im Folgenden präzisiert werden.

**Definition:** Es sei ein Phänomen gegeben, das mittels Gleichungen und Randbedingungen beschrieben ist, die gegenüber einer Transformation  $\mathcal{D}$  invariant sind. Ist das Phänomen selbst gegenüber  $\mathcal{D}$  nicht invariant, so spricht man von einer Symmetriebrechung.

Betrachtet man ein Differentialgleichungssystem  $\Omega$ , dargestellt durch die Relation

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}) \quad (6.15)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$$

und einer Transformation

$$\mathcal{D}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}' \quad (6.16)$$

sodass gilt

$$\dot{\mathbf{X}}' = \mathcal{D}(\dot{\mathbf{X}}) = f(\mathcal{D}(\mathbf{X})) = f(\mathbf{X}') \quad (6.17)$$

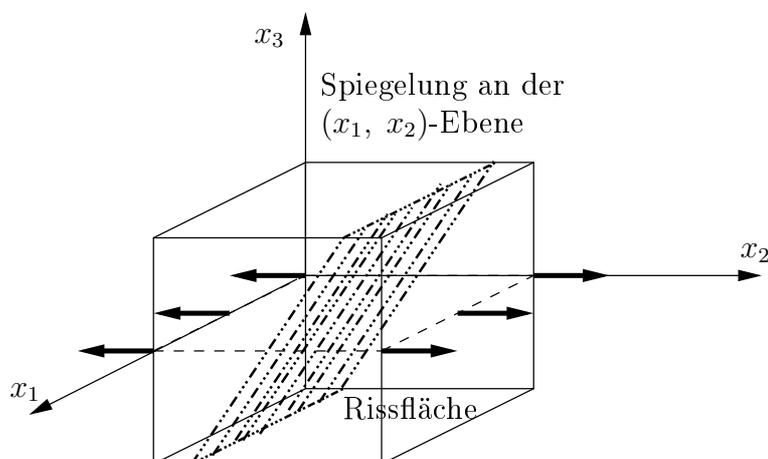
mit

$$\mathbf{X}'(0) = \mathcal{D}(\mathbf{X}_0) .$$

$\mathcal{D}$  stellt dabei eine Symmetrie der Systemgleichungen dar. Diese Symmetrie ist dann gebrochen, wenn eine Lösung  $\mathbf{X}(t)$  der Gl. (6.15) existiert, für die die Symmetrie nicht gilt, d.h.

$$\mathbf{X}'(t) = \mathcal{D}(\mathbf{X}(t)) \neq \mathbf{X}(t).$$

Das Beispiel in Abb. 6.11 stellt  $\mathcal{D}$  als eine Spiegelung an der  $(x_1, x_2)$ -Ebene dar.



**Abb. 6.11:** Belastetes Bauteil

Falls eine Symmetriebrechung auftritt, wie wir sie im vorliegenden Fall für die Bruchmechanik nachgewiesen haben, so ist die Auswahl der tatsächlich real auftretenden Lösung, d.h. in unserem Fall, der tatsächlich auftretenden Bruchrichtung, aus den Grundgleichungen der Mechanik nicht herleitbar. Aus den Grundgleichungen kann keine Prognose darüber abgeleitet werden, welcher Zweig der PITCHFORK-Bifurkation der Realität entspricht. Wie die vorliegenden Untersuchungen zeigen, ist daher Indeterminismus kein Phänomen, das auf die Quantenmechanik beschränkt wäre. Auch in der klassischen Mechanik tritt Indeterminismus auf, wie es z.B. durch die Sturm-Liouville Differentialgleichung des Knickstabs gegeben ist und das als elastische Strukturinstabilität bekannt ist.

# Kapitel 7

## Anwendungsfälle

Die aufgestellte Lokalisierungsbedingung in Gl. (5.24) - dargestellt durch ein quartisches Polynom  $P(z, \epsilon)$  - wird im Folgenden für einige Sonderfälle analytisch gelöst. Die Anwendungsfälle bestehen aus einfachen Teststrukturen, die unter reiner Zug- oder Schubbeanspruchung oder Kombinationen daraus betrachtet werden. Nach der Ermittlung des quartischen Polynoms und dessen Nullstellen werden die bestehenden Ergebnisse erörtert und interpretiert. Die Auswertung des quartischen Polynoms wird unter folgenden *Bedingungen* vorgenommen:

- Ebener Spannungszustand mit infinitesimalen Verzerrungen
- Ratenabhängige Materialmodellierung mit  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{L}(\epsilon) \dot{\epsilon}$ .
- Die Testbeispiele werden unter nachfolgenden *Beanspruchungen* betrachtet:
  1. Einaxialer Zug mit zwei unterschiedlichen Randbedingungen
  2. Einfacher und homogener Schub
  3. Biaxialer Zug.

Zunächst erfolgt die Ermittlung der Komponenten des instantanen Materialsteifigkeitstensors  $\mathbf{L}(\epsilon)$ , die dann in das quartische Polynom  $P(z, \epsilon)$  Gl. (5.24) eingesetzt werden. Das quartische Polynom  $P(z, \epsilon)$  hängt zum einen von der Rissnormalen mit dem Winkel  $\theta = \arctan z$  und zum anderen vom Verzerrungszustand  $\epsilon$  ab. Die Nullstellen bestimmen nicht nur die Bruchdehnungen bzw. die Bruchbedingungen sondern auch die Richtung des Rissverlaufs. Die Bruchbedingung liefert eine Bruchortsfläche im Dehnungsraum.

Wir diskutieren die Bruchbedingung, die das Polynom  $P(z, \epsilon)$  anzeigt, indem die Wanderung der Nullstellen in Abhängigkeit der Änderung des Dehnungszustandes betrachtet wird.

Die Zahlenwerte in Tab. 7.1 gelten für isotropes Materialverhalten bis zum Beginn der Schädigung; nach Eintritt der Schädigung ist das Materialverhalten anisotrop. Die Auswertung der Bruchbedingungen wird mit diesen Werten durchgeführt.

$E_1 = E_2$	$G_{12}$	$m_1$	$m_2$	$m_{12}$	$\varepsilon_{11f}$	$\varepsilon_{22f}$	$\varepsilon_{12vf}$	$\varepsilon_{11b}$	$\varepsilon_{22b}$	$\varepsilon_{12vb}$
[MPa]	[MPa]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]
2000	$\frac{E_1}{2(1+\nu_{12})}$	$\frac{1}{0.013}$	$\frac{1}{0.013}$	$\frac{1}{0.0518}$	0.02	0.02	0.0548	0.007	0.007	0.003

**Tab. 7.1** Materialparameter aus [35], Seite 129

Da bei den nachfolgenden Beispielen immer der Spezialfall  $L_{1211} = -L_{1222} = 0$  vorliegt, wird dieser Fall zunächst allgemein betrachtet.

### Das Rissbildungskriterium im Fall $L_{1211} = -L_{1222} = 0$

Da  $L_{1211} = -L_{1222} = 0$  gilt, reduziert sich das quartische Polynom in Gl. (5.24) auf

$$\begin{aligned}
 P_1(z) &:= z^4 L_{1212} L_{2222} - z^2 [L_{1212} (L_{2211} + L_{1122}) - L_{1111} L_{2222} + L_{1122} L_{2211}] \\
 &\quad + L_{1212} L_{1111} .
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Durch die Substitution  $y := z^2$  lässt sich dann  $P_1(z)$  in ein quadratisches Polynom  $R(y)$  überführen, so dass jetzt die Gleichung

$$\begin{aligned}
 R(y) &:= y^2 L_{1212} L_{2222} - y [L_{1212} (L_{2211} + L_{1122}) - L_{1111} L_{2222} + L_{1122} L_{2211}] \\
 &\quad + L_{1212} L_{1111} \stackrel{!}{=} 0
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

zu lösen ist. Die Nullstellen des Polynoms  $R(y)$  in Gl. (7.2) können nun einfach bestimmt werden. Mit

$$\Delta = [L_{1212} (L_{2211} + L_{1122}) - L_{1111} L_{2222} + L_{1122} L_{2211}]^2 - 4L_{1212}^2 L_{2222} L_{1111} \tag{7.3}$$

erhält man die Nullstellen:

$$y_{1,2} = \frac{L_{1212} (L_{2211} + L_{1122}) - L_{1111} L_{2222} + L_{1122} L_{2211} \pm \sqrt{\Delta}}{2L_{1212} L_{2222}} . \tag{7.4}$$

Reelle Nullstellen von  $P_1(z)$  existieren offenbar nur, wenn mindestens eine Nullstelle von  $R(y)$  größer gleich Null ist. Dazu ist es notwendig, dass die Diskriminante  $\Delta$  positiv oder zumindest Null ist. Im Sonderfall  $L_{1212}L_{2222} = 0$  gibt es als Lösung  $y = \pm\infty$ , im Sonderfall  $L_{1212}L_{1111} = 0$  eine Lösung  $y = 0$ .

Die Dehnung, die zur ersten reellen Nullstelle des Polynoms  $P_1(z)$  führt, wird als Bruchdehnung oder kritische Dehnung (Verzerrung) ( $\epsilon_{\text{krit}}^{\text{RK}}$ ) definiert und ist für den Rissbeginn verantwortlich. (Der Index "RK" steht für "Rissbildungskriterium".) Aus obigen Überlegungen ergibt sich folgendes Kriterium zur Ermittlung der Bruchdehnung:

Ein kritischer Verzerrungszustand  $\epsilon_{\text{krit}}^{\text{RK}} = (\epsilon_{11\text{krit}}^{\text{RK}}, \epsilon_{22\text{krit}}^{\text{RK}}, \epsilon_{12\text{krit}}^{\text{RK}})^T$  tritt ein, wenn entweder (i) oder (ii) in Gl. (7.5) gilt:

$$(i) \quad \Delta(\epsilon_{\text{krit}}^{\text{RK}}) = 0 \quad \wedge \quad y_1 \geq 0 \tag{7.5}$$

$$(ii) \quad L_{1212}(\epsilon_{\text{krit}}^{\text{RK}})L_{2222}(\epsilon_{\text{krit}}^{\text{RK}}) = 0 \quad \wedge \quad y_1 = +\infty$$

Im Fall  $\Delta(\epsilon_{\text{krit}}^{\text{RK}}) = 0$ ,  $y_1 = 0$  und  $\Delta(\epsilon) < 0$  für  $0 < \|\epsilon - \epsilon_{\text{krit}}^{\text{RK}}\| < \delta$  für ein  $\delta > 0$  ist der kritische Dehnungszustand labil.

In den Beispielen werden jeweils die Bruchdehnungen  $\epsilon_{\text{krit}}^{\text{RK}}$  mit den aus dem Maximalspannungskriterium resultierenden kritischen Dehnungen  $\epsilon_{\text{krit}}^{\text{MK}}$  verglichen, ebenso die Rissrichtungen. (Der Index "MK" weist auf das "Maximalspannungskriterium" hin.)

Zur Vereinfachung der Darstellung werden noch folgende Bezeichnungen eingeführt:

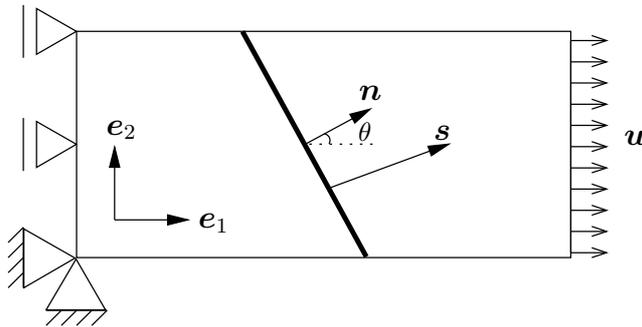
$$R(y)|_{\epsilon_{\text{krit}}^{\text{RK}}} =: R^*(y), \quad P_1(z)|_{\epsilon_{\text{krit}}^{\text{RK}}} = P_1(\tan \theta)|_{\epsilon_{\text{krit}}^{\text{RK}}} =: P_1^*(\theta) \tag{7.6}$$

Die Polynome  $R^*(y)$  und  $P_1^*(\theta)$  sind jeweils für verschiedene Querkontraktionszahlen aufgezeichnet. Die Darstellung von  $R^*$  erfolgt mit  $\nu_{12} = 0$  und  $\nu_{12} = 0.5$  und die Veranschaulichung von  $P_1^*$  mit  $\nu_{12} = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ .

## 7.1 Einaxialer Zug

Als erstes Beispiel wird der einachsige Zugversuch betrachtet. Hier werden zwei Fälle mit unterschiedlichen Randbedingungen, nämlich ohne und mit Querbehinderung, die als RB-a und RB-b gekennzeichnet sind, untersucht - s. Abb. 7.1 bzw. 7.7.

### 7.1.1 Fall 1a: Einaxialer Zug ohne Querbehinderung (RB-a)



**Abb. 7.1:** Spannungsvektor  $\mathbf{s}$ , Rissnormale  $\mathbf{n}$  und einaxiale Zugbelastung ohne Querbehinderung

Unter Vorgabe einer äußeren Belastung  $\varepsilon_{11 \max} = u_{1,1}$  ergeben sich der Spannungs- und der Verzerrungstensor zu:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11 \max} & 0 \\ 0 & -\hat{\nu}_{12} \varepsilon_{11 \max} \end{bmatrix}$$

Da

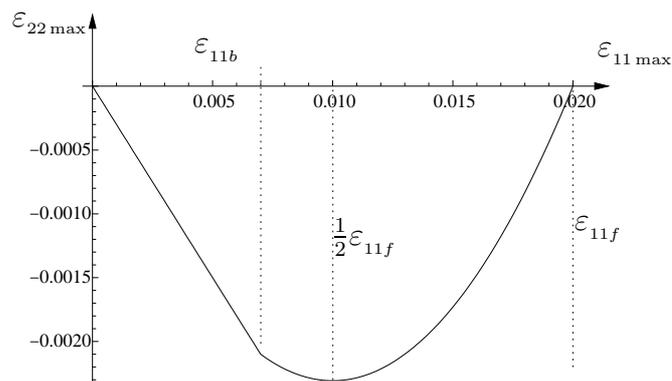
$$\varepsilon_{12 \max} = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{22 \max} = -\hat{\nu}_{12} \varepsilon_{11 \max} = \begin{cases} -\nu_{12} \varepsilon_{11 \max}, & 0 \leq \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11b}, \\ -m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) \varepsilon_{11 \max}, & \varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11f}, \end{cases}$$

liegt der kritische Verzerrungszustand im Teilgebiet  $\boldsymbol{\varepsilon}^{VI}$  - s. Abb. 5.9. Es ist dann

$$\varepsilon_{22 \max} = -m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) \varepsilon_{11 \max}, \quad \varepsilon_{12 \max} = \varepsilon_{11 \max} [1 + m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max})],$$

$$\varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11f}.$$

(Im Fall  $\nu_{12} = 0$  ist  $\varepsilon_{22 \max} = 0$ .)



**Abb. 7.2:** Belastungsverlauf für  $\nu_{12} = 0.3$

Mit

$$D_{II} = 1 - m_1 \nu_{12} \nu_{21} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}), \quad 0 < D_{II} \leq 1,$$

lassen sich die Komponenten des instantanen Materialsteifigkeitstensors  $L_{ijkl}$  gemäß Gl. (4.26) wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
L_{1111} &= \frac{m_1 E_1}{D_{II}} (\varepsilon_{11f} - 2\varepsilon_{11\max}) =: \frac{\tilde{L}_{1111}}{D_{II}}, & L_{1122} &= m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max}) L_{2222}, \\
L_{2211} &= \nu_{21} \frac{\tilde{L}_{1111}}{D_{II}}, & L_{2222} &= \frac{E_2}{D_{II}}, & L_{1211} &= -L_{1222} = 0, \\
L_{1212} &= m_{12} G_{12} \left\{ \varepsilon_{12vf} - [1 + m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max})] \varepsilon_{11\max} \right\}.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Das Polynom in Gl. (7.2) ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
R(y) &= \frac{1}{D_{II}} \left\{ y^2 L_{1212} E_2 - y \left[ L_{1212} \left( \nu_{21} \tilde{L}_{1111} + E_2 m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max}) \right) - \tilde{L}_{1111} E_2 \right] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{D_{II}} (L_{1212} \tilde{L}_{1111})
\end{aligned} \tag{7.8}$$

bzw.  $R(y) = \frac{1}{D_{II}} \tilde{R}(y)$

mit

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(y) &:= y^2 L_{1212} E_2 - y \left[ L_{1212} \left( \nu_{21} \tilde{L}_{1111} + E_2 m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max}) \right) - \tilde{L}_{1111} E_2 \right] \\
&\quad + L_{1212} \tilde{L}_{1111}.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

### Diskussion der Bruchkriterien

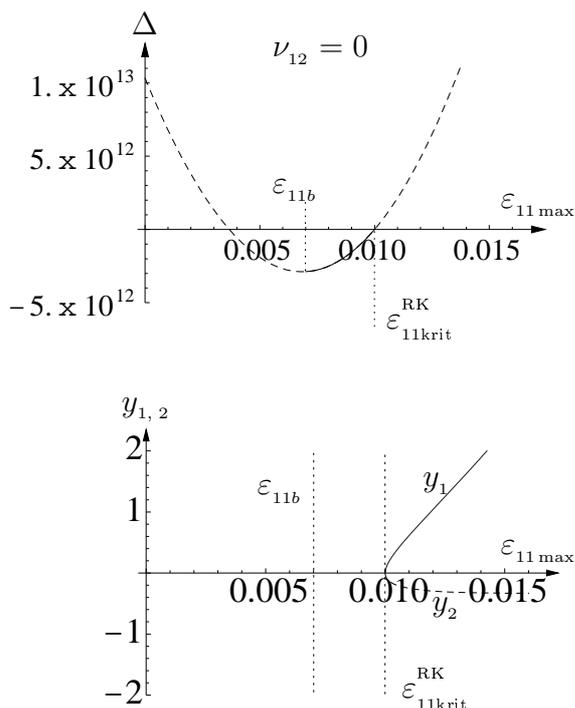
Das Maximalspannungskriterium liefert die Bedingung  $L_{1111} = 0$ , d.h., der kritische Verzerrungszustand  $(\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}}, -\hat{\nu}_{12} \varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}}, 0)$  ist im Fall  $\nu_{12} \neq 0$  der Schnittpunkt der in Abb. 7.2 skizzierten Kurve mit dem grünen Parabelast im Raum  $\boldsymbol{\epsilon}^{II}/\boldsymbol{\epsilon}^{VI}$  in Abb. 5.9 bzw. im Fall  $\nu_{12} = 0$  der Schnittpunkt der  $\varepsilon_{11\max}$ -Achse mit der Geraden  $\varepsilon_{11\max} = \frac{1}{2}\varepsilon_{11f}$ . Es stellt sich heraus, dass unabhängig von der Querkontraktionszahl  $\nu_{12}$  immer  $\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{11f}$  ist. Eingesetzt in  $\tilde{R}(y)$  liefert dies die Nullstellen:

$$y_1^{\text{MK}(1)} = \frac{1}{2} m_1 \nu_{12} \varepsilon_{11f}, \quad y_2^{\text{MK}(1)} = 0 \quad \text{für } \nu_{12} \neq 0,$$

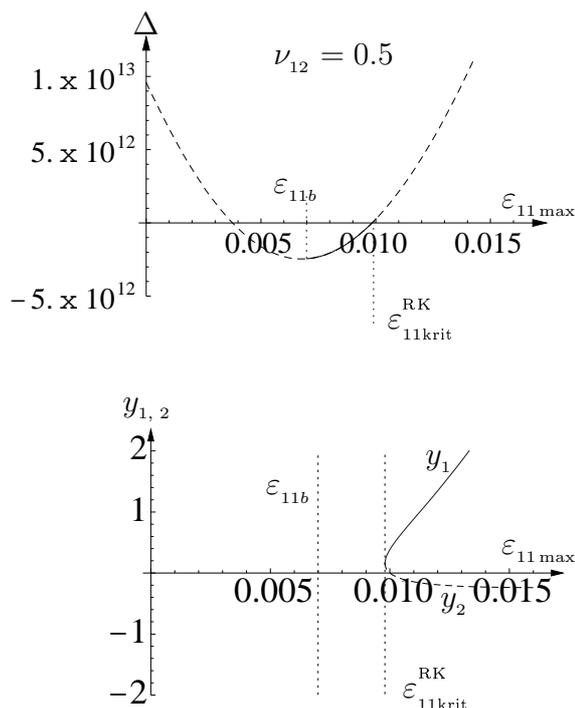
$$y_1^{\text{MK}(2)} = y_2^{\text{MK}(2)} = 0 \quad \text{für } \nu_{12} = 0.$$

Bezüglich des Rissbildungskriteriums ist wegen  $\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{11f}$  die Gleichung  $R(y) = 0$  bzw.  $\tilde{R}(y) = 0$  für  $\varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11\max} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_{11f}$  zu untersuchen.

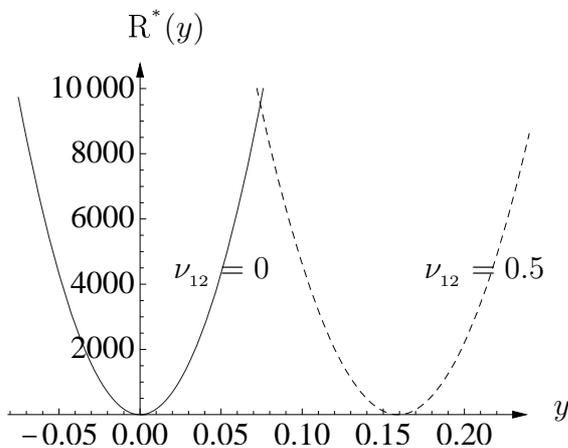
Die graphische Darstellung in Abb. 7.3 bzw. 7.4 läßt unschwer erkennen, dass die Diskriminante  $\Delta(\varepsilon_{11\max})$  oberhalb der sogenannten kritischen Dehnung  $\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{RK}}$  - nämlich  $\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{RK}} = 0.010000$  für  $\nu_{12} = 0$  bzw.  $\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{RK}} = 0.009795$  für  $\nu_{12} = 0.5$  - nicht mehr negativ wird und auch die größere Nullstelle  $y_1$  positiv bleibt. Da mit Erreichen der kritischen Dehnung die erste Nullstelle des quadratischen Polynoms in Gl. (7.2) größer gleich Null ist, können daraus die ersten reellen Nullstellen  $z = \pm\sqrt{y}$  des quartischen Polynoms  $P_1(z)$  in Gl. (7.1) zur Berechnung des Bruchwinkels  $\theta$  bestimmt werden.



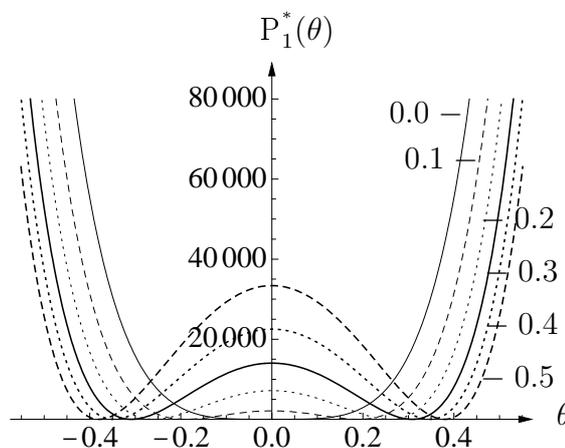
**Abb. 7.3:** Darstellung der Diskriminante  $\Delta$  und der beiden Nullstellen  $y_1$  und  $y_2$  für  $\nu_{12} = 0$  in Abhängigkeit der maximalen Dehnung  $\varepsilon_{11 \max} \geq \varepsilon_{11b}$



**Abb. 7.4:** Darstellung der Diskriminante  $\Delta$  und der beiden Nullstellen  $y_1$  und  $y_2$  für  $\nu_{12} = 0.5$  in Abhängigkeit der maximalen Dehnung  $\varepsilon_{11 \max} \geq \varepsilon_{11b}$



**Abb. 7.5:** Quadratisches Polynom  $R^*(y)$  für  $\nu_{12} = 0$  bzw.  $\nu_{12} = 0.5$



**Abb. 7.6:** Polynom  $P_1^*(\theta)$  für  $\nu_{12} = \{0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5\}$

In den Abb. 7.5 und Abb. 7.6 sind die Polynome  $R(y)$  bzw.  $P_1(z)$  für  $\varepsilon_{11 \max} = \varepsilon_{11 \text{krit}}^{\text{RK}}$  dargestellt, s. Gl. (7.6).

Man beachte, dass wegen  $\Delta = 0$  bei Bruchdehnung das Polynom  $R^*(y)$  an der Nullstelle gerade die Abszisse berührt, ebens  $P_1^*(\theta)$  bei den entsprechenden Winkeln. Hier erkennt man leicht die Existenz reeller Nullstellen beim Brucheintritt. Für  $\nu_{12} \neq 0$  gibt es zwei doppelte Nullstellen, für  $\nu_{12} = 0$  nur eine einzige vierfach Nullstelle.

$\nu_{12}$	$y_1(\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}})$	$\theta_{1,2}^{\text{RK}}$ Grad	$\theta_{0,1,2}^{\text{MK}}$ Grad	$\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}}$	$\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{MK}}$	$\mathbf{g}(\theta_1^{\text{RK}})$	$\mathbf{g}(\theta_2^{\text{RK}})$
-	-	-	-	-	-	-	-
0.5	0.15917	$\pm 21.75^\circ$	$0^\circ, \pm 31.80^\circ$	0.009795	0.010	(1, -0.24)	(1, 0.24)
0.4	0.13075	$\pm 19.88^\circ$	$0^\circ, \pm 29.02^\circ$	0.009873	0.010	(1, -0.24)	(1, 0.24)
0.3	0.10161	$\pm 17.68^\circ$	$0^\circ, \pm 25.66^\circ$	0.009928	0.010	(1, -0.23)	(1, 0.23)
0.2	0.07060	$\pm 14.88^\circ$	$0^\circ, \pm 21.42^\circ$	0.009967	0.010	(1, -0.22)	(1, 0.22)
0.1	0.03680	$\pm 10.86^\circ$	$0^\circ, \pm 15.50^\circ$	0.009991	0.010	(1, -0.18)	(1, 0.18)
0	0	$0^\circ$	$0^\circ$	0.010000	0.010	(1, 0.0)	

**Tab. 7.2** Nullstelle  $y_1(\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}})$ , Winkel  $\theta_{1,2}^{\text{RK}}$  bzw.  $\theta_{0,1,2}^{\text{MK}}$ , Bruchdehnung  $\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}}$  bzw.  $\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{MK}}$  sowie Richtung  $\mathbf{g}(\theta_1^{\text{RK}})$  bzw.  $\mathbf{g}(\theta_2^{\text{RK}})$  des Geschwindigkeitsfeldes  $\Delta \mathbf{v}$  für verschiedene  $\nu_{12}$

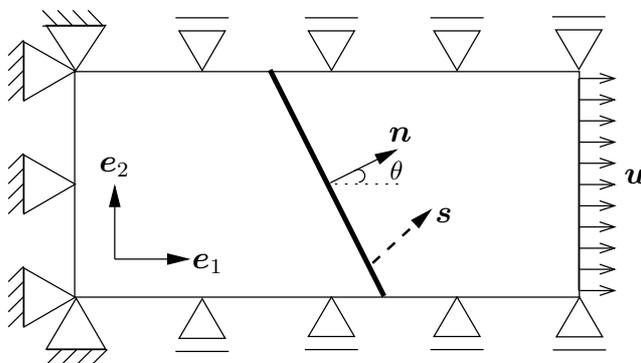
### Fazit

Aus Tab. 7.2 geht hervor, dass die kritische Dehnung ( $\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}}$ ) u.a. von der Querkontraktionszahl  $\nu_{12}$  abhängig ist. Es ist erstaunlich, daß im Fall ohne Querbehinderung die kritische Dehnung von  $\nu_{12}$  abhängig sein soll - s. Abb. 7.3 bzw. 7.4. Die Existenz von reellen Nullstellen des Polynoms  $P_1(z)$  ist als Indiz für die Bruchentstehung zu interpretieren.

Für  $\nu_{12} \neq 0$  ergeben sich für die Rissnormale zwei stabile von der Querkontraktionszahl  $\nu_{12}$  abhängige Bruchwinkel  $\theta = \pm \tilde{\theta}(\nu_{12})$ . Dieses Ergebnis entspricht der vorgestellten Beschreibung des Phänomens als PITCHFORK-Bifurkation.

Zudem ist aus der Tab. 7.2 zu erkennen, dass sich für das Maximalspannungskriterium und das Rissbildungskriterium im allgemeinen unterschiedliche kritische Dehnungen ergeben. Da  $\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}}$  kleiner als  $\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{MK}}$  ist, bedeutet dies, dass das Rissbildungskriterium früher einen Riss anzeigt. Damit erhält man unterschiedliche Bruchwinkel  $\theta^{\text{RK}}$  bzw.  $\theta^{\text{MK}}$ . Für das Maximalspannungskriterium entsteht zusätzlich  $\theta_0 = 0$  als Lösungswinkel.

### 7.1.2 Fall 1b: Einaxialer Zug mit Querbehinderung (RB-b)



**Abb. 7.7:** Spannungsvektor  $\mathbf{s}$ , Rissnormale  $\mathbf{n}$  und einaxiale Zugbeanspruchung mit Querbehinderung

Unter Vorgabe der äußeren Belastung mit  $\varepsilon_{11 \text{ max}} = u_{1,1}$  ergeben sich Spannungs- und Verzerrungstensor zu:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & \nu_{12} T_{11} \end{bmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11 \text{ max}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da

$$\varepsilon_{22 \max} = 0, \quad \varepsilon_{12 \max} = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{12v \max} = \varepsilon_{11 \max},$$

liegt der kritische Verzerrungszustand im Teilgebiet  $\mathbf{\epsilon}^{VI}$  - s. Abb. 5.9. Es ist dann

$$\varepsilon_{22 \max} = 0, \quad \varepsilon_{12v \max} = \varepsilon_{11 \max}, \quad \varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11f}.$$

Mit

$$D_{II} = 1 - m_1 \nu_{12} \nu_{21} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}), \quad 0 < D_{II} \leq 1,$$

ist nach Gl. (4.26)

$$L_{1111} = \frac{m_1 E_1}{D_{II}^2} \left( \varepsilon_{11f} - 2\varepsilon_{11 \max} - m_1 \nu_{12} \nu_{21} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max})^2 \right) =: \frac{\tilde{L}_{1111}}{D_{II}^2},$$

$$L_{1122} = m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) L_{2222}, \quad L_{2211} = \nu_{21} \frac{\tilde{L}_{1111}}{D_{II}^2}, \quad L_{2222} = \frac{E_2}{D_{II}}, \quad (7.10)$$

$$L_{1211} = -L_{1222} = 0, \quad L_{1212} = m_{12} G_{12} (\varepsilon_{12vf} - \varepsilon_{11 \max}).$$

Das Polynom in Gl. (7.2) hat damit die Gestalt

$$R(y) = \frac{1}{D_{II}^2} \tilde{R}(y) \quad (7.11)$$

mit

$$\tilde{R}(y) := y^2 L_{1212} E_2 D_{II} - y \left[ L_{1212} \left( \nu_{21} \tilde{L}_{1111} + m_1 \nu_{12} E_2 D_{II} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) \right) - E_2 \tilde{L}_{1111} \right]$$

$$+ L_{1212} \tilde{L}_{1111}. \quad (7.12)$$

### Diskussion der Bruchkriterien

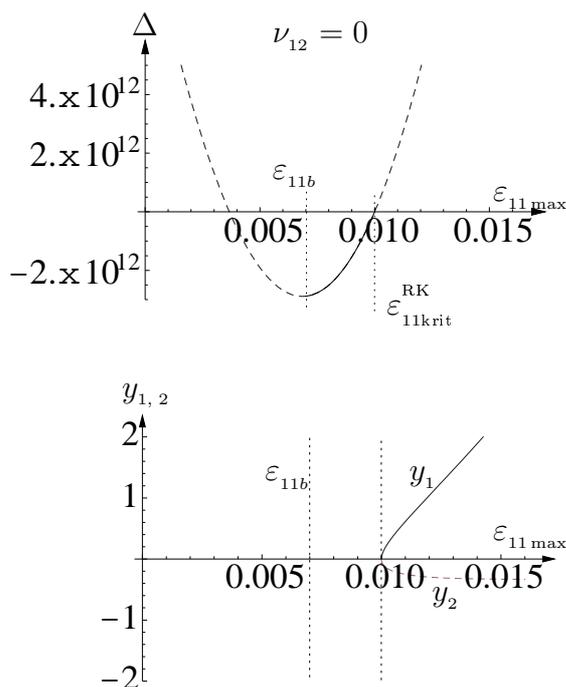
Das Maximalspannungskriterium liefert wie im vorigen Fall die Bedingung  $L_{1111} = 0$ . Damit erhält man als kritischen Verzerrungszustand  $(\varepsilon_{11 \max}^{\text{MK}}, 0, 0)$  den Schnittpunkt der  $\varepsilon_{11 \max}$ -Achse mit dem grünen Parabelast in Abb. 5.9 bzw. im Fall  $\nu_{12} = 0$  mit der Geraden  $\varepsilon_{11 \max} = \frac{1}{2} \varepsilon_{11f}$ , s. Tab. 7.3. Für die Nullstellen von  $R(y)$  ergibt sich:

$$y_1^{\text{MK}(1)} = m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}^{\text{MK}}) \quad \text{und} \quad y_2^{\text{MK}(1)} = 0 \quad \text{für} \quad \nu_{12} \neq 0,$$

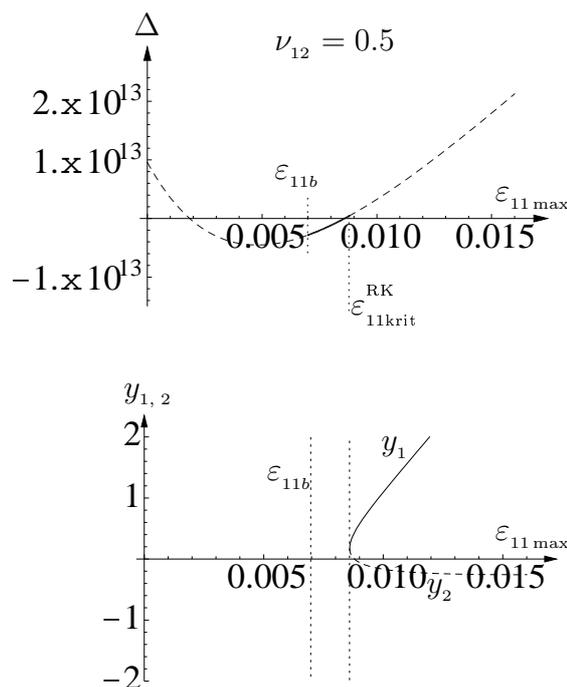
$$y_1^{\text{MK}(2)} = y_2^{\text{MK}(2)} = 0 \quad \text{für} \quad \nu_{12} = 0.$$

Das Rissbildungskriterium ist für  $\varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11 \max}^{\text{MK}}$  zu untersuchen. Dabei muss wieder die Diskriminante  $\Delta$  von  $R(y)$  diskutiert werden. Der Übergang von negativen zu positiven Werten liefert die kritische Dehnung  $\varepsilon_{11 \max}^{\text{RK}}$ , s. Abb. 7.8 / 7.9 und Tab. 7.3.

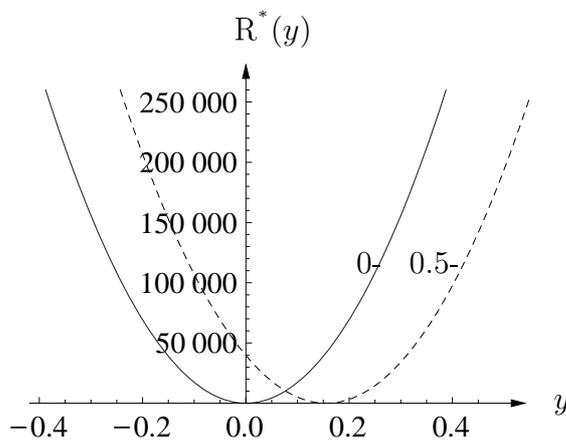
Die Polynome  $R(y)$  und  $P_1(z)$  werden im kritischen Zustand veranschaulicht, indem mit der kritische Dehnung  $\varepsilon_{11 \max}^{\text{RK}}$  die Koeffizienten von  $R^*(y)$  gemäß Gl. (7.2) ausgerechnet werden - s. in Abb. 7.10 / 7.11. Der Graph des Polynoms  $P_1^*(\theta)$  berührt die Abszisse bei Entstehung reeller Nullstellen von  $R^*(y)$ , was dem Brucheintritt entspricht. Für  $\nu_{12} = 0$  ist die Nullstelle von  $P_1^*(\theta)$  vierfach, für  $\nu_{12} \neq 0$  liegen doppelte Nullstellen vor.



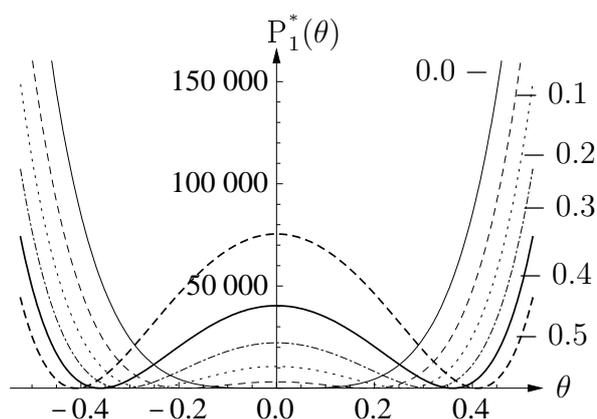
**Abb. 7.8:** Darstellung der Diskriminante  $\Delta$  und der beiden Nullstellen  $y_1$  und  $y_2$  für  $\nu_{12} = 0$  in Abhängigkeit der maximalen Dehnung  $\epsilon_{11 \max} \geq \epsilon_{11b}$



**Abb. 7.9:** Darstellung der Diskriminante  $\Delta$  und der beiden Nullstellen  $y_1$  und  $y_2$  für  $\nu_{12} = 0.5$  in Abhängigkeit der maximalen Dehnung  $\epsilon_{11 \max} \geq \epsilon_{11b}$



**Abb. 7.10:** Quadratisches Polynom  $R^*(y)$  für  $\nu_{12} = 0$  bzw.  $\nu_{12} = 0.5$



**Abb. 7.11:** Polynom  $P_1^*(\theta)$  für  $\nu_{12} = \{0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5\}$

In Tab. 7.3 sind in Abhängigkeit der Querdehnzahl  $\nu_{12}$  die Ergebnisse für die kritische Dehnung und den Bruchwinkel zusammengestellt.

$\nu_{12}$	$y_1(\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}})$	$\theta_{1,2}^{\text{RK}}$ Grad	$\theta_{0,1,2}^{\text{MK}}$ Grad	$\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}}$	$\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{MK}}$	$\mathbf{g}(\theta_1^{\text{RK}})$	$\mathbf{g}(\theta_2^{\text{RK}})$
0.5	0.1753	$\pm 22.72^\circ$	$0^\circ, \pm 33.29^\circ$	0.008593	0.00879	(1, -0.25)	(1, 0.25)
0.4	0.1396	$\pm 20.49^\circ$	$0^\circ, \pm 29.86^\circ$	0.009168	0.00929	(1, -0.25)	(1, 0.25)
0.3	0.1056	$\pm 18.00^\circ$	$0^\circ, \pm 26.06^\circ$	0.009555	0.00963	(1, -0.24)	(1, 0.24)
0.2	0.0717	$\pm 14.99^\circ$	$0^\circ, \pm 21.57^\circ$	0.009808	0.00984	(1, -0.22)	(1, 0.22)
0.1	0.0369	$\pm 10.88^\circ$	$0^\circ, \pm 15.33^\circ$	0.009952	0.00996	(1, -0.18)	(1, 0.18)
0.0	0	$0^\circ$	$0^\circ$	0.010000	0.01000	(1, 0.0)	

**Tab. 7.3** Nullstelle  $y_1(\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}})$ , Winkel  $\theta_{1,2}^{\text{RK}}$  bzw.  $\theta_{0,1,2}^{\text{MK}}$ , Bruchdehnung  $\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}}$  bzw.  $\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{MK}}$  sowie Richtung  $\mathbf{g}(\theta_1^{\text{RK}})$  bzw.  $\mathbf{g}(\theta_2^{\text{RK}})$  des Geschwindigkeitsfeldes  $\Delta \mathbf{v}$  für verschiedene  $\nu_{12}$

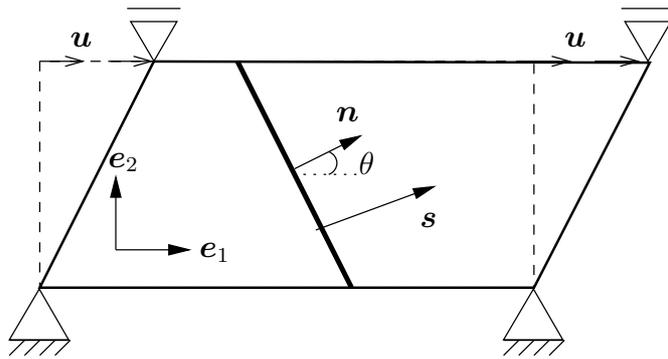
### Fazit

Aus der Tabelle 7.3 lassen sich analoge Schlüsse ziehen wie im vorhergehenden Fall.

## 7.2 Schub

Wir betrachten die einfache und die homogene Schubbeanspruchung, die aus Abb. 7.12 bzw. Abb. 7.17 zu entnehmen sind.

### 7.2.1 Fall 2a: Einfacher Schub



**Abb. 7.12:** Spannungsvektor  $\mathbf{s}$ , Rissnormale  $\mathbf{n}$  und einfache Schubbeanspruchung

Für den Spannungs- und den Verzerrungstensor gilt bei einfacher Schubbeanspruchung im  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ -Koordinatensystem:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & T_{12} \\ T_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12 \text{ max}} \\ \varepsilon_{12 \text{ max}} & 0 \end{bmatrix}$$

Da

$$\varepsilon_{11 \text{ max}} = \varepsilon_{22 \text{ max}} = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{12 \nu \text{ max}} = \varepsilon_{12 \text{ max}} ,$$

liegt der kritische Verzerrungszustand im Teilgebiet  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{V}}$  - s. Abb. 5.9. Es ist dann

$$\varepsilon_{11 \text{ max}} = \varepsilon_{22 \text{ max}} = 0 , \quad \varepsilon_{12 \nu \text{ max}} = \varepsilon_{12 \text{ max}} , \quad \varepsilon_{12 \nu b} \leq \varepsilon_{12 \nu \text{ max}} \leq \varepsilon_{12 \nu f} .$$

Mit

$$D_I = 1 - \nu_{12} \nu_{21} , \quad 0 < D_I \leq 1 ,$$

erhält man nach Gl. (4.25)

$$L_{1111} = \frac{E_1}{D_I}, \quad L_{1122} = \nu_{12} \frac{E_2}{D_I}, \quad L_{2211} = \nu_{21} \frac{E_1}{D_I}, \quad L_{2222} = \frac{E_2}{D_I}, \quad (7.13)$$

$$L_{1211} = -L_{1222} = 0 \quad \text{und} \quad L_{1212} = m_{12} G_{12} [\varepsilon_{12vf} - 2\varepsilon_{12\max}].$$

Das Polynom in Gl. (7.2) ergibt sich zu

$$R(y) = \frac{1}{D_I} \tilde{R}(y)$$

mit

$$\tilde{R}(y) := y^2 L_{1212} E_2 - y [L_{1212} (\nu_{21} E_1 + \nu_{12} E_2) - E_1 E_2] + L_{1212} E_1. \quad (7.14)$$

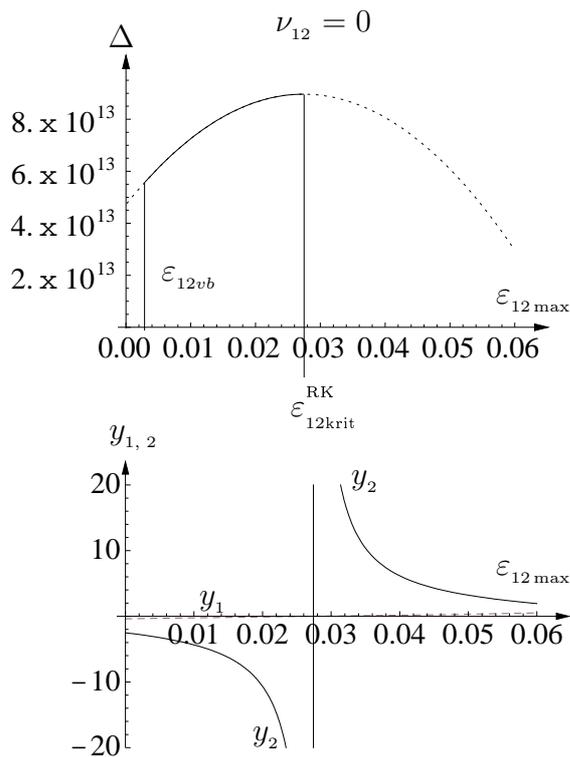
### Diskussion der Bruchkriterien

Das Maximalspannungskriterium liefert  $L_{1212} = 0$  und damit  $\varepsilon_{12\text{krit}}^{\text{MK}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{12vf}$  unabhängig von  $\nu_{12}$ . Der Grenzübergang  $\varepsilon_{12\text{max}} \downarrow \frac{1}{2}\varepsilon_{12vf}$  führt für beliebiges  $\nu_{12}$  zu den beiden Nullstellen  $y_1^{\text{MK}} = 0$ ,  $y_2^{\text{MK}} = \infty$  von  $\tilde{R}(y)$  bzw.  $R(y)$ . Es ist zu untersuchen, ob sich beim Rissbildungskriterium aus der Gleichung  $\tilde{R}(y) = 0$  für  $\varepsilon_{12vb} \leq \varepsilon_{12\text{max}} \leq \varepsilon_{12\text{krit}}^{\text{MK}}$  andere kritische Bruchdehnungen ergeben.

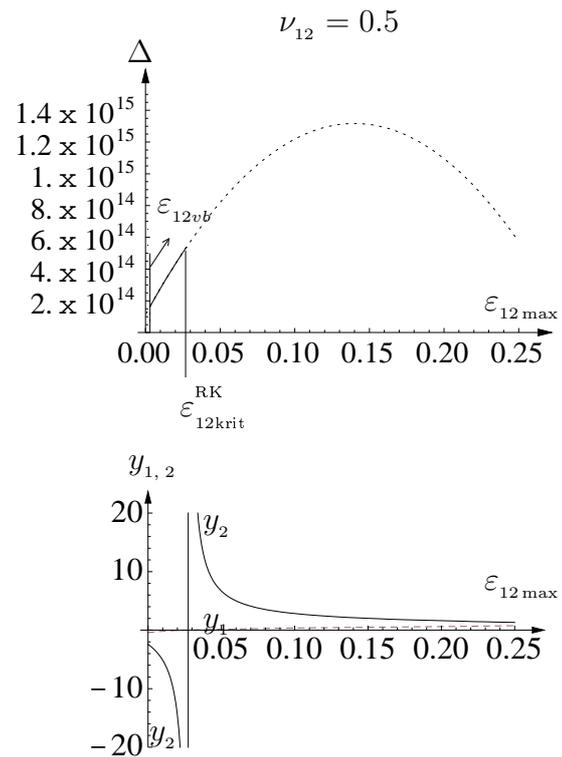
Die kritische Dehnung wird wieder mit Hilfe der Diskriminante und der Nullstellen von  $R(y)$  ermittelt. Dabei stellt sich heraus - s. Abb. 7.13 bis 7.16 -, dass sich wie beim Maximalspannungskriterium als kritische Dehnung  $\varepsilon_{12\text{krit}}^{\text{RK}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{12vf} = 0.02740$  ergibt und zwar unabhängig von  $\nu_{12}$ ; d.h., es ist auch beim Rissbildungskriterium  $L_{1212}(\varepsilon_{12\text{krit}}^{\text{RK}}) = 0$ . (Hier liegt Fall (ii) in Gl. (7.5) des Rissbildungskriteriums vor.) Entsprechend hat man die Nullstellen  $y_1^{\text{RK}} = 0$ ,  $y_2^{\text{RK}} = \infty$ . Somit sind  $\theta_{0,1,2}^{\text{RK}} = \{0, \pm\frac{\pi}{2}\}$  stabile Bruchwinkel - siehe dazu die Abb. 7.13 bis 7.16.

$y_{1,2}(\varepsilon_{12\text{krit}}^{\text{RK}})$ -	$\theta_{0,1,2}^{\text{RK}}$ Grad	$\theta_{0,1,2}^{\text{MK}}$ Grad	$\varepsilon_{12\text{krit}}^{\text{RK}}$ -	$\varepsilon_{12\text{krit}}^{\text{MK}}$ -	$\mathbf{g}(\theta_0^{\text{RK}})$ -	$\mathbf{g}(\theta_{1,2}^{\text{RK}})$ -
0/ $\infty$	0°/ $\pm 90^\circ$	0°/ $\pm 90^\circ$	0.02740	0.02740	(0, 1)	(1, 0)

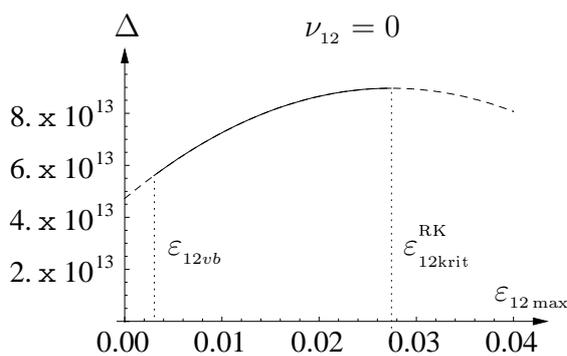
**Tab. 7.4** Nullstellen  $y_{1,2}(\varepsilon_{12\text{krit}}^{\text{RK}})$ , Winkel  $\theta_{0,1,2}^{\text{RK}}$  bzw.  $\theta_{0,1,2}^{\text{MK}}$ , Bruchdehnung  $\varepsilon_{12\text{krit}}^{\text{RK}}$  bzw.  $\varepsilon_{12\text{krit}}^{\text{MK}}$  sowie Richtung  $\mathbf{g}(\theta_0^{\text{RK}})$  bzw.  $\mathbf{g}(\theta_{1,2}^{\text{RK}})$  des Geschwindigkeitsfeldes  $\Delta\mathbf{v}$  (Werte unabhängig von  $\nu_{12}$ )



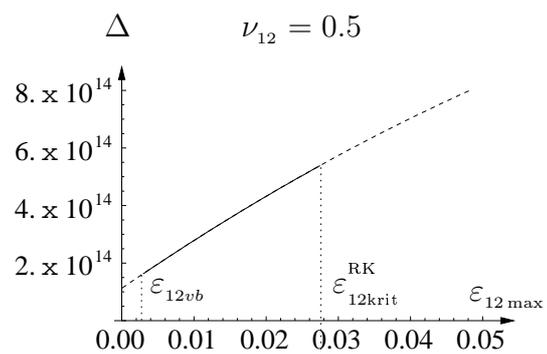
**Abb. 7.13:** Darstellung der Diskriminante  $\Delta$  und der beiden Nullstellen  $y_1$  und  $y_2$  für  $\nu_{12} = 0$  in Abhängigkeit der maximalen Dehnung  $\varepsilon_{12 \max}$



**Abb. 7.14:** Darstellung der Diskriminante  $\Delta$  und der beiden Nullstellen  $y_1$  und  $y_2$  für  $\nu_{12} = 0.5$  in Abhängigkeit der maximalen Dehnung  $\varepsilon_{12 \max}$



**Abb. 7.15:** Vergrößerter Ausschnitt des oberen Diagramms in Abb. 7.13

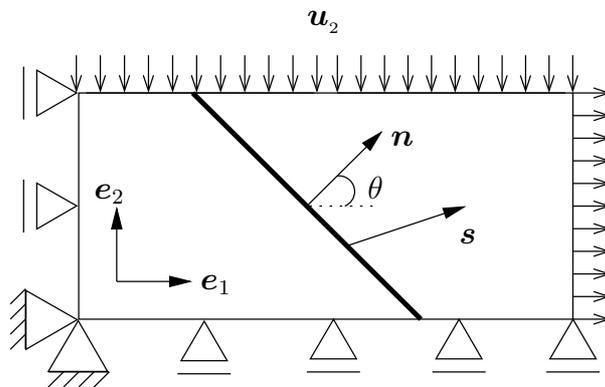


**Abb. 7.16:** Vergrößerter Ausschnitt des oberen Diagramms in Abb. 7.14

## Fazit

Wie man der Tab. 7.4 entnehmen kann, liefern das Maximalspannungskriterium und das Rissbildungskriterium die gleichen Ergebnisse.

## 7.2.2 Fall 2b: Homogener Schub



**Abb. 7.17:** Spannungsvektor  $\mathbf{s}$ , Rissnormale  $\mathbf{n}$  und homogene Schubbeanspruchung

Unter Vorgabe biaxialer Zug-/Druck-Belastungen ( $\varepsilon_{11 \max} = u_{1,1}$ ,  $\varepsilon_{22 \max} = u_{2,2}$  und  $\varepsilon_{11 \max} = -\varepsilon_{22 \max}$ ) ergeben sich der Spannungs- und der Verzerrungstensor für die homogene Schubbeanspruchung zu:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11 \max} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{11 \max} \end{bmatrix}$$

Da

$$\varepsilon_{11 \max} = -\varepsilon_{22 \max} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{12v \max} = 2\varepsilon_{11 \max} ,$$

ist der kritische Verzerrungszustand im Teilgebiet  $\boldsymbol{\varepsilon}^{VI}$  - s. Abb. 5.9. Es ist dann

$$\varepsilon_{11 \max} = -\varepsilon_{22 \max} , \quad \varepsilon_{12v \max} = 2\varepsilon_{11 \max} , \quad \varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11f} .$$

Mit

$$D_{II} = 1 - m_1 \nu_{12} \nu_{21} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) , \quad 0 < D_{II} \leq 1 ,$$

ergibt sich nach Gl. (4.26)

$$L_{1111} = \frac{m_1 E_1}{D_{II}^2} \left\{ \varepsilon_{11f} - (2 - \nu_{21}) \varepsilon_{11 \max} - m_1 \nu_{12} \nu_{21} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max})^2 \right\} = : \frac{\tilde{L}_{1111}}{D_{II}^2} ,$$

$$L_{1122} = m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) L_{2222} , \quad L_{2211} = \nu_{21} L_{1111} , \quad L_{2222} = \frac{E_2}{D_{II}} , \quad (7.15)$$

$$L_{1211} = -L_{1222} = 0 \quad \text{und} \quad L_{1212} = m_{12} G_{12} (\varepsilon_{12vf} - 2\varepsilon_{11 \max}) .$$

Das Polynom in Gl. (7.2) hat die Gestalt

$$R(y) = \frac{1}{D_{II}^2} \tilde{R}(y)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{R}(y) := & y^2 L_{1212} E_2 D_{II} - y \left[ L_{1212} \left( \nu_{21} \tilde{L}_{1111} + m_1 \nu_{12} E_2 D_{II} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) \right) - E_2 \tilde{L}_{1111} \right] \\ & + L_{1212} \tilde{L}_{1111} . \end{aligned} \quad (7.16)$$

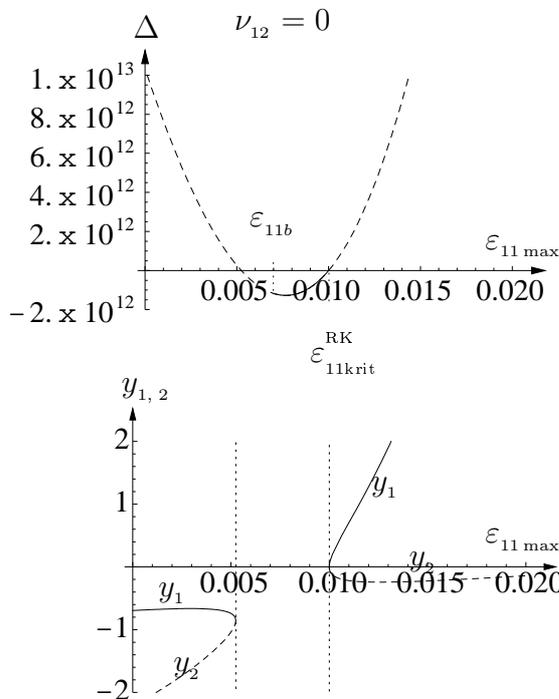
### Diskussion der Bruchkriterien

Das Maximalspannungskriterium liefert wie in den Fällen 7.1.1 und 7.1.2 die Bedingung  $L_{1111} = 0$ . Damit ergibt sich für  $\nu_{12} \neq 0$  als kritischer Verzerrungszustand  $(\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}}, -\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}}, 0)$  der Schnittpunkt der Geraden  $\varepsilon_{22\text{max}} = -\varepsilon_{11\text{max}}$  mit dem grünen Parabelast in Abb. 5.9 bzw.  $\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{11f}$  für  $\nu_{12} = 0$ . Im Spezialfall  $\nu_{12} = 0$  hat  $R(y)$  die Nullstellen  $y_1^{\text{MK}} = y_2^{\text{MK}} = 0$ ; im Fall  $\nu_{12} \neq 0$  die Nullstellen

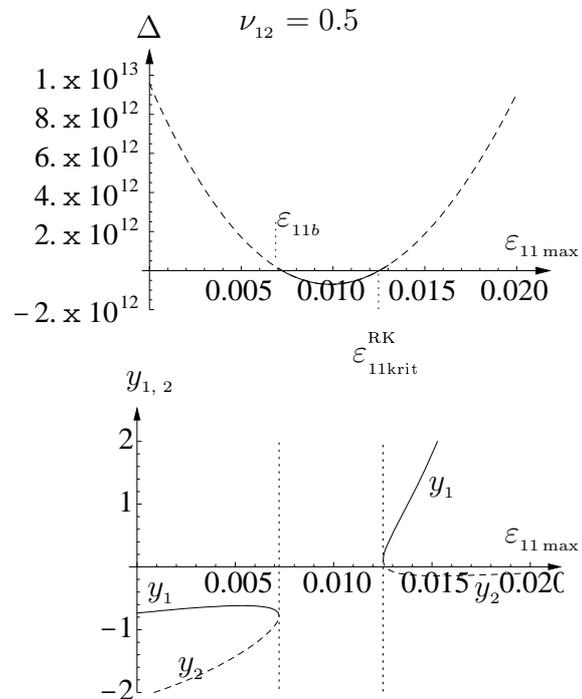
$$y_1^{\text{MK}} = m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}}) \quad \text{und} \quad y_2^{\text{MK}} = 0$$

wie im Fall 7.1.2.

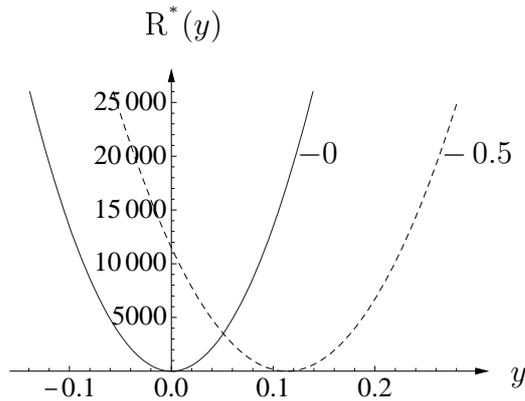
Das Rissbildungskriterium erfordert wieder die Lösung der Gleichung  $R(y) = 0$  für  $\varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11\text{max}} \leq \varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}}$ . Die kritische Dehnung  $\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{RK}}$  wird anhand der Bedingungen in Gl. (7.5) bestimmt und ergibt sich aus dem Verlauf des Graphen der Diskriminante  $\Delta$  und der Nullstellen  $y_{1,2}$  von  $R(y)$  - s. Abb. 7.18 und 7.19. Der Übergang von negativen zu positiven Werten der Diskriminante zeigt die kritische Dehnung  $\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{RK}}$  an. Für  $\nu_{12} = 0$  findet sich  $\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{RK}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{11f}$  und  $y_1 = 0$  bzw.  $\theta = 0$ ; für  $\nu_{12} \neq 0$  erhält man eine positive Nullstelle  $y_1$  und entsprechend zwei stabile, von  $\nu_{12}$  abhängige Bruchwinkel  $\theta = \pm\tilde{\theta}(\nu_{12})$ .



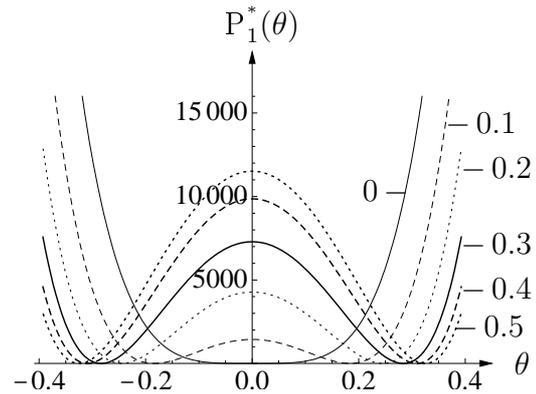
**Abb. 7.18:** Darstellung der Diskriminante  $\Delta$  und der beiden Nullstellen  $y_1$  und  $y_2$  für  $\nu_{12} = 0$  in Abhängigkeit der maximalen Dehnung  $\varepsilon_{11\text{max}}$



**Abb. 7.19:** Darstellung der Diskriminante  $\Delta$  und der beiden Nullstellen  $y_1$  und  $y_2$  für  $\nu_{12} = 0.5$  in Abhängigkeit der maximalen Dehnung  $\varepsilon_{11\text{max}}$



**Abb. 7.20:** Das quadratische Polynom  $R^*(y)$  für  $\nu_{12} = 0$  bzw.  $\nu_{12} = 0.5$



**Abb. 7.21:** Das Polynom  $P_1^*(\theta)$  für  $\nu_{12} = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$

In Abb. 7.20 ist für  $\nu_{12} = 0$  und  $\nu_{12} = 0.5$  das Polynom  $R(y)$  am kritischen Zustand dargestellt; Abb. 7.21 zeigt das Polynom  $P_1(z)$  am kritischen Zustand für unterschiedliche  $\nu_{12}$ . Da an der kritischen Stelle die Diskriminante Null ist, berühren die Polynome bei den Nullstellen die Abszisse. Die Ergebnisse sind in Tab. 7.5 zusammengestellt.

$\nu_{12}$	$y_1(\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}})$	$\theta_{1,2}^{\text{RK}}$ Grad	$\theta_{0,1,2}^{\text{MK}}$ Grad	$\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}}$	$\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{MK}}$	$\mathbf{g}(\theta_1^{\text{RK}})$	$\mathbf{g}(\theta_2^{\text{RK}})$
0.5	0.113519	$\pm 18.62^\circ$	$0^\circ, \pm 28.02^\circ$	0.01252	0.01264	(1, -0.21)	(1, 0.21)
0.4	0.101974	$\pm 17.71^\circ$	$0^\circ, \pm 26.37^\circ$	0.01192	0.01201	(1, -0.21)	(1, 0.21)
0.3	0.084957	$\pm 16.25^\circ$	$0^\circ, \pm 23.93^\circ$	0.01141	0.01147	(1, -0.21)	(1, 0.21)
0.2	0.062628	$\pm 14.05^\circ$	$0^\circ, \pm 20.44^\circ$	0.01094	0.01097	(1, -0.20)	(1, 0.20)
0.1	0.034821	$\pm 10.54^\circ$	$0^\circ, \pm 15.14^\circ$	0.01048	0.01049	(1, -0.17)	(1, 0.17)
0.0	0	$0^\circ$	$0^\circ$	0.01000	0.01000	(1, 0.0)	(1, 0.0)

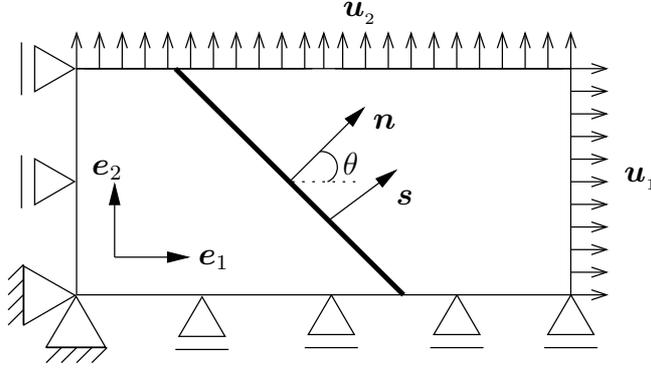
**Tab. 7.5** Nullstelle  $y_1(\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}})$ , Winkel  $\theta_{1,2}^{\text{RK}}$  bzw.  $\theta_{0,1,2}^{\text{MK}}$ , Bruchdehnung  $\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}}$  bzw.  $\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{MK}}$  sowie Richtung  $\mathbf{g}(\theta_1^{\text{RK}})$  bzw.  $\mathbf{g}(\theta_2^{\text{RK}})$  des Geschwindigkeitsfeldes  $\Delta \mathbf{v}$  für verschiedene  $\nu_{12}$

## Fazit

Tab. 7.5 zeigt für  $\nu_{12} \neq 0$  unterschiedliche kritische Dehnungen bei Maximalspannungskriterium und Rissbildungskriterium. Hier erkennt man dass unabhängig von  $\nu_{12}$  der kritische Zustand für das Rissbildungskriterium früher eintritt ( $\varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{RK}} < \varepsilon_{11 \text{ krit}}^{\text{MK}}$ ). Dies war zu erwarten.

## 7.3 Biaxialer Zug

Wir betrachten den biaxialen Zugversuch, der in Abb. 7.22 dargestellt ist.



**Abb. 7.22:** Spannungsvektor  $\mathbf{s}$ , Rissnormale  $\mathbf{n}$  und biaxiale Zugbeanspruchung

Für den Spannungs- und den Verzerrungstensor gilt:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{11} \end{bmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11 \max} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11 \max} \end{bmatrix}$$

Da

$$\varepsilon_{11 \max} = \varepsilon_{22 \max} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{12 \max} = \varepsilon_{12v \max} = 0 ,$$

liegt der kritische Verzerrungszustand im Teilgebiet  $\boldsymbol{\varepsilon}^{IV}$  - s. Abb. 5.9. Es ist dann unter Berücksichtigung von  $\varepsilon_{11b} = \varepsilon_{22b}$ ,  $\varepsilon_{11f} = \varepsilon_{22f}$

$$\varepsilon_{11 \max} = \varepsilon_{22 \max} , \quad \varepsilon_{12v \max} = \varepsilon_{12 \max} = 0 , \quad \varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11 \max} \leq \varepsilon_{11f} .$$

Mit

$$D_{IV} = 1 - m_1 m_2 \nu_{12} \nu_{21} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{11 \max}) , \quad 0 < D_{IV} \leq 1 ,$$

ergibt sich nach Gl. (4.26)

$$\begin{aligned} L_{1111} &= \frac{m_1 E_1}{D_{IV}^2} \left\{ \varepsilon_{11f} - 2\varepsilon_{11 \max} - m_2 \nu_{21} (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{11 \max}) \left[ \varepsilon_{11 \max} + m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max})^2 \right] \right\} \\ &=: \frac{\tilde{L}_{1111}}{D_{IV}^2} , \end{aligned}$$

$$L_{1122} = m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) L_{2222} , \quad L_{2211} = m_2 \nu_{21} (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{11 \max}) L_{1111} ,$$

(7.17)

$$\begin{aligned} L_{2222} &= \frac{m_2 E_2}{D_{IV}^2} \left\{ \varepsilon_{22f} - 2\varepsilon_{11 \max} - m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max}) \left[ \varepsilon_{11 \max} + m_2 \nu_{21} (\varepsilon_{22f} - \varepsilon_{11 \max})^2 \right] \right\} \\ &=: \frac{\tilde{L}_{2222}}{D_{IV}^2} , \end{aligned}$$

$$L_{1211} = -L_{1222} = 0 , \quad L_{1212} = G_{12}$$

und weiter wegen  $\nu_{12} = \nu_{21}$ ,  $\varepsilon_{11b} = \varepsilon_{22b}$ ,  $\varepsilon_{11f} = \varepsilon_{22f}$ ,  $m_1 = m_2$

$$D_{IV} = 1 - m_1^2 \nu_{12}^2 (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11 \max})^2 ,$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{1111} &= \tilde{L}_{2222} = m_1 E_1 \\ \left\{ \varepsilon_{11f} - 2\varepsilon_{11\max} - m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max}) \left[ \varepsilon_{11\max} + m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max})^2 \right] \right\}, & \quad (7.18) \\ L_{1122} = L_{2211} &= m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max}) L_{1111}. \end{aligned}$$

Das Polynom in Gl. (7.2) hat damit die Gestalt

$$R(y) = \frac{1}{D_{IV}^3} \tilde{R}(y)$$

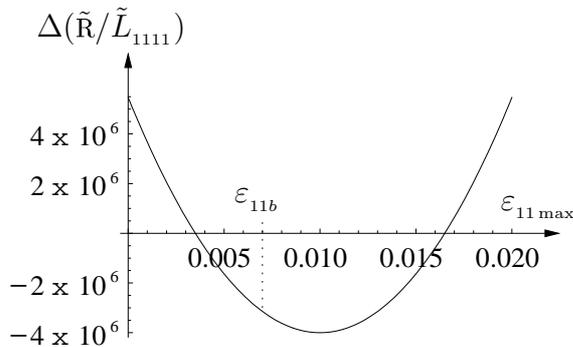
mit

$$\begin{aligned} \tilde{R}(y) := y^2 G_{12} D_{IV} \tilde{L}_{1111} - y \tilde{L}_{1111} \left[ 2G_{12} D_{IV} m_1 \nu_{12} (\varepsilon_{11f} - \varepsilon_{11\max}) - \tilde{L}_{1111} \right] \\ + G_{12} D_{IV} \tilde{L}_{1111}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

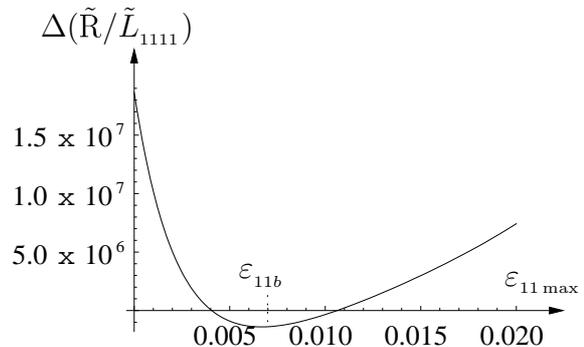
### Diskussion der Bruchkriterien

Das Maximalspannungskriterium liefert  $L_{1111} = 0$ , d.h., kritischer Verzerrungszustand  $(\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}}, \varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}}, 0)$  ist im Fall  $\nu_{12} \neq 0$  der Schnittpunkt der Geraden  $\varepsilon_{11\max} = \varepsilon_{22\max}$  mit der roten Kurve im Teilgebiet  $\mathbf{\epsilon}^{IV}$  in Abb. 5.9 bzw. im Fall  $\nu_{12} = 0$  mit der Geraden  $\varepsilon_{11\max} = \frac{1}{2}\varepsilon_{11f}$ . Da sich der Faktor  $\tilde{L}_{1111}$  in  $\tilde{R}(y)$  ausklammern lässt, ist  $R(y)|_{\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}}} = R^*(y) = 0$  für beliebiges  $y$ , d.h., der Bruchwinkel  $\theta^{\text{MK}}$  kann alle Werte annehmen.

Beim Rissbildungskriterium ist wieder die Gleichung  $\tilde{R}(y) = 0$  für  $\varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11\max} < \varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}}$  zu untersuchen. Nach obigem ist die Gleichung  $\frac{\tilde{R}(y)}{\tilde{L}_{1111}} = 0$  näher zu analysieren. Dabei stellt sich heraus, dass es für  $\varepsilon_{11b} \leq \varepsilon_{11\max} < \varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}}$  keine reellen Lösungen gibt, da die Diskriminante durchwegs negativ ist, s. Abb. 7.23 und 7.24. Damit liefert das Rissbildungskriterium die gleichen kritischen Dehnungen wie das Maximalspannungskriterium und dementsprechend beliebige Bruchwinkel  $\theta^{\text{RK}}$ .



**Abb. 7.23:** Funktionsverlauf von  $\Delta(\tilde{R}/\tilde{L}_{1111})$  für den Fall  $\nu_{12} = 0$



**Abb. 7.24:** Funktionsverlauf von  $\Delta(\tilde{R}/\tilde{L}_{1111})$  für den Fall  $\nu_{12} = 0.4$

In Tab. 7.6 sind die kritischen Dehnungen für verschiedene  $\nu_{12}$  zusammengestellt.

$\nu_{12}$	0.4	0.3	0.2	0.1	0
$\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}}$	0.00766	0.00846	0.00908	0.00958	0.01000
$\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{RK}}$	0.00766	0.00846	0.00908	0.00958	0.01000

**Tab. 7.6** Kritische Dehnung  $\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{MK}}$  bzw.  $\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{RK}}$  für  $\nu_{12} = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$

**Anmerkung:** Wie anhand der Tab. 7.6 zu erkennen ist, wandert die kritische Dehnung  $\varepsilon_{11\text{krit}}^{\text{RK/MK}}$  mit wachsendem  $\nu_{12}$  gegen die Grenze  $\varepsilon_{11b} = 0.007$ . Da die Tangentensteifigkeitsmatrix an den Grenzen von  $\mathbf{\epsilon}^{\text{IV}}$  unstetig ist, sollten die Kriterien für  $\nu_{12} > 0.4$  nicht mehr angewendet werden (s. Anmerkung auf S. 51).

### Fazit

Wie man der Tab. 7.6 entnehmen kann, liefern sowohl das Maximalspannungskriterium als auch das Rissbildungskriterium dieselbe kritische Dehnung für  $\nu_{12} \leq 0.4$ . Daraus ergeben sich die gleichen Werte für die Lösungswinkel (beliebig). Die beiden Ansätze liefern somit dasselbe Resultat.

# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung und Analyse des postkritischen Verhaltens von Faserverbundlaminate mittels Lokalisierungsanalyse. Dabei ist der Fokus sowohl auf eine detaillierte Materialbeschreibung im Versagensbereich als auch auf eine verbesserte Beschreibung des Rissbildungsphänomens gelegt worden. Bei der Ausmalung des Degradationsverhaltens von Faserverbundlaminate ist man von einem geschädigten Modell für unidirektional verstärkte, langfaserige Verbundwerkstoffe mit den elastischen Kennwerten als Schädigungsvariable ausgegangen. Hierbei handelt es sich um die Elastizitätsmoduli, die Querkontraktionszahlen und den effektiven Schubmodul, der aus der einfachen und der homogenen Schubbeanspruchung hervorgeht. Diese Materialkenngrößen stellen dann die Variablen zur Darstellung der Degradation infolge eines Schädigungsvorgangs dar. Der Degradationsverlauf wird während des Schädigungsprozesses als linear mit den maximal erreichten Dehnungen angenommen.

Ein zweiter Schwerpunkt dieser Arbeit stellt die Untersuchung einiger bekannter Brucherkenntnismethoden auf das hier entwickelte Materialmodell dar. Aus dieser Untersuchung zeigt sich, dass nur die Bifurkationsanalyse als geeignete Brucherkenntnismethode in Frage kommt. Ein wesentliches Ergebnis der Arbeit besteht darin, nachzuweisen, dass mit der Bifurkationsanalyse auch die Richtung des entstehenden Bruches festgelegt werden kann. Das erweiterte kontinuumsmechanische Modell mit den geeigneten Bruchkriterien ist daher in der Lage, die Rissbildung phänomenologisch realitätstreu abzubilden.

In Kapitel 2 werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen eingeführt. In Kapitel 3 wird auf deren Basis das hier verwendete Schädigungsmodell für unidirektional verstärkte langfaserige Verbundwerkstoffe entwickelt. Die Materialbeschreibung erfolgt in den Versagensbereich als kontinuierliche Degradation.

In Kapitel 4 leiten wir die Materialgleichung für Verbundwerkstoffe her, deren zeitliche Ableitung zur ratenabhängigen Materialgleichung führt, die zusammen mit den stofffreien Gleichungen eine Anfangsrandwertaufgabe zur Bestimmung des Materialverhaltens darstellt.

Anhand einiger Fallstudien werden grundsätzliche Überlegungen zu Schädigungskriterien durchgeführt und eine Übersicht über mögliche Brucherkenntnismethoden vorgestellt. Das mathematische Grundproblem, das beim Rissbildungsphänomen auftritt, besteht darin, die im Raumvolumen entstehende Schädigungsenergie in Relation zu den durch zweidimensionale Mannigfaltigkeiten darstellbaren Rissen zu setzen. Die Untersuchung der Brucherkenntnismethoden in Kapitel 5 hat erwiesen, dass dieses Problem nur mittels Bifurkationsanalyse in befriedigender Weise gelöst werden kann.

In Kapitel 6 wird die Rissbildung anhand der Bifurkationsanalyse berechnet. Das Brucherkennungskriterium, das mittels der Bifurkationsanalyse gewonnen wird, ergibt sich als ein quartisches Polynom, bei dem die reellen Nullstellen die Rissränder beschreiben. Die Anzahl dieser Nullstellen kann als die Anzahl der Möglichkeiten zur Rissentstehung interpretiert werden. Die Berechnung des Rissrands erfolgt zunächst im Fall der Eindeutigkeit. Im Fall einer Mehrdeutigkeit ist das Rissbildungsphänomen auch durch den um das Brucherkennungskriterium erweiterten Modellansatz nicht eindeutig determiniert. Die Analyse lässt schlussfolgern, dass die Rissbildung als PITCHFORK-Bifurkation interpretiert werden kann. In dieser Arbeit werden mehrere Anwendungsfälle (Kapitel 7) für das Maximalspannungskriterium und das Rissbildungskriterium vollständig durchgerechnet. Die Ergebnisse haben die Erkenntnis bestätigt, dass ein Riss beim Rissbildungskriterium früher eintritt.

Zur Überprüfung des Rissbildungskriteriums sollten Versuche an anisotropen Materialien durchgeführt werden. Zur Implementierung in kommerzielle FE-Programme muss eine numerische Handhabung des Rissbildungskriteriums für den allgemeinen Belastungsfall entwickelt werden.

# Anhang A

## Erläuterung und Argumentation zur Rissnormalen

### Fall 1: Lösung mit orthogonal zu einander stehenden Normalen

O.B.d.A. wird hier von folgenden senkrecht zueinander stehenden Einheitsvektoren ausgegangen:

$$\mathbf{n}^1 = [1 \ 0]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{n}^2 = [0 \ 1]^T$$

Aus Gl. (6.12) folgt nun die Kurve für den Verlauf des Rissrandes:

$$x_2 = \frac{1}{\xi} \arcsin\left(-\frac{1}{\alpha} \sin(\xi x_1)\right) \quad \text{für } |\alpha| > 1$$

bzw.

$$x_1 = \frac{1}{\xi} \arcsin(-\alpha \sin(\xi x_2)) \quad \text{für } |\alpha| < 1$$

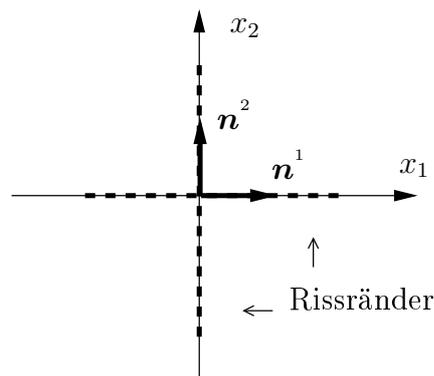


Abb. 1.1: Ursprüngliche Rissränder

Abb. 1.2 stellt die Rissränder aus der Überlagerung von  $\Delta \mathbf{v}^1$  und  $\Delta \mathbf{v}^2$  mit den Parametern  $\alpha = \pm 1$  dar. Dabei entspricht der durchgezogenen Kurve die Darstellung mit dem positiven Parameter  $\alpha = 1$  und der gestrichelten Kurve die Darstellung mit dem negativen Parameter  $\alpha = -1$ . Unschwer ist zu erkennen, dass für  $\alpha = \pm 1$  die neuen Rissränder entlang der Winkelhalbierenden von  $\mathbf{n}^1$  und  $\mathbf{n}^2$  verlaufen.

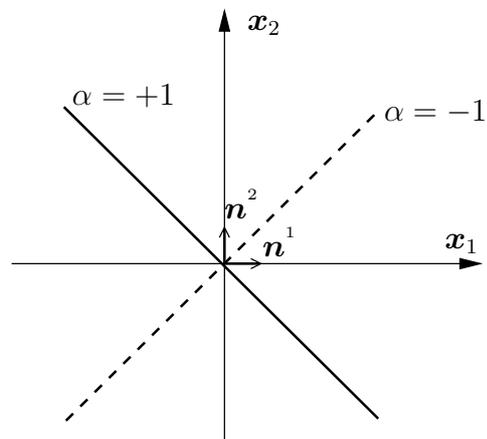


Abb. 1.2: Rissränder mit  $\alpha = \pm 1$

Abb. 1.3 enthält die Darstellung der Rissränder für  $\xi = 1$  und  $\alpha_a = \pm 2.5$ , wäh-

rend Abb. 1.4 dem Verlauf der Rissränder mit dem gleichen  $\xi$ -Wert ( $\xi = 1$ ) allerdings für  $\alpha_b = \pm 0.25 = \frac{1}{10}\alpha_a$  entspricht.

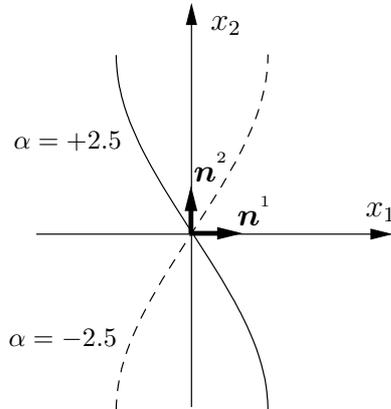


Abb. 1.3: Rissränder für  $\alpha = \pm 2.5$

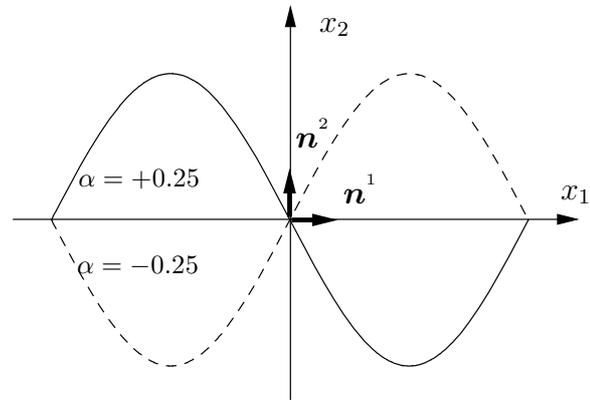


Abb. 1.4: Rissränder für  $\alpha = \pm 0.25$

Genau wie in Abb. 1.2 entsprechen Darstellungen mit gestrichelten Linien in Abb. 1.4 und Abb. 1.3 den Rissrändern mit negativen Parametern ( $\alpha = -2.5$  bzw.  $-0.25$ ) und Darstellungen mit durchgezogenen Linien Rissränder mit positiven Parametern ( $\alpha = 2.5$  bzw.  $0.25$ ).

Bei den bisherigen Betrachtungen beschreibt die Randkurve  $\Sigma$  eine Seite des Risses. An der gegenüberliegende Seite von  $\Sigma$  muss die Lösung ebenfalls eindeutig sein. Demnach müssen auch hier für jede Einzellösung  $\Delta v^{1R}$  oder  $\Delta v^{2R}$  die Ausdrücke  $\sin(\xi \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{x}) = 0$  oder  $\sin(\xi \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{x}) = 0$  gelten, d.h. es gibt für die Lage  $\mathbf{x}_q$  der anderen Seite des Risses, der bei  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  beginnt:

$$\xi n_q^i x_q = k\pi \quad \text{mit} \quad i, q = 1, 2 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Für den Sonderfall

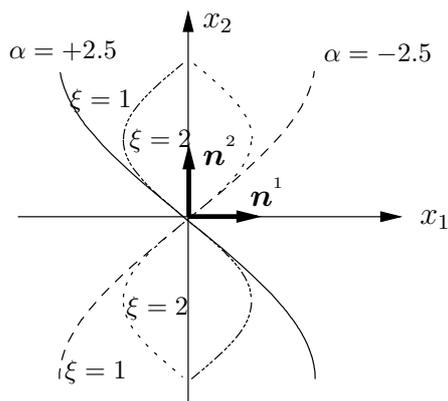
$$\mathbf{n}^1 = [1 \quad 0]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T$$

gilt nun:

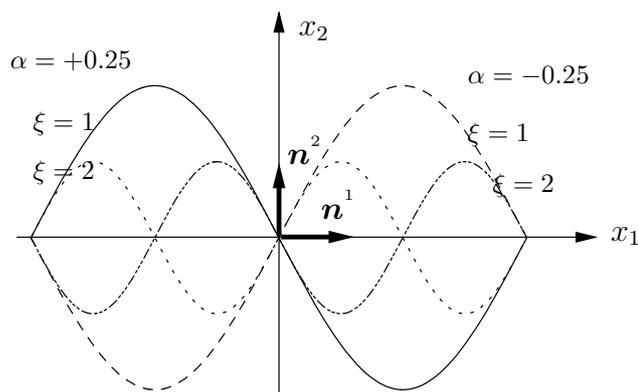
$$\xi x_1 = k\pi \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{k\pi}{\xi};$$

$\frac{\pi}{\xi}$  ist die minimale Rissbreite, die sich dabei ergibt. Da die Rissbreite am Anfang sehr klein ist, hat  $\xi$  einen sehr großen Wert im Moment des Auseinanderbrechens, d.h.  $\xi \rightarrow \infty$ . Setzt man diesen Wert in die Rissrandkurve Abb. 1.4 oder Abb. 1.3 ein, so erkennt man, dass der Rissrand sich den Geraden  $x_1$  oder  $x_2$  für sehr große  $\xi$  ( $\xi \rightarrow \infty$ ) nähert - siehe Abb. 1.5 bzw. Abb. 1.6. D.h. es entsteht für  $|\alpha| \neq 1$  bei Überlagerung von  $\Delta v^{1R}$  und  $\Delta v^{2R}$  keine neue Rissrandkurve. Die angeblich durch Überlagerung entstehenden neuen Rissränder streben mit wachsender Rissöffnung asymptotisch gegen die ursprünglichen Rissränder.

Es ist ersichtlich, dass jede minimale Abweichung von den Parameterwerten im Fall  $\alpha = \pm 1$  in Abb. 1.2 zu einem Rissverlauf führt, der analog zum Fall  $\alpha \neq \pm 1$  ist - siehe Abb. 1.3 oder Abb. 1.4. Der Rissverlauf ist somit für  $\alpha = \pm 1$  instabil und stabil für



**Abb. 1.5:** Rissränder für  $\alpha = \pm 2.5$  und  $\xi = 1$  bzw. 2



**Abb. 1.6:** Rissränder für  $\alpha = \pm 0.25$  und  $\xi = 1$  bzw. 2

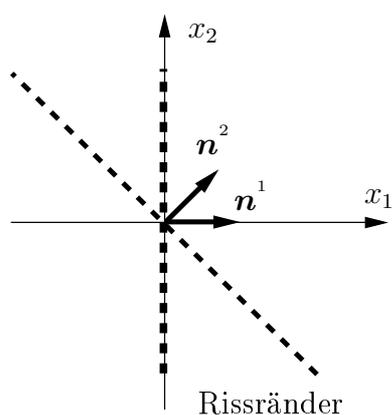
$\alpha \neq \pm 1$ . Anhand weiterer Falluntersuchungen (Richtungskonfigurationen) wird diese Erkenntnis näher analysiert. Nach den bisherigen Analysen können neue Rissränder nur für  $\alpha = \pm 1$  mit instabilen Rissrichtungen entstehen. Wir werden daher im Folgenden nur Fälle ( $\alpha \neq \pm 1$ ) betrachten, wo keine neuen Rissränder vorkommen.

## Fall 2: Lösung mit schief zueinander stehenden Normalen

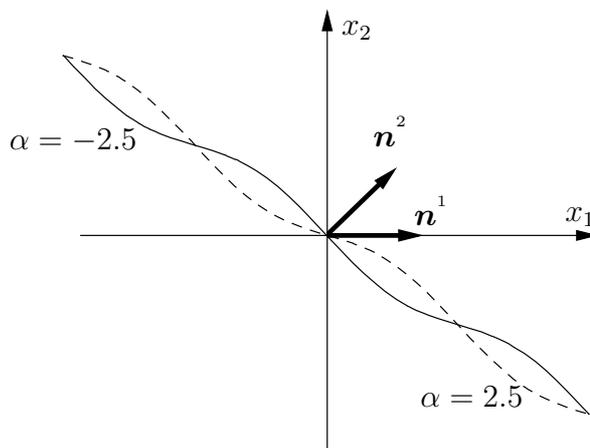
Man betrachte

$$\mathbf{n}^1 = [1 \quad 0]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{n}^2 = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^T$$

als Einheitsvektoren aus der mehrdeutigen Lösung des quartischen Polynoms für die Singularitätsbedingung. Die Vektoren sind nicht senkrecht zueinander.



**Abb. 1.7:** Ursprüngliche Rissränder



**Abb. 1.8:** Rissränder nach Überlagerung mit  $\alpha = \pm 2.5$

Abb. 1.7 stellt sowohl Einheitsvektoren  $\mathbf{n}^1$  und  $\mathbf{n}^2$  als auch die ihnen zugehörigen Rissränder dar. Die Überlagerung von  $\Delta \mathbf{v}^{1R}$  und  $\Delta \mathbf{v}^{2R}$  erfolgt mit den Parameterwerten  $\xi = 1$  für die Wellenzahl und  $\alpha = \pm 2.5$  für die Vielfachheit. Die entstehenden Bruchränder sind in Abb. 1.8 dargestellt.

Wie zuvor in vorigen Fällen vorgeführt, wird beim Bruch der Parameter  $\xi$  sehr groß, d.h.  $\xi \rightarrow \infty$ . Setzt man diesen Wert in die Rissrandkurve - Abb. 1.8 - ein, so stellt

man fest, dass die Kurve gegen einen der ursprünglichen Rissränder - Abb. 1.7 - strebt. Damit ist ebenfalls gezeigt, dass die asymptotische Betrachtung der Überlagerung mit  $\alpha \neq 1$  keine neue Rissrandkurve zulässt.

Ähnlich wie im Fall 1, ist für  $\alpha \neq \pm 1$  die Existenz von neuen Rissrändern ausgeschlossen. Die Abbildungen der Überlagerung von  $\Delta \mathbf{v}^{1R}$  und  $\Delta \mathbf{v}^{2R}$  - Abb. 1.8 - fallen asymptotisch mit den ursprünglichen Rissrändern - Abb. 1.7 - zusammen. Die Rissränder sind also für  $|\alpha| < 1$  senkrecht zu  $\mathbf{n}^1$  und für  $|\alpha| > 1$  senkrecht zu  $\mathbf{n}^2$ .

# Anhang B

## Zeichenerklärung

### Allgemeines

$\mathbf{X}$	kursive Fettschrift zur Kennzeichnung von Vektorfeldern, z.B. Ortsvektor
$\mathbf{F}$	normale Fettschrift zur Kennzeichnung von Tensorfeldern, z.B. Deformationsgradient
$\overset{4}{\mathbf{C}}$	Hochgestellte 4 zur Kennzeichnung von Tensoren vierter Stufe, z.B. Werkstofftensor
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	Zahlenmengen, z.B. die der reellen und die komplexen Zahlen
$\partial\mathcal{B}$	Oberfläche des Gebiets $\mathcal{B}$
$\partial\mathcal{B}^U$	Teilrand mit gegebenen $\bar{U}$
$\partial\mathcal{B}^t$	Teilrand mit gegebenen $\bar{t}$
$\mathcal{B}_t$	Momentankonfiguration
$\mathcal{B}_o$	Ausgangskonfiguration
$\mathcal{B}$	Konfiguration bei kleinen Verschiebungen

### Skalare

$da, dA$	Norm der Flächenelemente, z.B. $da = \ d\mathbf{a}\ $ , $dA = \ d\mathbf{A}\ $
$E$	Elastizitätsmodul
$G$	Schubmodul
$K$	Kompressionsmodul
$W^{\text{int}}$	Formänderungspotenzial
$\nu_{12}, \nu_{21}$	Querkontraktionszahlen
$\hat{\nu}_{12}, \hat{\nu}_{21}$	geschädigte Querkontraktionszahlen
$E_1$	Elastizitätsmodul in Faserrichtung
$\hat{E}_1$	geschädigter Elastizitätsmodul in Faserrichtung
$E_2$	Elastizitätsmodul senkrecht zur Faserrichtung

$\hat{E}_2$	geschädigter Elastizitätsmodul senkrecht zur Faserrichtung
$G_{12}$	effektiver Schubmodul
$\hat{G}_{12}$	geschädigter effektiver Schubmodul
$J$	JACOBI-Determinante $J = \det(\mathbf{F})$
$u, v$	Verschiebungen in x- bzw. y-Richtung
$dv, dV$	Volumenelemente (Momentan- bzw. Ausgangskonfiguration)
$x, y, z$	Koordinaten in einem x-y-z Koordinatensystem
$a^i$	Komponente eines Vektors
$T^{ij}$	Komponente eines Tensors
$m_1, m_2$	Steigungen für die
$m_{12}$	Degradationsbeschreibung
$\theta_R$	Rissrichtung als reelle Nullstelle eines quartischen Polynoms
$z = \tan \theta_R$	Variable des quartischen Polynoms
$\rho_0$	Dichte (Ausgangskonfiguration)
$\rho$	Dichte (Momentankonfiguration)
$m$	Masse
$\delta$	Niveau der Schädigung ( $0 \leq \delta \leq 1$ )
$\xi$	Wellenzahl

## Vektoren

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$	Vektoren
$\mathbf{a}_i$	orthonormiertes konvektives Basissystem
$d\mathbf{a}, d\mathbf{A}$	Flächenelemente (Momentan- bzw. Ausgangskonfiguration)
$d\mathbf{x}, d\mathbf{X}$	Linienelemente (Momentan- bzw. Ausgangskonfiguration)
$\mathbf{G}_i, \mathbf{G}^i$	ko- bzw. kontravariante Basisvektoren (Ausgangskonfiguration)
$\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^i$	ko- bzw. kontravariante Basisvektoren (Momentankonfiguration)
$\mathbf{n}, \mathbf{N}$	Normale (Momentan- bzw. Ausgangskonfiguration)
$\mathbf{k}$	Volumenkraftvektor
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor
$\mathbf{t}$	Spannungsvektor
$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$	Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{I}$	Impulsvektor
$\mathbf{D}_c$	Drehimpulsvektor ( $\mathbf{c}$ Ortsvektor)
$\bar{\mathbf{U}}$	Vorgeschriebene Verschiebung am Verschiebungsrand
$\bar{\mathbf{t}}$	Randlast
$\Delta\mathbf{v}$	Differenzwert von Geschwindigkeitsvektoren

## Matrizen und Tensoren

$\mathbf{L}$	Geschwindigkeitsgradient
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient
$\mathbf{U}$	rechter Strecktensor
$\mathbf{V}$	linker Strecktensor
$\mathbf{R}$	Drehtensor
$\mathbf{C}_R$	rechter CAUCHY-GREEN Tensor
$\mathbf{C}_L$	linker CAUCHY-GREEN Tensor
$\mathbf{E}$	GREENScher Verzerrungstensor: $\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})$
$\mathbf{E}^A$	ALMANSI'scher Verzerrungstensor: $\mathbf{E}^A = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}$
$\mathbf{T}$	CAUCHYScher Spannungstensor
$\mathbf{T}_0$	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor: $\mathbf{T}_0 := \det(\mathbf{F}) \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}$
$\tilde{\mathbf{T}}$	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor:
$\mathbf{1}$	Einheitstensor zweiter Stufe
$\overset{4}{\mathbf{1}}$	Einheitstensor vierter Stufe
$\overset{4}{\mathbf{C}}$	Stofftensor
$\mathbf{C}$	Elastizitätsmatrix
$\mathbf{C}^{\text{Mon.}}$	Elastizitätsmatrix (monotropes Materialverhalten)
$\mathbf{C}^{\text{Ort.}}$	Elastizitätsmatrix (orthotropes Materialverhalten)
$\mathbf{C}^{\text{Tr. Is.}}$	Elastizitätsmatrix (transversal isotropes Materialverhalten)
$\mathbf{C}^{\text{Is.}}$	Elastizitätsmatrix (isotropes Materialverhalten)
$\epsilon$	VOIGTScher Dehnungstensor
$\dot{\epsilon}$	VOIGTSche Dehnungstensorrate
$\varepsilon$	Verzerrungstensor
$\dot{\varepsilon}$	Verzerrungstensorrate
$\mathbf{H}$	Lokalisierungstensor
$\overset{4}{\mathbf{L}}(\varepsilon)$	instantaner Materialstofftensor
$\mathbf{L}(\varepsilon)$	instantane Materialsteifigkeitsmatrix
$\hat{\mathbf{C}}$	Steifigkeitsmatrix des geschädigten Laminats
$\hat{\mathbf{S}}$	Nachgiebigkeitsmatrix des geschädigten Laminats

## Polynome

$Q(\theta)$	quartisches Polynom
$P(z)$	quartisches Polynom
$P_1(z)$	biquadratisches Polynom
$R(y)$	quadratisches Polynom

**Operatoren**

$d(\cdot)$	Differenzial
$\det$	Determinante
$\text{EW}\{\cdot\}$	Eigenwerte $\{\cdot\}$
$\text{div}, \text{DIV}$	Divergenz
$\text{grad}, \text{GRAD}$	Gradient
$\text{tr}$	Spur eines Tensors
$(\cdot)^{\text{sym}}$	symmetrischer Anteil eines Tensors / einer Matrix
$(\cdot)^{\text{T}}$	Transposition eines Tensors / einer Matrix
$\Delta(\cdot)$	Differenzwert
$\times$	Kreuzprodukt
$\otimes$	Dyadisches Produkt
$\delta_j^i, \delta_{ij}$	KRONECKER-Symbol: $\delta_j^i = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$
$\ \mathbf{E}\ $	Norm eines Tensors: $\ \mathbf{E}\  := \sqrt{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}$

**Abkürzungen**

FEM	Finite-Elemente-Methode
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
CDM	Kontinuums-Schädigungs-Mechanik
FM	Bruchmechanik

# Literaturverzeichnis

- [1] Altenbach, H., J. Altenbach und R. Rikards (1996): *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie.
- [2] Barbier, G., A. Benallal und V. Cano (1998): *Relation theorique entre la methode de perturbation lineaire et l'analyse de bifurcation pour la prédiction de la localisation des deformations*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Serie II b, S. 153-158.
- [3] Bathe, K.J. (1982): *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [4] Bathe, K.J. und E.N. Dvorkin (1986): *A Formulation of General Shell Elements - the Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components*. Int. J. Num. Meth. Eng., 22, S. 697-722.
- [5] Bazant, Z.P. (1994): *Nonlocal damage theory based on micromechanics of crack interactions*. Journal of Engineering Materials, 120, Nr. 3, S. 593-616.
- [6] Bazant, Z.P., I.M. Daniel und Z. Li (1996): *Size effect and fracture characteristics of composite laminates*. Journal of Engineering Materials and Technology, 118, S. 317-324.
- [7] Bazant, Z. P. und G. Pijaudier-Cabot (1988): *Nonlocal Continuum Damage, Localization Instability and Convergence*. Journal of Applied Mechanics, 55, S. 287-293.
- [8] Becker, E. und W. Bürger (1975): *Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner, Stuttgart.
- [9] Betten, J. und Q. S. Zheng (1996): *On damage effective stress and equivalence hypothesis*. International Journal of Damage Mechanics, 5, S. 219-240.
- [10] Bronstein - Semendjajew (1987): *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main.
- [11] Burg, K., H. Haf und F. Wille (1993): *Höhere Mathematik für Ingenieure, Band V Funktionanalysis und Partielle Differentialgleichungen*. B. G. Teubner Stuttgart.
- [12] Buczek, M. B. und C. T. Herakovich (1983): *Direction of crack growth in fibrous composites*. G.J. Dvorak, eds., Mechanics of Composite Materials, AMD Vol. 58, ASME, New York, S. 75-82.
- [13] Cano, V. (1996): *Instabilites et rupture dans les solides elastoviscoplastiques*. thèse de doctorat, université Paris-6.

- [14] Carlsson, L. A. und R. B. Pipes (1989): *Hochleistungsfaserverbundwerkstoffe*. B.G. Teubner, Stuttgart.
- [15] Daniel, I. M., J. W. Lee und G. Yaniv (1988): *Damage development and property degradation in composite materials*. Int. J. Num. Meth. Engrg., 35, S. 521-539.
- [16] De Borst, R. und R. Mühlhaus (1992): Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects, Int. J. Num. Meth. Engrg., 35, S. 521-539.
- [17] Desmorat, R. und J. Lemaitre (2005): *Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Springer Verlag.
- [18] Dvorak, G. J., N. Laws und M. Hejazi (1983): *Matrix cracking in unidirectional composite*. Advances in Aerospace Structures, Materials and Dynamics, S. 23-29.
- [19] Dvorak, G. J., N. Laws und M. Hejazi (1985): *Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates I. Thermoelastic properties of a ply with cracks*. Journal of Composite Materials, 19, S. 216-234.
- [20] Dvorak, G. J. und N. Laws (1987): *Progressive transverse cracking in composite laminates*. Journal of Composite Materials, 22, S. 900-916.
- [21] Fiolka, M. (2007): *Theorie und Numerik volumetrischer Schalenelemente und Delaminationsanalyse von Faserverbundlaminaten*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Kassel.
- [22] Gerlach, S. (2003): *Modellbildung und Parameteridentifikation viskoelastischer Faserverbundwerkstoffe*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Kassel.
- [23] Greve, R. (2003): *Kontinuumsmechanik-Ein Grundkurs*. Springer Verlag, Berlin.
- [24] Gross, D. und Th. Seelig (2001): *Bruchmechanik mit einer Einführung in die Mikromechanik*. Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [25] Hahn, H. G. (1976): *Bruchmechanik*. Teubner Studienbücher: Mechanik, B.G. Teubner Stuttgart.
- [26] Haupt, P. (2000): *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer Verlag.
- [27] Haupt, P. (1993): *Einführung in die Mechanik, Technische Mechanik III*. Vorlesungsskript: Institut für Mechanik der Universität Kassel.
- [28] Herakovich, C. T., J. Aboudi, S. W. Lee und E. A. Strauss (1988): *Damage in composite laminates: effects of transverse cracks*. Mechanics of Materials, 7, S. 91-107.
- [29] Herakovich, C. T., J. Aboudi, S. W. Lee und E. A. Strauss (1988): *2-D and 3-D damage effects in cross-ply laminates*. G.J. Dvorak et al., eds., Mechanics Composite Materials, AMD, 92, ASME, New York, S. 143-147.
- [30] Herakovich, Carl T. (1998): *Mechanics of Fibrous Composites*. Hamilton Verlag, U.S.A.

- [31] Hirzebruch, F. und W. Scharla (1971): *Einführung in die Funktionalanalysis*. wissenschaftsverlag.
- [32] Highsmith, A. L. und K. L. Reifsnider (1982): *Stiffness-reduction mechanisms in composite laminates*. Damage in Composite Materials, ASTM STP 775, K.L. Reifsnider, Ed., American Society of Testing and Materials, S. 103-117.
- [33] Hill, R. (1962): *Acceleration waves in solids*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 10, S. 1-16.
- [34] Hörmann, M. (2002): *Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [35] Hüttel, C. (2001): *Finite-Elemente-Berechnung von Schalen aus spröden Faserverbundwerkstoffen*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Kassel.
- [36] Krajcinovic, D. (1995): *Continuum damage mechanics: When and how?* International Journal of Damage Mechanics, 4, S. 217-229.
- [37] Krajcinovic, D. (1996): *Damage Mechanics*. Elsevier, Amsterdam.
- [38] Laws, N., G. J. Dvorak und M. Hejazi (1983): *Stiffness changes in unidirectional composites caused by cracked systems*. Mechanics of Materials, 2, S. 123-137.
- [39] Laws, N. und J. R. Brockenbrough (1987): *The effects of micro-crack systems on the loss of stiffness of brittle solids*. Int. J. Solids Structures, 23, S. 1247-1268.
- [40] Lemaitre, J. (1996): *A Course on Damage Mechanics*. Springer Verlag, Berlin.
- [41] Malvern, L. E. (1969): *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Inc., Engelwood Cliffs, New Jersey.
- [42] Matzenmiller, A., J. Lubliner und R. L. Taylor (1995): *A constitutive model for anisotropic damage in fibre composites*. Mechanics of Materials, 20, S. 125-152.
- [43] Mazars, J. und G. Pijaudier-Cabot (1996): *From damage to fracture mechanics and conversely: a combined approach*. Int. J. Solids Structures, 33, Nr. 20-22, S. 3327-3342.
- [44] Nemat-Nasser, S. und M. Hori (1993): *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials*. Elsevier, Amsterdam.
- [45] Oritz, M. (1985): *A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete*. Mechanics of Materials, 4, S. 67-93.
- [46] Parisch, H. (2003): *Festkörper-Kontinuumsmechanik von den Grundgleichungen zur Lösung mit Finite Elementen*. Teubner Verlag, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden.
- [47] Pijaudier-Cabot, G. und A. Benallal (1993): *Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum*. Int. J. Solids Structures, 30, S. 1761-1775.
- [48] Puck, A. (1996): *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten (Modelle für die Praxis)*. Hanser Verlag, München Wien.

- [49] Rabotnov, I. N. (1963): *On the Equations of State for Creep, in Progress in Applied Mechanics*. The Prager Anniversary Volume, Mac Millan, New York, S. 307-315.
- [50] Rice, J. R. (1976): *The localization of plastic deformation, Theoretical and Applied Mechanics*. W.T Koiter , Ed. North Holland, S.207-220.
- [51] Rossmannith, H. P. (1982): *Grundlagen der Bruchmechanik*. Springer Verlag, Berlin.
- [52] Rudnicki J. W. und J. R. Rice (1975): *Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 23, S. 371-394.
- [53] Springmann, M. (2005): *Identifikation von Materialparametern schädigungsmechanischer Gesetze unter Einbeziehung der Dehnungslokalisierung*. Dissertation, Institut für Mechanik und Fluidodynamik, Technische Universität Bergakademie Freiberg.
- [54] Talreja, R. (1985): *Transverse cracking and stiffness reduction in composite laminates*. Journal of Composite Materials, 19, S. 355-375.
- [55] Thom, R. (1972): *Structural Stability and Morphogenesis*. Addison Wesley, 2. erweiterte Auflage 1989
- [56] Tolstov, Georgi P. (1976): *Fourier Series*. Dover Publications
- [57] Varna, J. und L. Berglund (1991): *Multiple transverse cracking and stiffness reduction in cross-ply laminates*. Journal of Composites Technology and Research, 13, Nr. 2, S. 99-106.
- [58] De Vree, J. H. P., W. A. M. Brekelmans und M. A. J. van Gils (1995): *Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics*. Computers and Structures, 55, Nr. 4, S. 581-588.
- [59] Wackerfuss, J. (2005): *Theoretische und numerische Beiträge zur Beschreibung von Lokalisierungsphänomenen in der Strukturmechanik*. Dissertation, Institut für Werkstoffe und Mechanik im Bauwesen, Technische Universität Darmstadt.
- [60] Yazdani, S. und H. L. Schreyer (1990): *Nonlinear response of plain concrete shear walls with elastic-damaging behavior*. Damage Mechanics in Engineering Materials, AMD - Vol. 109, Proceedings of the WAM in Dallas / MD - Vol. 24, Proceedings of the ASME in Texas, Nov. 25-30.
- [61] Yen, C. F. (2002): *Ballistic impact modelling of composite materials*. 7<sup>th</sup> International LS-DYNA Users Conference, Dearborn, Michigan, S. 6.15-6.26.

ISBN 978-3-89958-580-3