

Modulsymbole und Bruhat-Tits-Gebäude der $\mathrm{PGL}(3)$ über Funktionenkörpern

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
am Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften der
Universität Kassel

vorgelegt von
Dipl.-Math. Jennylee Müller
geboren in Korbach

Institut für Mathematik
Universität Kassel
2014

Tag der Disputation

Mittwoch, der 3.Dezember 2014

Erstgutachter

Prof. Dr. Hans-Georg Rück
Universität Kassel

Zweitgutachter

Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Universität des Saarlandes

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig, ohne unerlaubte Hilfe Dritter angefertigt und andere als die in der Dissertation angegebene Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Dritte waren an der inhaltlich-materiellen Erstellung der Dissertation nicht beteiligt; insbesondere habe ich hierfür nicht die Hilfe eines Promotionsberaters in Anspruch genommen. Kein Teil dieser Arbeit ist in einem anderen Promotions- oder Habilitationsverfahren verwendet worden.

Kassel, den _____

*Für meinen Dad.
Danke für die Startbahn.*

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1. Das Bruhat-Tits-Gebäude	11
1.1 Definition des Bruhat-Tits-Gebäudes	11
1.2 Beschreibung von \mathcal{B} durch Äquivalenzklassen von Matrizen	14
1.3 Die Operation von Kongruenzuntergruppen	18
1.4 Struktur des Bruhat-Tits-Gebäudes	28
2. Harmonische k-Koketten	37
2.1 Definition harmonischer k-Koketten	37
2.2 Träger der Funktionen aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$	40
3. Bestimmung einer Basis von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$	43
3.1 Endlichkeit der Dimension von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$	43
3.2 Harmonische Koketten als Funktionen auf $\Gamma \backslash \mathcal{B}$	44
3.3 Übergang zu geschlossenen Flächen	47
3.4 Übergang zu geschlossenen Flächen über \mathbb{Z}	49
4. Geschlossene Flächen über \mathbb{Z}	51
4.1 Gestalt	51
4.2 Bedingungen für geschlossene Flächen	54
4.3 Bestimmen der Anfangsflächen	57
4.4 Modulsymbole erster Art	60
4.5 Modulsymbole zweiter Art	65
4.6 Modulsymbole für $\Gamma_0(N)$	68

5. Berechnung einer Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$	71
5.1 Ablauf des Verfahrens	71
5.2 Bestimmen der Modulsymbole M_1^Γ bzw. M_2^Γ für Γ	72
5.3 Bestimmen der Modulsymbole \mathcal{M}_1 bzw. \mathcal{M}_2 für $\Gamma \setminus \mathcal{B}$	75
5.4 Bestimmen der Anfangsflächen \mathcal{A}_Γ	77
5.5 Bestimmen der Gruppe \mathcal{U}	77
5.6 Zusammenfassung	80
6. Hecke-Operatoren	83
6.1 Petersson-Skalarprodukt	83
6.2 Doppelnebenklassenoperatoren	86
6.3 Adjungierte Abbildung von $T_{\Gamma\alpha\Gamma}$	90
6.4 Doppelnebenklassenoperatoren auf geschlossenen Flächen	95
6.5 Hecke-Operatoren	99
7. Berechnung der Hecke-Operatoren	105
7.1 Ablauf des Verfahrens	105
7.2 Bestimmen von $T(\Upsilon(U_i))$	106
7.3 Bestimmen von $U_{T,i}$	108
7.4 Bestimmen der Abbildungsmatrix	110
7.5 Bestimmen von Vertreter und Niveau	110
A. Beispiele	121
A.1 Beispiele für $q = 2$	123
A.2 Beispiele für $q = 3$	124
A.3 Beispiele für $q = 4$	130
Literaturverzeichnis	143

Einleitung

Die Theorie der Modulformen wurde im 19. Jahrhundert eingeführt und spielt seitdem eine wichtige Rolle im Bereich der Zahlentheorie.

In der Vergangenheit wurde hierbei unter anderem die Verbindung zwischen Modulformen und elliptischen Kurven untersucht. Diese Verbindung war von zentraler Bedeutung für den Beweis des letzten Satz von Fermat und findet Ausdruck in dem im Jahr 2001 in [BCDT] bewiesenen Modularitätssatz. Dieser besagt, dass jede rationale elliptische Kurve modular ist. Somit existiert zu jeder elliptischen Kurve eine Spitzenform vom Gewicht 2 zur $\Gamma_0(N)$, deren L -Reihe gleich der L -Reihe der elliptischen Kurve ist.

Da eine solche Verbindung bereits zuvor vermutet und für spezielle elliptische Kurven bekannt war, wurde in der Literatur der Raum der Spitzenformen vom Gewicht 2 zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ betrachtet. Zur Berechnung dieses Raums stellte sich die Beschreibung durch sogenannte Modulsymbole als äußerst nützlich heraus.

In der vorliegenden Arbeit wird in Analogie zum Raum der Spitzenformen auf der oberen Halbebene der Raum $\mathcal{H}_1^2(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ spezieller harmonischer 2-Koketten auf dem Bruhat-Tits-Gebäude der $\mathrm{PGL}(3)$ über Funktionenkörpern betrachtet. Eine Frage ist hierbei, ob und wie sich die Theorie der Modulsymbole auf diesen Fall übertragen lässt.

Im Rahmen der Einleitung wird zunächst kurz der Raum der Spitzenformen und seine Beschreibung durch Modulsymbole im klassischen Fall behandelt. Im Anschluss daran wird erläutert, wie die Theorie der Spitzenformen und Modulsymbole in der Literatur im Fall der Dimension 2 auf Funktionenkörper übertragen wurde. Ausgehend von diesen Erklärungen kann für den Funktionenkörperfall der Dimension 3 die Analogie zwischen Spitzenformen und den speziellen harmonischen 2-Koketten aufgezeigt werden. Abschließend werden die Ergebnisse und der Ablauf der Arbeit angegeben.

Klassischer Fall

Eine Modulform vom Gewicht k für eine Kongruenzuntergruppe Γ der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist eine holomorphe Funktion auf der oberen Halbebene

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\},$$

die für alle Elemente $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ der Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

Einleitung

genügt und holomorph an den Spitzen ist. Verschwindet sie an den Spitzen, so wird sie Spitzenform genannt. Als Spitzen werden hierbei die Γ -Äquivalenzklassen der Menge $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ bezeichnet.

Wie anfangs erwähnt, ist besonders der endlich-dimensionale Raum der Spitzenformen vom Gewicht 2 zur $\Gamma_0(N)$ von Interesse. Es zeigt sich, dass dieser Raum von Spitzenformen dual zur ersten Homologie der Riemannschen Fläche $X_0(N) = \Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}^*$ ist, wobei \mathbb{H}^* die erweiterte obere Halbebene $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ bezeichnet.

Zur Berechnung dieser Homologie erweisen sich, wie in [Cr] erläutert, die von Manin 1972 in [Ma] eingeführten Modulsymbole als äußerst hilfreich. Als Modulsymbole werden hierbei Homologieklassen von Wegen zwischen $\Gamma_0(N)$ -äquivalenten Punkten der erweiterten oberen Halbebene bezeichnet. Es stellt sich heraus, dass die Gruppe der Modulsymbole mit Linearkombinationen von Elementen des Quotienten $\Gamma_0(N) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ modulo gewisser Relationen identifiziert werden kann. Diese Darstellung ermöglicht die Berechnung der Homologie sowie des Raums der Spitzenformen.

Funktionskörperfall der Dimension 2

Die Theorie der Spitzenformen und Modulsymbole wurde in der Literatur für die Dimension 2 auf den Funktionskörperfall übertragen.

Statt des Rings \mathbb{Z} der ganzen Zahlen wird hierbei der Polynomring $\mathbb{F}_q[T]$ über dem endlichen Körper \mathbb{F}_q verwendet. Dem Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen entspricht dann der rationale Funktionskörper $K := \mathbb{F}_q(T)$. In Analogie zum Körper \mathbb{R} , der Vervollständigung der rationalen Zahlen bezüglich des Absolutbetrags, wird der Körper $K_\infty := \mathbb{F}_q(\left(\frac{1}{T}\right))$, die Kompletterung des rationalen Funktionskörpers K bezüglich der Stelle ∞ , betrachtet.

Es bleibt zu klären, was in diesem Fall dem Definitionsbereich der Modulformen, der oberen Halbebene \mathbb{H} , entspricht. Auf der klassischen oberen Halbebene \mathbb{H} operiert die Gruppe $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ der invertierbaren Matrizen mit positiver Determinante durch lineare Transformation, d.h. eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ wirkt auf einem Element $\tau \in \mathbb{H}$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Aufgrund der Transitivität dieser Operation ist \mathbb{H} isomorph zum Quotienten der $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ modulo der Fixgruppe eines Elementes von \mathbb{H} , beispielsweise der komplexen Einheit i . Modulformen können daher als Funktionen auf dem Quotienten

$$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^\times$$

aufgefasst werden.

Im Funktionskörperfall tritt an die Stelle der Gruppe $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$. In Analogie zu den Modulformen werden spezielle Funktionen auf dem Quotienten

$$\mathrm{GL}_2(K_\infty) / \Gamma_\infty \cdot K_\infty^\times$$

betrachtet. Der Quotient $\mathrm{GL}_2(K_\infty) / \Gamma_\infty \cdot K_\infty^\times$ entspricht hierbei der Menge der gerichteten Kanten des Bruhat-Tits-Baums \mathcal{T} .

Nach der Wahl des Definitionsbereich bleibt zu erklären, welche Art von Abbildungen im Funktionenkörperfall der Dimension 2 betrachtet werden.

Wie in [Gel] beschrieben, lässt sich im klassischen Fall der Raum der Spitzenformen vom Gewicht 2 der Gruppe $\Gamma_0(N)$ mit einem gewissen Raum von automorphen Formen der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ identifizieren. In [Ge] wird in Analogie dazu ein Isomorphismus zwischen einem Raum bestimmter automorpher Formen der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ und einem Raum $\mathcal{H}_1^1(\mathcal{T}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ spezieller Funktionen auf den gerichteten Kanten des Bruhat-Tits-Baums angegeben. Die Elemente des Raums $\mathcal{H}_1^1(\mathcal{T}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ sind hierbei komplexwertige harmonische 1-Koketten, die unter der Operation der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ invariant sind und nur auf endlich vielen Kanten des Quotientengraphens $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{T}$ Werte ungleich Null annehmen.

Dieser Raum $\mathcal{H}_1^1(\mathcal{T}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ ist, ähnlich wie die Spitzenformen im klassischen Fall, zur Parametrisierung von elliptischen Kurven über K von Interesse. So lässt sich nach der im Funktionenkörperfall von Drinfeld bewiesenen Vermutung von Taniyama-Weil durch Betrachtung von Hecke-Operatoren auf $\mathcal{H}_1^1(\mathcal{T}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ eine 1-1-Korrespondenz zwischen Isogenieklassen bestimmter elliptischer Kurven und Neufurmen aus $\mathcal{H}_1^1(\mathcal{T}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$, die ein gewisses Verhalten unter Operation der Hecke-Operatoren zeigen, nachweisen.

Der Raum $\mathcal{H}_1^1(\mathcal{T}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ steht, wie in [GR] gezeigt, in Bijektion zur ersten Homologie des Quotientengraphens $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{T}$. Somit kann jede dieser harmonischen 1-Koketten mit einem geschlossenen Weg im Quotientengraphen identifiziert werden. Die geschlossenen Wege wiederum werden von Teitelbaum in seinem 1992 erschienenen Artikel „Modular symbols for $\mathbb{F}_q(T)$ “ [Te] durch Modulsymbole beschrieben. Die Modulsymbole sind in diesem Fall Linearkombinationen von Elementen der projektiven Geraden $\mathbb{P}_1(K)$. Indem Teitelbaum das Verhalten des Bruhat-Tits-Baums \mathcal{T} unter Operation arithmetischer Untergruppen der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ näher betrachtet, gelingt es ihm, die Gruppe der Modulsymbole durch Erzeuger und Relationen zu beschreiben. So erhält er ein hilfreiches Werkzeug, um den Raum $\mathcal{H}_1^1(\mathcal{T}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ und dessen Hecke-Struktur algorithmisch zu untersuchen.

Funktionenkörperfall der Dimension 3

In Analogie zum Fall der Dimension 2 werden in der vorliegenden Arbeit spezielle Funktionen, sogenannte harmonische 2-Koketten, auf dem Quotienten

$$\mathrm{GL}_3(K_{\infty})/I_{\infty} \cdot K_{\infty}^{\times}$$

betrachtet, die ein gewisses Invarianzverhalten unter der Operation von Kongruenzuntergruppen der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ besitzen. Der Quotient $\mathrm{GL}_3(K_{\infty})/I_{\infty} \cdot K_{\infty}^{\times}$ kann dabei mit der Menge der markierten 2-Simplizes des Bruhat-Tits-Gebäudes \mathcal{B} der $\mathrm{PGL}_3(K_{\infty})$, der Entsprechung des Bruhat-Tits-Baums im 3-Dimensionalen, identifiziert werden.

Ähnlich zum Fall niedrigerer Dimension kann, wie in [Am] für beliebige Dimension n nachgewiesen, auch der Raum $\mathcal{H}_1^2(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma}$ der Γ -invarianten harmonischen 2-Koketten mit endlichem Träger modulo Γ mit einem durch die Darstellungstheorie bestimmten Raum von automorphen Formen der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{A}_K)$ identifiziert werden.

Wie auch zuvor ist es das Ziel, eine endliche Basis des Raums $\mathcal{H}_1^2(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma}$ zu bestimmen. Es stellt sich hierbei die Frage, ob auch in diesem Fall eine Verallgemeinerung von

Einleitung

Modulsymbolen zur Bestimmung dieses Raums von Nutzen sein könnte. Dabei ist insbesondere zu klären, wie eine solche Verallgemeinerung von Modulsymbolen zu definieren ist.

Es zeigt sich, dass der Raum $\mathcal{H}_1^2(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ mit einem Raum $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ von Funktionen auf den nicht-geordneten 2-Simplizes des Bruhat-Tits-Gebäudes identifiziert werden kann. Basierend auf Untersuchungen der Struktur des Bruhat-Tits-Gebäudes sowie der Struktur des Quotientenkomplexes wird in der Arbeit zunächst ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ und einem Raum $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{C}}$ spezieller endlicher \mathbb{C} -Linearkombinationen von 2-Simplizes des Quotientenkomplexes $\Gamma \backslash \mathcal{B}$, sogenannter geschlossener Flächen, hergeleitet. Zur Bestimmung einer Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{C}}$ kann auf die Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ der geschlossenen Flächen über \mathbb{Z} übergegangen werden. Jede dieser geschlossenen Flächen wird auf eine Teilsumme spezieller 2-Simplizes reduziert. Die anschließende Zerlegung dieser Teilsummen in Differenzen von 2-Simplizes des Quotientenkomplexes mit einer speziellen gemeinsamen Kante motiviert die Definition der Modulsymbole als Differenz von 2-Simplizes des Bruhat-Tits-Gebäudes, die ebenfalls eine gewisse gemeinsame Kante besitzen. Es erweist sich dabei als sinnvoll, zwei verschiedene Arten von Kanten zu betrachten. Ausgehend von diesen Überlegungen werden die Gruppen M_1 bzw. M_2 der Modulsymbole erster bzw. zweiter Art eingeführt. Da eine Basis des Raums $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ einer Basis eines gewissen \mathbb{Z} -Untermoduls der Projektion des Schnittes $M_1 \cap M_2$ auf den Quotientenkomplexen entspricht, liefert die im Anschluss erfolgende Darstellung der Gruppen M_1 bzw. M_2 durch Erzeuger und Relationen ein wichtiges Hilfsmittel zur Bestimmung des Raums $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ bzw. $\mathcal{H}_1^2(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$.

Wie auch im Fall niedrigerer Dimension können die gewonnenen Erkenntnisse zur Beschreibung von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ zur Untersuchung von Hecke-Operatoren genutzt werden. Mithilfe des zuvor hergeleiteten Isomorphismus zwischen dem Raum $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ der $\Gamma_0(N)$ -invarianten ungeordneten harmonischen 2-Koketten mit endlichem Träger modulo $\Gamma_0(N)$ und dem Raum $\mathcal{G}_{\Gamma_0(N)}^{\mathbb{C}}$ der geschlossenen Flächen über \mathbb{C} wird die Theorie der Hecke-Operatoren auf den Raum der geschlossenen Flächen übertragen. Dies ermöglicht die Bestimmung von Abbildungsmatrizen der Hecke-Operatoren auf $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ durch die Auswertung auf den geschlossenen Flächen.

Die Verfahren zur Bestimmung von Basen von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{C}}$ sowie zur Berechnung von Hecke-Operatoren wurden für den Fall $\Gamma = \Gamma_0(N)$ mit irreduziblem Polynom N in Mathematica 8 umgesetzt und finden sich als Datei in der Anlage. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt jedoch auf den theoretischen Grundlagen. Es wird daher nicht der Anspruch erhoben, dass die vorgestellten Verfahren bzw. deren praktische Umsetzung optimiert sind.

Im Anhang der Arbeit werden für verschiedene Werte q und verschiedene irreduzible Polynome N die entsprechenden durch diese Verfahren bestimmten Basen sowie Beispiele für Abbildungsmatrizen von Hecke-Operatoren aufgeführt. Durch Betrachtung genügend vieler Hecke-Operatoren gelingt es, eine Zerlegung von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ in unter Hecke-Algebra invariante Unterräume über \mathbb{Q} anzugeben.

Aufbau der Arbeit

Im ersten Kapitel werden die für den weiteren Verlauf benötigten Ergebnisse der Arbeit „Zu Bruhat-Tits-Gebäuden der $GL(3)$ über Funktionenkörpern“ [Mü] zusammengestellt und ergänzt. Nach Einführung der nötigen Notationen kann das Bruhat-Tits-Gebäude \mathcal{B} als Simplicialkomplex definiert und eine Repräsentation der Simplizes als Äquivalenzklassen von Matrizen der $GL_3(K_\infty)$ angegeben werden. Für die anschließende Betrachtung der Operation von Kongruenzuntergruppen Γ auf \mathcal{B} werden Ergebnisse der Arbeit [Mü] aufgegriffen. In dieser wurde nachgewiesen, dass ausgehend von einem Vertreter-system von $\Gamma \backslash GL_3(\mathbb{F}_q[T])$ der Quotientenkomplex $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ in endlicher Zeit algorithmisch bestimmt werden kann. Den Abschluss des Kapitels bilden Aussagen über die Struktur des Bruhat-Tits-Gebäudes \mathcal{B} und des Seitenkomplexes $\Gamma \backslash \mathcal{B}$, welche Art und Anzahl von Nachbarsimplizes verschiedener Simplizes beschreiben.

Zu Beginn des zweiten Kapitels wird ausgehend von der Arbeit [Sh] der Raum $\mathcal{H}_1^k(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ der Γ -invarianten harmonischen k -Koketten mit endlichem Träger modulo Γ definiert. Im Fall $k = \dim(\mathcal{B}) = 2$ kann jedes Element aus $\mathcal{H}_1^2(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ eindeutig mit einer Funktion auf den nicht-geordneten 2-Simplizes $\mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ identifiziert werden. Der Raum $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ dieser Funktionen wird als Menge der ungeordneten Γ -invarianten harmonischen 2-Koketten mit endlichem Träger modulo Γ bezeichnet. Mittels der in Kapitel 1 gewonnenen Strukturaussagen kann nachgewiesen werden, dass der Träger jeder Funktion φ aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ in einem Bereich $\mathcal{S}_2(\mathcal{B}_n)$ liegt. Der Unterkomplex \mathcal{B}_n ist dabei nicht von der Funktion φ , sondern allein vom Grad n des minimalen normierten Polynoms $N \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ abhängig. Weiter ist der Quotient $\Gamma \backslash \mathcal{B}_n$ endlich. Aus der Existenz dieser Obermenge des Träger jeder Funktion aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ folgt die Endlich-Dimensionalität von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$.

Die Γ -Invarianz der Funktionen aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ ermöglicht es zu Anfang des dritten Kapitels, jeder dieser Funktionen genau eine Funktion auf den 2-Simplizes $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ des Quotientenkomplexes $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ zuzuordnen. Anschließend wird jede dieser Funktionen mit genau einer Abbildung auf $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ mit vereinfachter Harmonizitätsbedingung identifiziert. Ist φ eine solche Funktion mit vereinfachter Harmonizitätsbedingung, so wird ihr eindeutig eine endliche \mathbb{C} -Linearkombination von 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ zugeordnet, indem als Koeffizient des 2-Simplex $[s]$ der Funktionswert $\varphi([s])$ verwendet wird. Diese \mathbb{C} -Linearkombinationen von Elementen aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ lassen sich als Kern einer Abbildung $\delta_{\mathbb{C}}$, welche einem 2-Simplex aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ die Summe seiner Kanten zuordnet, beschreiben und werden im weiteren Verlauf der Arbeit als Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{C}}$ der geschlossenen Flächen über \mathbb{C} bezeichnet. Die Eigenschaft, dass die Summe der an einer Kante anliegenden 2-Simplizes gleich Null ist, wird dabei Geschlossenheitsrelation genannt. Zur Bestimmung einer Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{C}}$ wird anschließend die Einschränkung von $\delta_{\mathbb{C}}$ auf die Menge $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B}_n)}$ betrachtet, deren Kern $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ als Gruppe der geschlossenen Flächen über \mathbb{Z} bezeichnet wird. Jede Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ ist zugleich eine Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{C}}$ und liefert mittels des in diesem Kapitel gewonnenen Isomorphismus zwischen $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ und $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{C}}$ eine Basis von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$.

Im ersten Abschnitt des vierten Kapitels kann durch Analyse des Aufbaus der Elemente aus $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ eine Abbildung Υ definiert werden, die jeder \mathbb{Z} -Linearkombination von 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}(\Gamma \backslash \mathcal{B}_n)$ vom Niveau \mathcal{C}_2 derart ein Element aus $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B}_n)}$ zuordnet, so

Einleitung

dass $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ im Bild von Υ enthalten ist. Die Aufgabe der Bestimmung einer Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ wird somit auf die Bestimmung einer Basis des Urbildes $\mathcal{U} = \Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}})$ zurückgeführt. Im weiteren Verlauf des Kapitels werden genau Bedingungen angegeben, unter welchen ein Element aus $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}(\Gamma \backslash \mathcal{B}_n)}$ unter Υ auf eine geschlossene Fläche abgebildet wird. Aufgrund dieser Kriterien werden diejenigen Elemente von $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}(\Gamma \backslash \mathcal{B})}$ betrachtet, welche die Geschlossenheitsrelation an den Kanten vom Niveau \mathcal{C}_{10} bzw. \mathcal{C}_{12} erfüllen. Es zeigt sich, dass jedes dieser Elemente als Summe von Differenzen von jeweils zwei Simplizes mit gemeinsamer Kante vom Niveau \mathcal{C}_{10} bzw. \mathcal{C}_{12} darstellbar ist. Dies motiviert die Untersuchung der Gruppe M_1 bzw. M_2 der Summe von Differenzen von 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ mit gemeinsamer Kante vom Niveau \mathcal{C}_{10} bzw. \mathcal{C}_{12} , den sogenannten Modulsymbolen, sowie der größten unter Γ invariante Quotienten M_1^Γ bzw. M_2^Γ von M_1 bzw. M_2 . Die Projektion dieser Quotienten auf den Quotientengraphen entsprechen gerade der Menge der Elemente aus $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}(\Gamma \backslash \mathcal{B}_n)}$, die an den Kanten \mathcal{C}_{10} bzw. \mathcal{C}_{12} der Geschlossenheitsrelation genügen. Die Quotienten M_1^Γ bzw. M_2^Γ werden anschließend durch die Gruppe $\mathbb{Z}[\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])]$ modulo gewisser Relationen repräsentiert. Abschließend werden die Resultate des Abschnittes für den Fall $\Gamma = \Gamma_0(N)$ aufgeführt.

Nachdem im vorigen Kapitel die Bestimmung des Urbildes \mathcal{U} theoretisch behandelt wurde, wird im fünften Kapitel erläutert, wie ausgehend von einem Vertretersystem von $\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ algorithmisch in endlich vielen Schritten eine Basis der Gruppe \mathcal{U} berechnet werden kann. Hierbei wird auf die programmiertechnische Umsetzung eingegangen und einzelne Zwischenschritte werden an einem Beispiel illustriert.

Im sechsten Kapitel wird der Raum $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ mittels des Petersson-Skalarproduktes zu einem unitären Raum ergänzt. Auf diesem Raum werden anschließend spezielle Endomorphismen, sogenannte Doppelnebenklassenoperatoren, auf $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ eingeführt und ihre Adjungierten bezüglich des Petersson-Skalarproduktes bestimmt. Die im Kapitel 3 nachgewiesene Dualität zwischen $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ und $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{C}}$ ermöglicht es, das Konzept der Doppelnebenklassenoperatoren auf die Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{C}}$ der geschlossenen Flächen zu übertragen. Im Anschluss wird für den Fall $\Gamma = \Gamma_0(N)$ eine von speziellen Doppelnebenklassenoperatoren erzeugte \mathbb{C} -Algebra, die Hecke-Algebra, betrachtet, deren Elemente als Hecke-Operatoren bezeichnet werden. Neben dem Nachweis der Kommutativität der Hecke-Algebra wird gezeigt, dass die Adjungierte jedes Hecke-Operators wieder ein Element der Hecke-Algebra ist. Folglich ist jeder Hecke-Operator normal.

Gegenstand des siebten Kapitels ist die praktische Bestimmung von Hecke-Operatoren für den Fall irreduzibler Polynome $N \in \mathbb{F}_q[T]$. Ausgehend von einer Basis $B_{\mathcal{U}}$ des Urbildes \mathcal{U} kann in endlich vielen Schritten eine Abbildungsmatrix des gewählten Hecke-Operators bezüglich der zur Basis $B_{\mathcal{U}}$ gehörenden Basis $\Upsilon(B_{\mathcal{U}})$ von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ berechnet werden. Zum Abschluss wird das in Kapitel 5 verwendete Beispiel fortgesetzt.

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Erstellung dieser Arbeit auf verschiedenste Art und Weise unterstützt haben.

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. Dr. Hans-Georg Rück für die hervorragende Betreuung. Er hat mir stets geholfen, die Dinge noch einmal aus einer anderen Perspektive zu betrachten und nie das große Ganze aus den Augen zu verlieren.

Weiter möchte ich mich bei all meinen Kollegen für die angenehme Arbeitsatmosphäre bedanken. Ein besonderer Dank gilt hierbei Dominik Wulf, Michael Schweinfurter, Matthias Fetzner und Frank Quedenfeld, die mir mit Ihren Korrekturen und Anregungen und auch sonst eine große Hilfe waren.

Zu guter Letzt möchte ich herzlichst meiner Familie und meinen Freunden für die stete Unterstützung danken.

1. Das Bruhat-Tits-Gebäude

Das erste Kapitel widmet sich der Definition und Struktur des Bruhat-Tits-Gebäudes, dessen Beschreibung durch Äquivalenzklassen von Matrizen, sowie dessen Verhalten unter Operation gewisser Untergruppen der $GL_3(\mathbb{F}_q[T])$. In weiten Teilen beruht dieser Abschnitt auf den Erkenntnissen von [Geb] sowie meiner 2010 verfassten Diplomarbeit „Zu Bruhat-Tits-Gebäuden der $GL(3)$ über Funktionenkörpern“ [Mü]. An einigen Stellen wurden die Aussagen ergänzt.

1.1 Definition des Bruhat-Tits-Gebäudes

Wir beginnen mit einigen Notationen. Sei p eine Primzahl und

$$k := \mathbb{F}_q$$

der Körper mit $q = p^n$ Elementen und Charakteristik p . Weiter sei

$$K := \text{Quot}(\mathbb{F}_q[T])$$

der zum Polynomring über \mathbb{F}_q gehörende Quotientenkörper.

Auf diesem definieren wir durch

$$\begin{aligned} v_\infty : K &\rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ \frac{f}{g} &\mapsto \deg_T(g) - \deg_T(f) \end{aligned}$$

die zur Stelle ∞ gehörende normierte Bewertung. Als Primelement wählen wir $\frac{1}{T}$, welches wir zukünftig mit

$$\pi_\infty := \frac{1}{T}$$

bezeichnen werden. Die Kompletterung von K bezüglich dieser Bewertung ist durch

$$K_\infty := \mathbb{F}_q((\pi_\infty))$$

gegeben.

Mit

$$\mathcal{O}_\infty := \{x \in K_\infty \mid v_\infty(x) \geq 0\} = \mathbb{F}_q[[\pi_\infty]]$$

1. Das Bruhat-Tits-Gebäude

bezeichnen wir den zugehörigen Bewertungsring, dessen Einheitengruppe

$$\mathcal{O}_\infty^\times = \{x \in \mathcal{O}_\infty \mid v_\infty(x) = 0\}$$

ist.

In der folgenden Definition betrachten wir freie \mathcal{O}_∞ -Moduln vom Rang $r \in \mathbb{N}$.

Definition 1.1 Sei (b_1, \dots, b_r) eine Basis des K_∞^r . Dann heißt der freie \mathcal{O}_∞ -Modul

$$\langle b_1, \dots, b_r \rangle_{\mathcal{O}_\infty} = b_1 \mathcal{O}_\infty \oplus \dots \oplus b_r \mathcal{O}_\infty$$

Gitter in K_∞^r .

Auf der Menge der Gitter können wir eine Operation von K_∞^\times betrachten. Für ein Gitter $L = \langle b_1, \dots, b_r \rangle_{\mathcal{O}_\infty}$ und ein Element $x \in K_\infty^\times$ sei hierzu

$$xL := \langle xb_1, \dots, xb_r \rangle_{\mathcal{O}_\infty}.$$

Die folgende Definition beschäftigt sich mit den unter dieser Operation auftretenden Äquivalenzen.

Definition 1.2 Zwei Gitter L_1 und L_2 heißen äquivalent, wenn ein $x \in K_\infty^\times$ existiert mit

$$xL_1 = L_2.$$

Die Äquivalenzklasse eines Gitters L unter der Operation von K_∞^\times heißt Gitterklasse von L und wird mit

$$[L] := \{xL \mid x \in K_\infty^\times\}$$

bezeichnet.

Bevor wir das Bruhat-Tits-Gebäude einführen können, benötigen wir noch den Begriff des Simplizialkomplexes.

Definition 1.3 Ein Simplizialkomplex $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$ besteht aus einer Menge \mathcal{V} sowie aus einer Menge \mathcal{S} von endlichen nicht-leeren Teilmengen von \mathcal{V} , so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Jede einelementige Teilmenge aus \mathcal{V} gehört zu \mathcal{S} .
- (ii) Falls $s \in \mathcal{S}$ und $t \subseteq s$ eine nicht-leere Teilmenge von s ist, so gilt $t \in \mathcal{S}$.

Die Elemente aus \mathcal{V} heißen Knoten, die Elemente aus \mathcal{S} heißen Simplizes.

1.1 Definition des Bruhat-Tits-Gebäudes

Die Knotenmenge eines Simplicialkomplexes \mathcal{D} werden wir im weiteren Verlauf der Arbeit mit $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ sowie die Simplexmenge mit $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ bezeichnen.

Die in einem Simplicialkomplex enthaltenen Simplizes können durch ihre Mächtigkeit kategorisiert und so zusammengefasst werden. Dies ermöglicht es, einen Begriff der Dimension für Simplicialkomplexe zu definieren.

Definition 1.4 Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$ ein Simplicialkomplex und s ein Simplex aus \mathcal{D} . Die Dimension von s ist definiert durch

$$\dim(s) := |s| - 1.$$

Simplizes mit Dimension i heißen i -Simplizes und werden in der Menge $\mathcal{S}_i(\mathcal{D})$ zusammengefasst.

Das Supremum der Dimensionen aller Simplizes aus \mathcal{D}

$$\dim(\mathcal{D}) := \sup \{ \dim(s) \mid s \in \mathcal{S}(\mathcal{D}) \}$$

definiert die Dimension des Simplicialkomplexes \mathcal{D} .

Simplizes der Dimension 1 werden im Weiteren auch als Kanten bezeichnet.

Es wurden nun alle benötigten Begriffe eingeführt, um das Bruhat-Tits-Gebäude der $\mathrm{PGL}_r(K_\infty)$ zu definieren.

Definition 1.5 Sei $r \in \mathbb{N}$. Der Simplicialkomplex $\mathcal{B} = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$ mit der Knotenmenge

$$\mathcal{V} = \{ [L] \mid L \text{ } \mathcal{O}_\infty\text{-Gitter in } K_\infty^r \}$$

und der Simplexmenge

$$\mathcal{S} = \left\{ \{ [L_0], \dots, [L_k] \} \mid \text{für } i \in \{0, \dots, k\} \exists \tilde{L}_i \in [L_i] : \tilde{L}_0 \supseteq \tilde{L}_1 \supseteq \dots \supseteq \tilde{L}_k \supseteq \pi_\infty \tilde{L}_0 \right\}$$

heißt Bruhat-Tits-Gebäude der $\mathrm{PGL}_r(K_\infty)$.

Für das Bruhat-Tits-Gebäude \mathcal{B} der $\mathrm{PGL}_r(K_\infty)$ lässt sich leicht nachweisen, dass jeder Simplex aus $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ maximal Dimension $r - 1$ besitzt. Es gilt somit $\dim(\mathcal{B}) = r - 1$. Daher nennen wir \mathcal{B} auch Bruhat-Tits-Gebäude der Dimension $r - 1$.

Betrachten wir die Definition der Simplizes in $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ genauer, so erkennen wir, dass durch die Inklusionskette

$$\tilde{L}_0 \supseteq \tilde{L}_1 \supseteq \dots \supseteq \tilde{L}_k \supseteq \pi_\infty \tilde{L}_0$$

bereits eine gewisse Anordnung der Gitterklassen eines Simplex gegeben ist. Da jedoch aus dieser Inklusionskette für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ die Inklusionen

$$\tilde{L}_i \supseteq \dots \supseteq \tilde{L}_k \supseteq \pi_\infty \tilde{L}_0 \supseteq \dots \supseteq \pi_\infty \tilde{L}_i$$

folgen, ist diese nicht eindeutig. Erst die Auswahl der ersten Gitterklasse führt zu einer eindeutigen Anordnung der Knoten. Diese Überlegungen führen uns zu der Definition der sogenannten markierten Simplizes, welche im Gegensatz zu den bisher betrachteten Simplizes nicht als einfache Knotenmengen sondern als Tupel aufgefasst werden.

1. Das Bruhat-Tits-Gebäude

Definition 1.6 Seien L_0, \dots, L_k \mathcal{O}_∞ -Gitter mit $L_0 \supsetneq \dots \supsetneq L_k \supsetneq \pi_\infty L_0$. Dann heißt das Tupel $([L_0], \dots, [L_k])$ markierter k -Simplex in \mathcal{B} . Die Menge der markierten k -Simplizes des Bruhat-Tits-Gebäudes bezeichnen wir mit $\mathcal{S}_k^m(\mathcal{B})$.

Die markierten Simplizes gleicher Dimension lassen sich durch die Dimension der Quotienten der in der Inklusionskette auftretenden Gitter weiter klassifizieren. Diese Einteilung ist Bestandteil der nächsten Definition und wird im nächsten Kapitel zur Definition der uns interessierenden Funktionen benötigt.

Definition 1.7 Seien L_0, \dots, L_k \mathcal{O}_∞ -Gitter mit $L_0 \supsetneq L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_k \supsetneq \pi_\infty L_0$. Der Typus des markierten Simplex $s = ([L_0], \dots, [L_k])$ ist definiert durch

$$\text{Typus}(s) = (\dim(L_0/L_1), \dots, \dim(L_k/\pi_\infty L_0)).$$

Die Menge der markierten Simplizes mit Dimension i mit Typus (d_1, \dots, d_i) bezeichnen wir mit $\mathcal{S}_i^{(d_1, \dots, d_i)}(\mathcal{B})$.

Für die Summe der Elemente des Typus eines Simplex $s = ([L_0], \dots, [L_k])$ ergibt sich

$$\dim(L_0/L_1) + \dots + \dim(L_k/\pi_\infty L_0) = r.$$

Somit besitzt jeder Knoten den Typus (r) sowie jeder r -Simplex den Typus $(1, \dots, 1)$.

1.2 Beschreibung von \mathcal{B} durch Äquivalenzklassen von Matrizen

Das Hauptaugenmerk der Arbeit liegt auf dem Bruhat-Tits-Gebäude der Dimension 2. Für den Rest des Kapitels bezeichne daher \mathcal{B} das Bruhat-Tits-Gebäude der $\text{PGL}_3(K_\infty)$. Zu Beginn dieses Abschnittes führen wir einige Standardobjekte von \mathcal{B} ein.

Definition 1.8 Sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis des K_∞^3 . Es seien

- (i) $\mathcal{C}_{00} := [(e_1, e_2, e_3)_{\mathcal{O}_\infty}]$ der nullte Standardknoten,
- (ii) $\mathcal{C}_{01} := [(e_1, e_2, \pi_\infty e_3)_{\mathcal{O}_\infty}]$ der erste Standardknoten,
- (iii) $\mathcal{C}_{02} := [(e_1, \pi_\infty e_2, \pi_\infty e_3)_{\mathcal{O}_\infty}]$ der zweite Standardknoten,
- (iv) $\mathcal{C}_{10} := \{\mathcal{C}_{00}, \mathcal{C}_{01}\}$, $\mathcal{C}_{11} := \{\mathcal{C}_{01}, \mathcal{C}_{02}\}$, $\mathcal{C}_{12} := \{\mathcal{C}_{02}, \mathcal{C}_{00}\}$ die Standardkanten,
- (v) $\mathcal{C}_2 := \{\mathcal{C}_{00}, \mathcal{C}_{01}, \mathcal{C}_{02}\}$ der Standard-2-Simplex,
- (vi) $\mathcal{C}_2^m := (\mathcal{C}_{00}, \mathcal{C}_{01}, \mathcal{C}_{02})$ der markierte Standard-2-Simplex.

1.2 Beschreibung von \mathcal{B} durch Äquivalenzklassen von Matrizen

Ziel dieses Abschnittes ist die Angabe einer Bijektion zwischen den Mengen $\mathcal{S}_i(\mathcal{B})$ bzw. $\mathcal{S}_i^m(\mathcal{B})$ und Äquivalenzklassen von Matrizen der $\mathrm{GL}_3(K_\infty)$. Hierzu führen wir zunächst eine Abbildung ein, welche jeder Matrix aus $\mathrm{GL}_3(K_\infty)$ einen markierten 2-Simplex zuordnet.

Definition 1.9 *Wir definieren die Abbildung*

$$\Theta_2^m : \mathrm{GL}_3(K_\infty) \rightarrow \mathcal{S}_2^m(\mathcal{B})$$

durch

$$\Theta_2^m(B) := ([\langle b_1, b_2, b_3 \rangle_{\mathcal{O}_\infty}], [\langle b_1, b_2, \pi_\infty b_3 \rangle_{\mathcal{O}_\infty}], [\langle b_1, \pi_\infty b_2, \pi_\infty b_3 \rangle_{\mathcal{O}_\infty}]),$$

wobei b_1, b_2 und b_3 die Spalten von B bezeichnen.

Bilden wir unter Θ_2^m die Einheitsmatrix ab, so erhalten wir den markierten Standard-simplex \mathcal{C}_2^m aus Definition 1.8.

Analog können wir für $i \in \{0, 1, 2\}$ Abbildungen

$$\Theta_i : \mathrm{GL}_3(K_\infty) \rightarrow \mathcal{S}_i(\mathcal{B})$$

eingeführen, welche jeweils der Einheitsmatrix den entsprechenden Standard-Simplex \mathcal{C}_{00} , \mathcal{C}_{10} bzw. \mathcal{C}_2 zuordnen.

Das nächste Lemma zeigt, dass jeder Simplex aus $\mathcal{S}_2^m(\mathcal{B})$ mittels Θ_2^m durch eine Matrix aus $\mathrm{GL}_3(K_\infty)$ beschrieben werden kann. Eine solche Matrix werden wir zukünftig als Basis des Simplex bezeichnen.

Lemma 1.10 *Die Abbildung Θ_2^m ist surjektiv.*

Beweis: Siehe [Mü].

□

Da jeder Knoten sowie jede Kante als Seite eines markierten 2-Simplex auftritt, lässt sich dieses Ergebnis auf die Abbildungen Θ_0, Θ_1 und Θ_2 übertragen.

Wir haben bisher surjektive Zuordnungen zwischen Matrizen der $\mathrm{GL}_3(K_\infty)$ und den Simplizes des Bruhat-Tits-Gebäudes beschrieben, welche jedoch nicht injektiv sind. Um festzustellen, welche Matrizen auf gleiche Simplizes abgebildet werden, betrachten wir die Operation der $\mathrm{GL}_3(K_\infty)$ auf den Simplizes.

Sei L ein \mathcal{O}_∞ -Gitter mit Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ und $g \in \mathrm{GL}_3(K_\infty)$. Dann sei

$$gL = g\langle b_1, b_2, b_3 \rangle_{\mathcal{O}_\infty} := \langle gb_1, gb_2, gb_3 \rangle_{\mathcal{O}_\infty}$$

das Gitter mit Basis gB . Durch

$$g \{[L_0], \dots, [L_k]\} := \{[gL_0], \dots, [gL_k]\}$$

1. Das Bruhat-Tits-Gebäude

führen wir die Operation auf der Menge der Simplizes fort.

Für jede Abbildung $\Theta \in \{\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_2^m\}$ sowie Matrizen $g, B \in \mathrm{GL}_3(K_\infty)$ gilt die Gleichheit

$$g\Theta(B) = \Theta(gB).$$

Aus der Surjektivität von Θ folgt daher die Transitivität der Operation von $\mathrm{GL}_3(K_\infty)$ auf $\mathcal{S}_i(\mathcal{B})$ bzw. $\mathcal{S}_2^m(\mathcal{B})$. Aufgrund der Bahngleichung folgt somit die Isomorphie

$$\mathrm{GL}_3(K_\infty)/\mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(K_\infty)}(\Theta\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)) \simeq \mathrm{Im}(\Theta).$$

Die entsprechenden Fixgruppen der Standardsimplizes wurden in [Geb] bzw. [Mü] bestimmt. Wir möchten jedoch an dieser Stelle einige der in den Fixgruppen auftretenden Gruppen und Elemente erklären sowie auf den Zusammenhang der Fixgruppen der Standard-Simplizes \mathcal{C}_2 und \mathcal{C}_2^m eingehen.

Die in den folgenden Definitionen genannten Gruppen sind Bestandteile der in [Mü] bestimmten Fixgruppen des markierten Standard-2-Simplex bzw. der Standardkante \mathcal{C}_{10} .

Definition 1.11

(i) Die Gruppe

$$I := \left\{ M \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) \mid M \equiv \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \pmod{\pi_\infty} \right\}$$

heißt *Standard-Iwahorigruppe*.

(ii) Die Gruppe

$$P_1 := \left\{ M \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) \mid M \equiv \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \pmod{\pi_\infty} \right\}$$

heißt *erste Standard-Parahorigruppe*.

Weiter existiert eine zweite Standard-Parahorigruppe, welche ein Bestandteil der Fixgruppe der zweiten Standardkante ist. Diese werden wir jedoch im Weiteren nicht benötigen.

Wir möchten an dieser Stelle zudem den Zusammenhang der Fixgruppe des markierten Standard-2-Simplex \mathcal{C}_2^m und der Fixgruppe des ungeordneten Standard-2-Simplex \mathcal{C}_2 erläutern. Hierfür betrachten wir, wie aus einer Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ eines ungeordneten 2-Simplex s Basen der drei markierten 2-Simplizes s_1, s_2 und s_3 mit gleicher Knotenmenge gewonnen werden können. Diese Simplizes sind gegeben durch

$$s_1 = ([\langle b_1, b_2, b_3 \rangle], [\langle b_1, b_2, \pi_\infty b_3 \rangle], [\langle b_1, \pi_\infty b_2, \pi_\infty b_3 \rangle]),$$

1.2 Beschreibung von \mathcal{B} durch Äquivalenzklassen von Matrizen

$$\begin{aligned}
s_2 &= ([\langle b_1, b_2, \pi_\infty b_3 \rangle], [\langle b_1, \pi_\infty b_2, \pi_\infty b_3 \rangle], [\langle b_1, b_2, b_3 \rangle]), \\
&= ([\langle \pi_\infty b_3, b_1, b_2 \rangle], [\langle \pi_\infty b_3, b_1, \pi_\infty b_2 \rangle], [\langle \pi_\infty b_3, \pi_\infty b_1, \pi_\infty b_2 \rangle]), \\
s_3 &= ([\langle b_1, \pi_\infty b_2, \pi_\infty b_3 \rangle], [\langle b_1, b_2, b_3 \rangle], [\langle b_1, b_2, \pi_\infty b_3 \rangle]) \\
&= ([\langle \pi_\infty b_2, \pi_\infty b_3, b_1 \rangle], [\langle \pi_\infty b_2, \pi_\infty b_3, \pi_\infty b_1 \rangle], [\langle \pi_\infty b_2, \pi_\infty^2 b_3, \pi_\infty b_1 \rangle]).
\end{aligned}$$

Für

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pi_\infty & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzen s_1, s_2 bzw. s_3 die Basen B, BR bzw. BR^2 . Da $R^3 = \pi_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt, erhalten wir durch eine weitere Multiplikation der Matrix R die Matrix $B\pi_\infty$, welche wieder den markierten 2-Simplex s_1 ergibt. Somit überführt die Matrix R die Basen markierter 2-Simplizes mit gleicher Knotenmenge ineinander. Mithilfe dieser Überlegungen lässt sich aus $\text{Fix}_{\text{GL}_3(K_\infty)}(\mathcal{C}_2^m) = IK_\infty^\times$ die Gleichheit $\text{Fix}_{\text{GL}_3(K_\infty)}(\mathcal{C}_2) = \langle R \rangle IK_\infty^\times$ folgern.

Die in [Mü] gewonnene Kenntnis der Fixgruppen führt uns zu der zuvor erwähnten Abbildung zwischen Matrizenklassen und Simplizes.

Satz 1.12 *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned}
\text{GL}_3(K_\infty) / \text{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) K_\infty^\times &\rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{B}) \\
g \cdot \text{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) K_\infty^\times &\mapsto g \cdot \mathcal{C}_{00},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{GL}_3(K_\infty) / P_1 \cdot K_\infty^\times &\rightarrow \mathcal{S}_1(\mathcal{B}) \\
g \cdot P_1 K_\infty^\times &\mapsto g \cdot \mathcal{C}_{10},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{GL}_3(K_\infty) / \langle R \rangle IK_\infty^\times &\rightarrow \mathcal{S}_2(\mathcal{B}) \\
g \cdot \langle R \rangle IK_\infty^\times &\mapsto g \cdot \mathcal{C}_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{GL}_3(K_\infty) / IK_\infty^\times &\rightarrow \mathcal{S}_2^m(\mathcal{B}) \\
g \cdot IK_\infty^\times &\mapsto g \cdot \mathcal{C}_2^m.
\end{aligned}$$

sind bijektiv.

Beweis: Siehe [Mü].

□

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir Simplizes teils nur durch die entsprechenden Matrizenklassen bzw. Vertreter angeben. Vertretersysteme dieser Äquivalenzklassen sind in der zu Anfang des Kapitels erwähnten Arbeit [Mü] zu finden.

Auch die markierten Kanten lassen sich durch Äquivalenzklassen von Matrizen beschreiben, jedoch muss hierbei nach dem Typus unterschieden werden. Dies ist nötig,

1. Das Bruhat-Tits-Gebäude

da die Operation der $\mathrm{GL}_3(K_\infty)$ den Typus eines Simplex unverändert lässt und somit die Gruppe nicht transitiv auf der Menge der markierten Kanten operiert. Da jeder ungeordnete Kante aus $\mathcal{S}_1(\mathcal{B})$ eindeutig sowohl eine markierte Kante mit Typus (1, 2) als durch Vertauschen der Knoten auch eine Kante mit Typus (2, 1) zugeordnet werden kann, steht $\mathcal{S}_1(\mathcal{B})$ sowohl zu $\mathcal{S}_1^{(1,2)}(\mathcal{B})$ als auch zu $\mathcal{S}_1^{(2,1)}(\mathcal{B})$ in Bijektion.

Satz 1.13 *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_3(K_\infty)/P_1 \cdot K_\infty^\times &\rightarrow \mathcal{S}_1^{(1,2)}(\mathcal{B}) \\ g \cdot P_1 \cdot K_\infty^\times &\mapsto g \cdot (\mathcal{C}_{00}, \mathcal{C}_{01}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_3(K_\infty)/P_1 \cdot K_\infty^\times &\rightarrow \mathcal{S}_1^{(2,1)}(\mathcal{B}) \\ g \cdot P_1 \cdot K_\infty^\times &\mapsto g \cdot (\mathcal{C}_{01}, \mathcal{C}_{00}) \end{aligned}$$

sind bijektiv.

Beweis: Siehe [Mü]. □

1.3 Die Operation von Kongruenzuntergruppen

Wie bereits zu Beginn erwähnt, wurde auch das Verhalten des Bruhat-Tits-Gebäudes unter Operation gewisser Gruppen in [Mü] untersucht, den sogenannten Kongruenzuntergruppen, welche in der folgenden Definition erklärt werden.

Definition 1.14 *Sei N ein Polynom in $\mathbb{F}_q[T]$. Die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ sei der Kern der komponentenweisen Reduktionsabbildung*

$$\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \longrightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]/(N))$$

und somit

$$\Gamma(N) = \left\{ \gamma \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \mid \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}.$$

Eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$, die $\Gamma(N)$ für ein $N \in \mathbb{F}_q[T]$ enthält, heißt Kongruenzuntergruppe.

Im späteren Verlauf der Arbeit werden wir spezielle Kongruenzuntergruppen der Form

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \gamma \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \mid \gamma \equiv \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

mit $a, b, c, e, f, i \in \mathbb{F}_q[T]$ betrachten.

1.3 Die Operation von Kongruenzuntergruppen

Die Kongruenzuntergruppen sollen hierbei, wie im vorigen Abschnitt für $\mathrm{GL}_3(K_\infty)$ erklärt, durch Linksmultiplikation operieren. Die Menge der Äquivalenzklassen der Simplizes unter Operation einer Kongruenzuntergruppe bezeichnen wir zukünftig mit $\Gamma \backslash \mathcal{B}$. Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes werden wir diese Äquivalenz genauer untersuchen.

In [Geb] wurde zunächst die größtmögliche Kongruenzuntergruppe, die $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$, betrachtet. Es zeigt sich, dass der Quotient $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \backslash \mathcal{B}$ in Bijektion zu einem Unterkomplex von \mathcal{B} steht, der sogenannten Standardweylkammer, welche im Folgenden definiert wird.

Definition 1.15 *Der bezüglich Inklusion maximale Unterkomplex \mathcal{W} von \mathcal{B} mit*

$$\mathcal{V}(\mathcal{W}) = \left\{ [j, k] := [\langle e_1, \pi_\infty^j e_2, \pi_\infty^k e_3 \rangle_{\mathcal{O}_\infty}] \mid j, k \in \mathbb{N}_0, j \leq k \right\}$$

heißt Standardweylkammer.

Zu einer Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ bezeichnen wir analog den maximalen Unterkomplex \mathcal{W}_B mit

$$\mathcal{V}(\mathcal{W}_B) := \left\{ [\langle b_1, \pi_\infty^j b_2, \pi_\infty^k b_3 \rangle_{\mathcal{O}_\infty}] \mid j, k \in \mathbb{N}_0, j \leq k \right\}$$

als Weylkammer zu B .

Nach voriger Argumentation gilt die Gleichheit

$$\mathcal{S}(\mathcal{B}) = \bigcup_{g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])} g\mathcal{S}(\mathcal{W})$$

mit $g\mathcal{S}(\mathcal{W}) := \{gw \mid w \in \mathcal{S}(\mathcal{W})\}$. Das Bruhat-Tits-Gebäude entspricht also den Überlagerungen der Weylkammern $g\mathcal{W} := (g\mathcal{V}(\mathcal{W}), g\mathcal{S}(\mathcal{W}))$.

Wir werden daher im Folgenden vermehrt die Standardweylkammer betrachten. Beginnen werden wir mit der Einführung einer Quasiordnung auf den Simplizes von \mathcal{W} . Mittels der natürlichen Ordnung auf \mathbb{N}_0 können wir zunächst eine Halbordnung auf den Knoten der Standardweylkammer \mathcal{W} definieren.

Definition 1.16 *Seien $[j, k], [\tilde{j}, \tilde{k}] \in \mathcal{V}(\mathcal{W})$ zwei 0-Simplizes. Gilt $[j, k] = [\tilde{j}, \tilde{k}]$, so heißen die Knoten $[j, k]$ und $[\tilde{j}, \tilde{k}]$ gleich bezüglich \mathcal{W} . Sind $[j, k]$ und $[\tilde{j}, \tilde{k}]$ verschieden, so heißt der Knoten $[j, k]$ kleiner bezüglich \mathcal{W} als $[\tilde{j}, \tilde{k}]$, falls $j \leq \tilde{j}, k \leq \tilde{k}$ und $\tilde{j} - j \leq \tilde{k} - k$ gilt. Wir schreiben $[j, k] <_{\mathcal{W}} [\tilde{j}, \tilde{k}]$.*

Wir möchten diese Ordnung auf Simplizes aus \mathcal{W} mit höherer Dimension erweitern. Hierfür definieren wir für einen Knoten $[j, k] \in \mathcal{V}(\mathcal{W})$ die Menge

$$\mathcal{W}_{\geq}([j, k]) := \left\{ [\tilde{j}, \tilde{k}] \in \mathcal{V}(\mathcal{W}) \mid [j, k] \leq_{\mathcal{W}} [\tilde{j}, \tilde{k}] \right\}$$

1. Das Bruhat-Tits-Gebäude

der bezüglich \mathcal{W} größergleichen Knoten. Durch

$$\mathcal{W}_{\geq}(\{v_0, \dots, v_r\}) := \bigcup_{i=0}^r \mathcal{W}_{\geq}(v_i)$$

können wir auch für Simplexes höherer Dimension die Menge der bezüglich \mathcal{W} größergleichen Knoten definieren. Wir veranschaulichen die Menge $\mathcal{W}_{\geq}(t)$ am Beispiel der Kante $t = \{[1, 4], [2, 4]\}$.

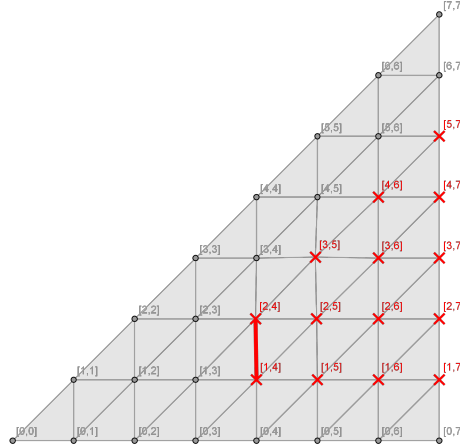


Abb. 1.1: Ausschnitt von \mathcal{W} mit Kennzeichnung der Menge $\mathcal{W}_{\geq}(\{[1, 4], [2, 4]\})$

Diese Menge ermöglicht uns die Übertragung der Halbordnung $\leq_{\mathcal{W}}$ auf alle ungeordneten Simplexes der Standardweylkammer.

Definition 1.17 Seien $s, \tilde{s} \in \mathcal{S}(\mathcal{W})$. Der Simplex s heißt kleiner bezüglich \mathcal{W} als \tilde{s} , wenn

$$\mathcal{W}_{\geq}(\tilde{s}) \subsetneq \mathcal{W}_{\geq}(s)$$

gilt. Wir schreiben dann $s <_{\mathcal{W}} \tilde{s}$. Gilt

$$\mathcal{W}_{\geq}(\tilde{s}) = \mathcal{W}_{\geq}(s),$$

so sagen wir, dass s und \tilde{s} bezüglich \mathcal{W} gleich sind.

Im Gegensatz zur zuvor definierten Halbordnung auf den Knoten von \mathcal{W} , handelt es sich bei der Relation $\leq_{\mathcal{W}}$ auf $\mathcal{S}(\mathcal{W})$ lediglich um eine Quasiordnung.

Nachdem wir zuvor die Operation der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ betrachtet haben, untersuchen wir im Weiteren die Operation einer beliebigen Kongruenzuntergruppe Γ . Da für $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ aus $\Gamma g_1 = \Gamma g_2$ für alle $w \in \mathcal{W}$ die Gleichheit $\Gamma g_1 w = \Gamma g_2 w$ und somit auch

$$\Gamma g_1 \mathcal{W} = \Gamma g_2 \mathcal{W}$$

1.3 Die Operation von Kongruenzuntergruppen

folgt, muss nur noch untersucht werden, welche Simplizes der Menge $\bigcup_{x \in X} x\mathcal{S}(\mathcal{W})$ für ein Vertretersystem X der Menge $\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ äquivalent sind. Im folgenden Lemma geben wir ein Vertretersystem bezüglich der Hauptkongruenzuntergruppe an.

Lemma 1.18 *Die Menge*

$$X(N) = \{A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \mid \deg(a_{ij}) < \deg(N) \text{ für } 1 \leq i, j \leq 3\}$$

ist ein vollständiges Vertretersystem der $\Gamma(N) \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$.

Beweis: Siehe [Geb].

□

Aus der Endlichkeit des Körpers \mathbb{F}_q folgt auch die Endlichkeit des Vertretersystems. Da jede Kongruenzuntergruppe eine Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ enthält, ist ein Vertretersystem bezüglich dieser Kongruenzuntergruppe in $X(N)$ enthalten und daher ebenfalls endlich. Es bleiben also nur endlich viele Überlagerungen von Weylkammern zu untersuchen.

Da Γ eine Teilmenge der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ ist, können zwei Simplizes offensichtlich nur dann modulo Γ äquivalent sein, falls sie bereits unter der Operation der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ zusammengefallen sind. Um diejenigen Simplizes zu kennzeichnen, die unter der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ äquivalent sind, führen wir den Begriff des Niveaus ein.

Definition 1.19 *Sei $w \in S(\mathcal{W})$. Ein Simplex s aus \mathcal{B} hat Niveau w , falls s in der Bahn von w unter $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ liegt. Man schreibt*

$$\text{Niveau}(s) = w.$$

Somit können nur Simplizes gleichen Niveaus unter der Operation von Γ miteinander identifiziert werden.

Der Begriff des Niveaus ermöglicht die Übertragung der zuvor definierten Quasiordnung $\leq_{\mathcal{W}}$ auf den gesamten Simplicialkomplex.

Definition 1.20 *Seien $s, \tilde{s} \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$. Wir sagen, s ist bezüglich \mathcal{W} kleiner als \tilde{s} , wenn*

$$\text{Niveau}(s) <_{\mathcal{W}} \text{Niveau}(\tilde{s})$$

gilt.

Weiter ist es uns mittels des Niveaus möglich, im nächsten Satz ein genaues Kriterium anzugeben, wann zwei Simplizes aus $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ unter der Operation von Γ äquivalent sind.

1. Das Bruhat-Tits-Gebäude

Satz 1.21 Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ und X ein Vertretersystem von $\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$. Dann sind zwei Simplizes $x_1w, x_2w \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ für $x_1, x_2 \in X$ und $w \in \mathcal{S}(\mathcal{W})$ genau dann unter Γ äquivalent, wenn ein $g \in \mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(w)$ mit $x_2gx_1^{-1} \in \Gamma$ existiert.

Beweis: Siehe [Mü]. □

Die Fixgruppen der Knoten der Standardweylkammer \mathcal{W} unter der Operation der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ wurden in [Geb] bestimmt. Die Fixgruppe eines Simplex aus \mathcal{W} unter der Operation der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ erhalten wir als Schnitt der Fixgruppen seiner Knoten.

Lemma 1.22 Sei $[j, k] \in \mathcal{V}(\mathcal{W})$. Dann gilt

$$\mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}([j, k]) = \begin{cases} \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q), & \text{falls } 0 = j = k, \\ \begin{pmatrix} * & * & \{k\} \\ * & * & \{k\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, & \text{falls } 0 = j < k, \\ \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{j\} \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, & \text{falls } 0 < j = k, \\ \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k-j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, & \text{falls } 0 < j < k, \end{cases}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} * & \{i\} & \{j\} \\ 0 & * & \{k\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

die Menge aller Matrizen in $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ bezeichnet, deren Einträge die folgenden Bedingungen erfüllen:

- * : Eintrag aus \mathbb{F}_q ,
- {i} : Eintrag aus $\mathbb{F}_q[T]$ mit Grad in T kleiner oder gleich i .

Beweis: Siehe [Geb]. □

Der vorherige Satz hat gezeigt, dass im Fall $\mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(w) \subseteq \mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\tilde{w})$ aus der Äquivalenz der Simplizes x_1w und x_2w auch immer die Äquivalenz der Simplizes $x_1\tilde{w}$ und $x_2\tilde{w}$ folgt. Dies motiviert die Einführung einer weiteren Quasiordnung auf den Simplizes.

1.3 Die Operation von Kongruenzuntergruppen

Definition 1.23 Seien $s, \tilde{s} \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$. Der Simplex s heißt kleiner bezüglich der Fixgruppe als \tilde{s} , falls

$$\text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\text{Niveau}(s)) \subsetneq \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\text{Niveau}(\tilde{s}))$$

gilt. Wir schreiben dann $s <_F \tilde{s}$. Gilt

$$\text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\text{Niveau}(s)) = \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\text{Niveau}(\tilde{s})),$$

so heißt s bezüglich der Fixgruppe gleich \tilde{s} .

Eine Untersuchung der Fixgruppen liefert erste Aussagen über die neu eingeführte Ordnung.

Lemma 1.24 Es gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Seien $s, t \in \mathcal{S}(\mathcal{W})$. Existiert zu jedem Knoten v_t von t ein Knoten v_s von s mit $v_s \leq_F v_t$, so ist s bezüglich der Fixgruppe kleiner gleich als t .
- (ii) Der Standard-2-Simplex ist kleiner bezüglich der Fixgruppe als jeder andere Simplex der Standardweylkammer.
- (iii) Jeder Simplex $s \in \mathcal{S}(\mathcal{W}) \setminus \{\mathcal{C}_{00}, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{11}, \mathcal{C}_{12}, \mathcal{C}_2\}$ ist größer bezüglich der Fixgruppe als die erste Standardkante \mathcal{C}_{11} .

Beweis: Siehe [Mü].

□

An dieser Stelle möchten wir einen Bezug zwischen der Quasiordnung \leq_F bezüglich der Fixgruppe und der zuvor eingeführten Quasiordnung $\leq_{\mathcal{W}}$ bezüglich \mathcal{W} herstellen. Hierbei werden wir feststellen, dass die Relationen auf weiten Teilen des Bruhat-Tits-Gebäudes übereinstimmen. Wir führen dafür zunächst eine Unterteilung von $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ in innere und äußere Simplexes durch. Wir beginnen hierbei mit der Standardweylkammer.

Definition 1.25 Sei $s \in \mathcal{S}(\mathcal{W})$.

- (i) Existiert ein $j \in \mathbb{N}_0$ mit $s = [0, j]$ oder $s = [j, j]$, so heißt s äußerer Knoten.
- (ii) Existiert ein $j \in \mathbb{N}_0$ mit $s = \{[0, j], [0, j + 1]\}$ oder $s = \{[j, j], [j + 1, j + 1]\}$, so nennen wir s äußere Kante.
- (iii) Erfüllt s keine der in (i) und (ii) genannten Bedingungen, so bezeichnen wir s als inneren Simplex.

Um diese Unterteilung auf das gesamte Bruhat-Tits-Gebäude zu erweitern, führen wir einen Simplex $s \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ auf sein Niveau zurück. So nennen wir einen Simplex $s \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ genau dann innerer Simplex, wenn $\text{Niveau}(s)$ ein innerer Simplex ist. Die folgende Zeichnung veranschaulicht die Unterteilung anhand der Standardweylkammer.

1.3 Die Operation von Kongruenzuntergruppen

Definition 1.28 Sei $\Gamma \leq \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ eine Kongruenzuntergruppe und X ein Vertretersystem der $\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ und seien $x_1w \in \mathcal{S}(x_1\mathcal{W}), x_2w \in \mathcal{S}(x_2\mathcal{W})$ für $x_1, x_2 \in X$. Dann heißt das Tupel (x_1w, x_2w) erstidentifizierbar (bezüglich Γ), falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Die Simplizes x_1w und x_2w sind unter Γ äquivalent.
- (ii) Es existieren keine Simplizes $x_1\tilde{w}, x_2\tilde{w}$ mit $\tilde{w} <_F w$, die unter Γ äquivalent sind.
- (iii) Es existieren keine Simplizes $x_1\tilde{w}, x_2\tilde{w}$ mit $\tilde{w} =_F w$ und $\dim(\tilde{w}) < \dim(w)$, die unter Γ äquivalent sind.

Zur Untersuchung des Verhaltens des Bruhat-Tits-Gebäudes unter Operation einer Kongruenzuntergruppe genügt es offensichtlich, die erstidentifizierbaren Tupel zu ermitteln. In [Mü] wurde nachgewiesen, dass alle erstidentifizierbaren Tupel in einem endlichen Bereich liegen, dessen Größe vom Grad des minimalen normierten Polynoms N mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ abhängig ist. Um diesen Bereich zu beschreiben, führen wir einen endlichen Unterkomplex der Standardweylkammer ein.

Definition 1.29 Sei $n \in \mathbb{N}$. Mit \mathcal{W}_n bezeichnen wir den maximalen Unterkomplex von \mathcal{W} mit

$$\mathcal{V}(\mathcal{W}_n) = \{[j, k] \mid 0 \leq j \leq k \leq j + n - 1 \text{ und } j \leq n - 1\}.$$

Wir nennen den Unterkomplex \mathcal{W}_n Standardweylkammer der Größe n .

In der folgenden Zeichnung visualisieren wir die Standardweylkammer der Größe $n = 4$.

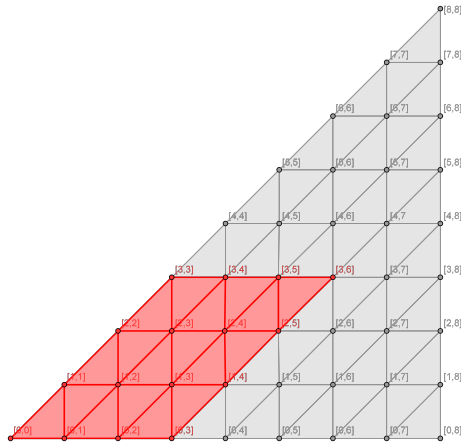


Abb. 1.3: Ausschnitt von \mathcal{W} mit Kennzeichnung der Weylkammer der Größe 4

Mittels der vorhergehenden Definition können wir den zuvor erwähnten endlichen Bereich angeben.

1. Das Bruhat-Tits-Gebäude

Satz 1.30 Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe und $N \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$. Weiter sei $n := \max\{2, \deg N\}$. Dann gilt für jedes erstidentifizierbare Tupel (x_1w, x_2w) die Inklusion

$$w \in \mathcal{S}(\mathcal{W}_n).$$

Beweis: Wir werden an dieser Stelle nur das Grundprinzip des Beweises erläutern. Genauere Ausführungen finden sich in [Mü].

Sei $w \in \mathcal{S}(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{S}(\mathcal{W}_n)$. Sind zwei Simplizes x_1w und x_2w unter der Operation von Γ äquivalent, so gibt es nach Satz 1.21 ein Element $g \in \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(w)$ mit $x_2gx_1^{-1} \in \Gamma$. Bezeichnet $\bar{g} \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ die Reduktion von g modulo N , so gilt weiterhin $x_2\bar{g}x_1^{-1} \in \Gamma$. Daher existiert ein $\tilde{w} \in \mathcal{S}(\mathcal{W}_n)$ mit $\bar{g} \in \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\tilde{w})$ und $\tilde{w} \leq_F w$. □

In [Mü] wurde die Menge der zu untersuchenden Simplizes weiter eingeschränkt. Sei n der Grad des minimalen normierten Polynoms N mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$. Dann muss nur die Äquivalenz der Simplizes überprüft werden, deren Niveau einer der folgenden Bedingungen genügt:

- (i) $w \in \{[j, k] \mid 0 \leq j \leq n-1, j \leq k \leq j+n-1\}$,
- (ii) $w \in \{[0, k], [1, k+1] \mid 0 \leq k \leq n-1\}$,
- (iii) $w \in \{[j, j], [j, j+1] \mid 0 \leq j \leq n-1\}$,
- (iv) $w \in \{[j, k], [j+1, k] \mid 0 \leq j < k \leq n-1\}$,
- (v) $w = \{[0, 0], [0, 1], [1, 1]\}$.

Wir sehen, dass 2-Simplizes nur genau dann erstidentifizierbar sein können, wenn sie Niveau \mathcal{C}_2 besitzen. Erneut kennzeichnen wir die entsprechenden Simplizes in einer Zeichnung.

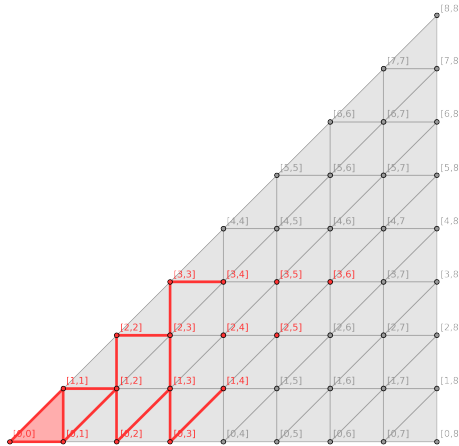


Abb. 1.4: Ausschnitt von \mathcal{W} mit Kennzeichnung der zu betrachtenden Niveaus für $n = 4$

1.3 Die Operation von Kongruenzuntergruppen

Nach vorigem Satz genügt es, zur Bestimmung des Quotienten $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ die Menge

$$\bigcup_{x \in X} x\mathcal{S}(\mathcal{W}_n)$$

zu betrachten, wobei X ein Vertretersystem der Menge $\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ bezeichne. Dieses Vertretersystem ist nach Lemma 1.18 endlich. Aus der Endlichkeit von \mathbb{F}_q folgt zudem die Endlichkeit der Fixgruppen der Simplizes aus \mathcal{W}_n . Daher kann nach Satz 1.21 die Äquivalenz zweier Simplizes gleichen Niveaus in endlich vielen Schritten getestet werden.

Insgesamt zeigen somit die bisherigen Überlegungen, dass es für eine Kongruenzuntergruppe Γ unter Angabe eines Vertretersystems der $\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ möglich ist, die Elemente von $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ algorithmisch in endlich vielen Schritten zu bestimmen.

Wir möchten im Folgenden die mathematische Struktur des Quotienten $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ beschreiben.

Der Quotient $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ besteht aus der Menge der Äquivalenzklassen der Simplizes unter der Operation der Kongruenzuntergruppe Γ . Die Äquivalenzklasse eines Simplex $s \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ werden wir hierbei mit

$$[s]_\Gamma := \Gamma s$$

bezeichnen. Ist aus dem Kontext ersichtlich, bezüglich welcher Kongruenzuntergruppe die Äquivalenz betrachtet wird, schreiben wir auch $[s]$ statt $[s]_\Gamma$.

Möchten wir den Quotienten $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ als Simplicialkomplex auffassen, so ist es naheliegend, als Knotenmenge die Menge

$$\tilde{\mathcal{V}} := \{[v] \mid v \in \mathcal{V}(\mathcal{B})\},$$

d.h. die Menge der Äquivalenzklassen der Knoten von \mathcal{B} , zu wählen. Im Allgemeinen ist jedoch die Äquivalenzklasse eines Simplex nicht gleich der Menge der Äquivalenzklassen seiner Knoten, d.h. für einen Simplex $\{v_0, \dots, v_k\} \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ kann die Ungleichheit

$$[\{v_0, \dots, v_k\}] \neq \{[v_0], \dots, [v_k]\}$$

gelten. Daher ist die Äquivalenzklasse eines Simplex im Allgemeinen keine Teilmenge von $\tilde{\mathcal{V}}$. Folglich kann $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ nicht als Simplicialkomplex mit Knotenmenge $\tilde{\mathcal{V}}$ aufgefasst werden.

Um dieses Problem zu umgehen, führen wir den Begriff des Seitenkomplexes ein.

Definition 1.31 *Ein Seitenkomplex \mathcal{D} besteht aus disjunkten Mengen $\mathcal{S}_j(\mathcal{D})$ mit $j = 0, \dots, n$ und einer Familie von Abbildungen, den sogenannten Seitenabbildungen,*

$$\Phi_j^i : \mathcal{S}_j(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{S}_{j-1}(\mathcal{D}),$$

wobei i zwischen 0 und j läuft. Die Menge $\mathcal{S}_j(\mathcal{D})$ wird Menge der j -Simplizes genannt und die Vereinigung dieser Mengen wird mit $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ bezeichnet. Ein Element $t \in \mathcal{S}_{j-1}(\mathcal{D})$ heißt Seite eines j -Simplex s , falls eine Seitenabbildung Φ_j^i mit $\Phi_j^i(s) = t$ existiert.

1. Das Bruhat-Tits-Gebäude

Das Konzept des Seitenkomplexes unterscheidet sich vom Simplizialkomplex durch die Wahl der Simplizes der Dimension größer gleich 1. Beim Simplizialkomplex dürfen diese Simplizes lediglich aus Elementen der zugrundeliegenden Knotenmenge bestehen. Dahingegen wird für die Simplizes höherer Dimension des Seitenkomplexes lediglich die Existenz einer Abbildung von ihnen auf die Simplizes niedriger Dimension gefordert. Offensichtlich ist der Begriff des Seitenkomplexes eine Verallgemeinerung des Simplizialkomplexes. Denn ist \mathcal{D} ein Simplizialkomplex, so können durch

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_j^i : \quad \mathcal{S}_j(\mathcal{D}) &\rightarrow \mathcal{S}_{j-1}(\mathcal{D}), \\ \{v_0, \dots, v_j\} &\mapsto \{v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_j\} \end{aligned}$$

entsprechende Seitenabbildungen definiert werden. Der Simplex $\{v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_j\}$ entsteht dabei aus $\{v_0, \dots, v_j\}$ durch Entfernen des Knotens v_i .

Um den Quotient $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ als Seitenkomplex zu interpretieren, müssen wir die Mengen $\mathcal{S}_j(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ sowie die Seitenabbildungen Φ_j^i festlegen.

Definition 1.32 *Wir definieren*

$$\mathcal{S}_j(\Gamma \backslash \mathcal{B}) := \{ [s] \mid s \in \mathcal{S}_j(\mathcal{B}) \}$$

sowie

$$\begin{aligned} \Phi_j^i : \quad \mathcal{S}_j(\Gamma \backslash \mathcal{B}) &\rightarrow \mathcal{S}_{j-1}(\Gamma \backslash \mathcal{B}), \\ [s] &\mapsto [\widetilde{\Phi}_j^i(s)]. \end{aligned}$$

Wir werden auch hier die Begriffe Knoten bzw. Kanten für 0- bzw. 1-Simplizes verwenden. Da unter Γ zueinander äquivalente Simplizes aus $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ stets das gleiche Niveau besitzen, können wir auch den Begriff des Niveaus durch

$$\text{Niveau}([s]) := \text{Niveau}(s)$$

fortführen. Offensichtlich sind damit auch die Relationen $\leq_{\mathcal{W}}$ sowie \leq_F auf die Simplizes des Quotientengraphen übertragbar. Weiterhin können wir mittels des Niveaus auch die Unterteilung in innere und äußere Simplizes übernehmen. Die Projektionsabbildung von $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ nach $\mathcal{S}(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ werden wir zukünftig mit π_Γ bezeichnen.

1.4 Struktur des Bruhat-Tits-Gebäudes

In diesem Abschnitt möchten wir einige Strukturaussagen für das Bruhat-Tits-Gebäude sowie den Quotientenkomplex $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ treffen. Unsere erste Aussage gibt für \mathcal{B} die Anzahl der Simplizes an einem festen Knoten bzw. an einer festen Kante an.

Lemma 1.33 *Es gelten folgende Aussagen:*

- (i) *Jeder Knoten $v \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ ist Seite von genau $2(q^2 + q + 1)$ Kanten.*
- (ii) *Jeder Knoten $v \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ ist Seite von genau $(q^2 + q + 1)(q + 1)$ 2-Simplizes.*
- (iii) *Jede Kante $s \in \mathcal{S}_1(\mathcal{B})$ ist Seite von genau $(q + 1)$ 2-Simplizes.*

Beweis: Siehe [Geb]. □

Da nach vorigem Satz jeder Knoten Seite von $2(q^2 + q + 1)$ Kanten ist, besitzt somit jeder Knoten $2(q^2 + q + 1)$ Nachbarknoten. Diese wollen wir im folgenden Lemma beschreiben.

Lemma 1.34 *Sei $g \in \mathrm{GL}_3(K_\infty)$ und sei $v \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$, derjenige Knoten, der durch die Nebenklasse $g \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) K_\infty^\times$ repräsentiert wird.*

Dann sind die Nachbarknoten von v gegeben durch $g\alpha \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) K_\infty^\times$ mit

$$\begin{aligned} \alpha \in & \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \pi_\infty & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid a, b \in \mathbb{F}_q \right\} \cup \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & c \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid c \in \mathbb{F}_q \right\} \\ \cup & \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \pi_\infty & 0 & b \\ 0 & \pi_\infty & c \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid b, c \in \mathbb{F}_q \right\} \cup \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \pi_\infty & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty \end{array} \right) \mid a \in \mathbb{F}_q \right\} \\ \cup & \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty \end{array} \right) \right\} \cup \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty \end{array} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Beweis: Siehe [KW]. □

Das vorhergehende Lemma ermöglicht es uns, die 2-Simplizes an einer festen Kante bezüglich der im letzten Abschnitt eingeführten Relation $\leq_{\mathcal{W}}$ zu untersuchen. Hierbei unterscheiden wir erneut zwischen inneren und äußeren Kanten.

Lemma 1.35 *Es gelten folgende Aussagen:*

- (i) *Ist $t \in \mathcal{S}_1(\mathcal{B})$ eine innere Kante, so ist t Seite eines 2-Simplex s mit*

$$t =_{\mathcal{W}} s$$

sowie von q 2-Simplizes s_1, \dots, s_q mit

$$s_i <_{\mathcal{W}} t$$

für $i = 1, \dots, q$.

1. Das Bruhat-Tits-Gebäude

(ii) Ist $t \in \mathcal{S}_1(\mathcal{B})$ eine äußere Kante, so ist t Seite von $q + 1$ 2-Simplizes s_1, \dots, s_{q+1} mit

$$t =_{\mathcal{W}} s_i$$

für $i = 1, \dots, q + 1$.

Beweis: Da der Quotient $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \backslash \mathcal{B}$ der Standardweylkammer entspricht, genügt es, die Aussage für die Kanten der Standardweylkammer nachzuweisen.

Zum Beweis der ersten Aussage verwenden wir Lemma 1.34, in welchem wir alle Nachbarknoten eines beliebigen Knotens aus $\mathcal{V}(\mathcal{B})$ angegeben haben. Mittels dieses Lemmas können alle an einer festen Kante von $\mathcal{S}_1(\mathcal{W})$ liegenden 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ bestimmt und die Behauptung nachgewiesen werden.

Die zweite Aussage ist trivial. □

Nachdem wir im letzten Lemma die $(q + 1)$ 2-Simplizes an einer Kante näher betrachtet haben, untersuchen wir im folgenden Lemma die Operation der Fixgruppe der Kante bezüglich der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ auf diesen anliegenden 2-Simplizes.

Lemma 1.36 *Es gelten folgende Aussagen:*

(i) Sei $t \in \mathcal{S}_1(\mathcal{B})$ eine innere Kante. Weiter sei $s \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ der 2-Simplex mit $t \subseteq s$ und $t =_{\mathcal{W}} s$. Dann lässt $\mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(t)$ den Simplex s fest und operiert transitiv auf den anderen q 2-Simplizes mit Seite t .

(ii) Sei $t \in \mathcal{S}_1(\mathcal{B})$ eine äußere Kante. Dann operiert $\mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(t)$ transitiv auf den $(q + 1)$ 2-Simplizes mit Seite t .

Beweis: Erneut ist es ausreichend, die Aussage für die Kanten der Standardweylkammer nachzuweisen. Wir werden uns im Beweis auf innere Kanten der Form $t = \{[j, k], [j, k + 1]\}$ beschränken, da die Argumentation für die übrigen Kanten analog verläuft.

Nach Lemma 1.26 folgt aus $t =_{\mathcal{W}} s$ die Relation $t =_F s$ und somit die Gleichheit

$$\mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(t) = \mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(s).$$

Hieraus folgt der erste Teil der Aussage (i).

Für den zweiten Teil der Aussage betrachten wir die Wirkung eines Elementes der Fixgruppe $\mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(t)$ auf den Simplex $s_1 = \{[j - 1, k], [j, k], [j, k + 1]\}$. Wie in Kapitel 1 erklärt, lässt sich s_1 durch einen Vertreter einer Äquivalenzklasse des Quotienten $\mathrm{GL}_3(K_\infty) / \langle R \rangle \mathrm{IK}_\infty^\times$ darstellen. Dieser Vertreter ist durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi_\infty^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix}$$

1.4 Struktur des Bruhat-Tits-Gebäudes

gegeben. Die Gruppe $\text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(t)$ lässt sich schreiben als die Menge der Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & \pi_\infty^{-j}b & \pi_\infty^{-k}c \\ 0 & e & \pi_\infty^{j-k}f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

mit $a, e, i \in \mathbb{F}_q^\times$, $b, c, f \in \mathcal{O}_\infty$ sowie $d_{\pi_\infty}(b) \leq j$, $d_{\pi_\infty}(c) \leq k$ und $d_{\pi_\infty}(f) \leq k - j$. Hierbei sei

$$d_{\pi_\infty}\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n \pi_\infty^n\right) := \max\{n \mid a_n \neq 0\}.$$

Um herauszufinden, welche Simplizes wir unter Operation der Fixgruppe $\text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(t)$ aus s_1 erhalten, betrachten wir das Produkt einer Matrix g aus $\text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(t)$ und der zu s_1 gehörenden Matrix und bestimmen einen unter der Operation der Gruppe $\langle R \rangle \text{IK}_\infty^\times$ äquivalenten Vertreter. Die Äquivalenz unter $\langle R \rangle \text{IK}_\infty^\times$ kennzeichnen wir durch das Symbol \sim . Es gilt

$$\begin{aligned} g \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi_\infty^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & \pi_\infty^{-j}b & \pi_\infty^{-k}c \\ 0 & e & \pi_\infty^{j-k}f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi_\infty^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} b & a & c \\ \pi_\infty^j e & 0 & \pi_\infty^j f \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -e^{-1}f \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} b & 1 & c - e^{-1}fb \\ \pi_\infty^j e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c + e^{-1}fb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ \pi_\infty^j e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ \pi_\infty^j e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ist $v_\infty(b) = 0$, so folgt weiter

$$\begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ \pi_\infty^j e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ \pi_\infty^j e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} be^{-1} & 1 & 0 \\ \pi_\infty^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix}.$$

Mithilfe der Überlegungen aus Kapitel 1.2 können wir den zu dieser Matrix gehörenden 2-Simplex als Knotenmenge darstellen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^j & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^j & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{k+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \pi_\infty^{-1}a & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix} \right\}$$

1. Das Bruhat-Tits-Gebäude

mit $a \in \mathbb{F}_q^\times$. Ist $v_\infty(b) > 0$, so gilt

$$\begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ \pi_\infty^j e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ \pi_\infty^j e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ -e^{-1}b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi_\infty^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall erhalten wir somit die folgende Repräsentation des 2-Simplex als Knotenmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^j & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^j & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{k+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix} \right\}.$$

Diese Rechnungen zeigen, dass wir durch Operation der Fixgruppe $\text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(t)$ auf s_1 genau q verschiedene Simplizes ungleich $s = \{[j, k], [j, k + 1], [j + 1, k + 1]\}$ mit Seite $\{[j, k], [j, k + 1]\}$ erhalten. □

Das vorangegangene Lemma ermöglicht es uns, auch für den Quotientenkomplex $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ Aussagen über die Anzahl der an einer Kante anliegenden 2-Simplizes zu treffen.

Lemma 1.37 *Es gilt:*

- (i) *Jede innere Kante $[t] \in \mathcal{S}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ ist Seite genau eines 2-Simplex $[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ mit $[t] =_{\mathcal{W}} [s]$ und Seite von höchstens q 2-Simplizes $[s_i] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ mit $[s_i] <_{\mathcal{W}} [t]$.*
- (ii) *Jede äußere Kante $[t] \in \mathcal{S}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ ist Seite von höchstens $q + 1$ 2-Simplizes $[s_i] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ mit $[t] =_{\mathcal{W}} [s_i]$.*

Beweis: Beginnen wir mit dem Beweis von Aussage (i):

Sei $[t] \in \mathcal{S}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ eine innere Kante und seien $t_1, t_2 \in [t]$. Weiter seien $s_1, s_2 \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ mit $t_1 \subseteq s_1$ bzw. $t_2 \subseteq s_2$ und $t_1 =_{\mathcal{W}} s_1$ und $t_2 =_{\mathcal{W}} s_2$. Aus der Relation $t_1 =_{\mathcal{W}} s_1$ bzw. $t_2 =_{\mathcal{W}} s_2$ folgt nach Lemma 1.26 die Relation $t_1 =_F s_1$ bzw. $t_2 =_F s_2$ und somit aus $[t_1] = [t_2]$ die Gleichheit $[s_1] = [s_2]$.

Sei weiter $s'_1 \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ mit Seite t_1 und $s'_1 <_{\mathcal{W}} t_1$. Wir wollen die Existenz eines Simplex $s'_2 <_{\mathcal{W}} t_2$ mit Seite t_2 und $[s'_1] = [s'_2]$ nachweisen.

Hierzu betrachten wir die Simplizes $\tilde{t} := \text{Niveau}(t_1)$ und $\tilde{s} := \text{Niveau}(s'_1)$ aus \mathcal{W} . Sei $g_1 \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ mit $g_1 \tilde{s} = s'_1$ und somit $g_1 \tilde{t} = t_1$ sowie $g_2 \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ mit $g_2 \tilde{t} = t_2$. Aus der Gleichheit $[t_1] = [t_2]$ ergibt sich die Existenz eines $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma g_1 \tilde{t} = g_2 \tilde{t}$. Folglich gilt die Inklusion $g_2^{-1} \gamma g_1 \in \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\tilde{t})$. Da nach Lemma 1.36 die Fixgruppe transitiv auf den an \tilde{t} anliegenden bezüglich \mathcal{W} kleineren 2-Simplizes operiert, ist $\hat{s} := g_2^{-1} \gamma g_1 \tilde{s}$ ein 2-Simplex mit Seite \tilde{t} sowie $\hat{s} <_{\mathcal{W}} \tilde{t}$. Der Simplex $s'_2 := g_2 \hat{s}$ erfüllt somit $t_2 \subseteq s'_2$, $s'_2 <_{\mathcal{W}} t_2$ sowie

$$[s'_2] = [g_2 \hat{s}] = [\gamma g_1 \tilde{s}] = [s'_1].$$

Der Beweis von Aussage (ii) verläuft analog zum Nachweis des zweiten Teiles der ersten Aussage. □

1.4 Struktur des Bruhat-Tits-Gebäudes

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass die Menge der erstidentifizierbaren Simplizes in einem Bereich endlichen Niveaus liegt. Mittels dieser Aussage sowie der Relation \leq_F können wir die Anzahl der 2-Simplizes an bestimmten inneren Kanten außerhalb dieses Bereiches exakt angeben.

Satz 1.38 Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe und $N \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$. Weiter sei $n := \max\{2, \deg(N)\}$ und $[t]$ eine innere Kante aus $\mathcal{S}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ mit

$$\begin{aligned} \text{Niveau}([t]) \in & \left\{ \{[j, k], [j, k+1]\} \mid n-1 < j \leq k \right\} \\ & \cup \left\{ \{[j, k], [j+1, k+1]\} \mid n-1 < k-j \right\} \\ & \cup \left\{ \{[j, k], [j+1, k]\} \mid n-1 \leq j < k \text{ oder } n-1 < k-j \right\}. \end{aligned}$$

Dann existiert genau ein 2-Simplex $[s_1]$ mit Seite $[t]$ und $[s_1] <_w [t]$ sowie genau ein 2-Simplex $[s_2]$ mit Seite $[t]$ mit $[t] =_w [s_2]$.

Bevor wir uns dem Beweis der Aussage zuwenden, visualisieren wir die im Satz erwähnte Kantenmenge am Beispiel. Die entsprechenden Kanten sind hierbei rot hervorgehoben. Weiterhin ist die Standardweylkammer der Größe n blau gekennzeichnet.

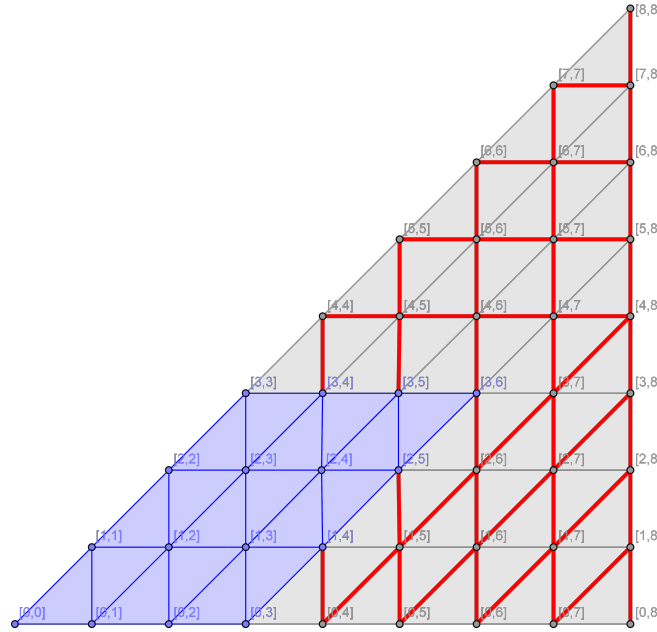


Abb. 1.5: Ausschnitt von \mathcal{W} mit Kennzeichnung der Kanten aus Satz 1.38 für $n = 4$

Beweis: Für den Beweis nutzen wir erneut die Darstellung von $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ als Überlagerungen der Weylkammern $g\mathcal{W}$ mit $g \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$.

Zu Beginn des Beweises stellen wir eine Konsequenz der Wahl der Kante $[t]$ heraus.

1. Das Bruhat-Tits-Gebäude

Sei $\tilde{t} := \text{Niveau}([t])$ und sei $\tilde{s} \in \mathcal{S}_2(\mathcal{W})$ ein 2-Simplex mit Seite \tilde{t} und $\tilde{s} <_{\mathcal{W}} \tilde{t}$. Es lässt sich leicht nachweisen, dass aufgrund der Wahl von $[t]$ für alle $s \in \mathcal{S}(\mathcal{W}_n)$ mit $s <_{\mathcal{W}} \tilde{t}$ stets $s <_{\mathcal{W}} \tilde{s}$ folgt. Da nach Wahl der Kante $[t]$ der Simplex \tilde{s} ein innerer Simplex ist, ergibt sich für jeden inneren Simplex $s \in \mathcal{S}(\mathcal{W}_n)$ mit $s <_F \tilde{t}$ auch $s <_F \tilde{s}$.

Wenden wir uns dem Fall zweier unter Γ äquivalenten Kanten mit Niveau \tilde{t} zu.

Seien $g_1, g_2 \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ mit $[g_1\tilde{t}] = [g_2\tilde{t}]$. Wie in Beweis zu Satz 1.30 kann die Existenz eines inneren Simplex $s \in \mathcal{S}(\mathcal{W}_n)$ mit $s <_F \tilde{t}$ und $[g_1s] = [g_2s]$ nachgewiesen werden. Nach Wahl von $[t]$ folgt aus $s <_F \tilde{t}$ die Relation $s <_F \tilde{s}$ und somit die Äquivalenz der Simplexes $g_1\tilde{s}$ und $g_2\tilde{s}$ unter der Operation der Kongruenzuntergruppe Γ .

Der zweite Teil der Aussage wurde bereits in Lemma 1.37 bewiesen.

□

Zum Abschluss dieses Kapitels möchten wir die vorangegangenen Aussagen bezüglich des Quotienten $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ an einem Beispiel veranschaulichen. Hierfür stellen wir einen Ausschnitt des Quotientenkomplexes $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ für den Fall $q = 2$, $\Gamma = \Gamma_0(N)$ mit $N = T^2 + T + 1$ dar. Der in der Zeichnung blau hervorgehobene Bereich kennzeichnet diejenigen Simplexes deren Niveau in \mathcal{W}_2 enthalten ist.

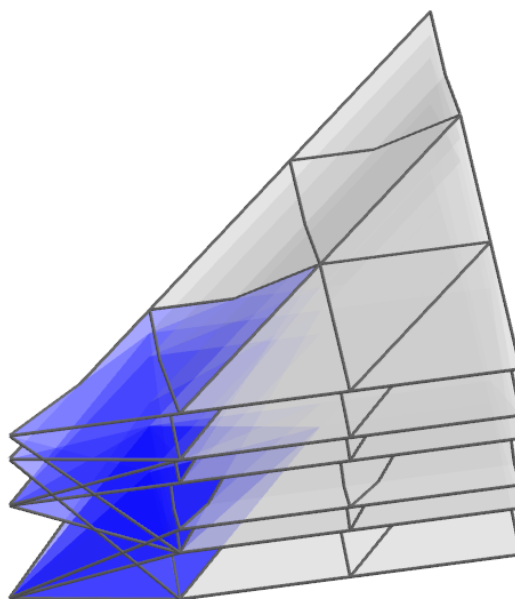


Abb. 1.6: Ausschnitt von $\Gamma \backslash \mathcal{B}$

Die nächsten Abbildungen dienen der besseren Visualisierung des in Abbildung 1.6 dargestellten Graphens. Sie zeigen weitere Perspektiven des Komplexes.

1.4 Struktur des Bruhat-Tits-Gebäudes

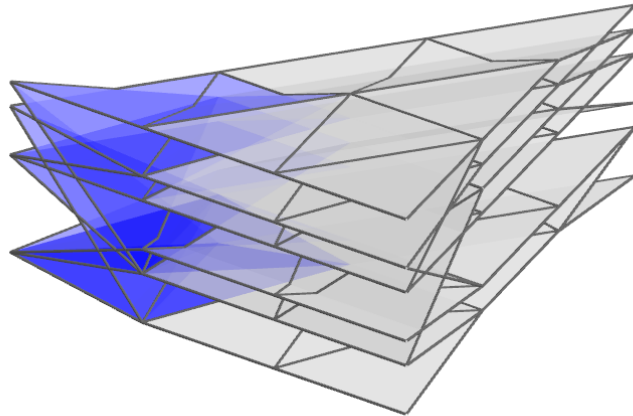


Abb. 1.7: Weitere Perspektive des Ausschnittes von $\Gamma \backslash \mathcal{B}$

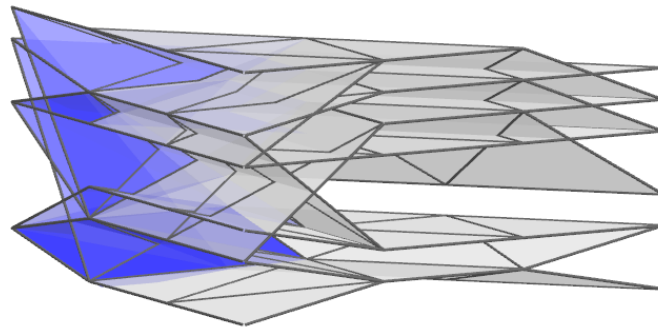


Abb. 1.8: Weitere Perspektive des Ausschnittes von $\Gamma \backslash \mathcal{B}$

2. Harmonische k-Koketten

Nachdem wir im vorigen Kapitel das Bruhat-Tits-Gebäude der Dimension r definiert haben, möchten wir im Folgenden spezielle Funktionen auf den Simplizes des Bruhat-Tits-Gebäudes untersuchen. Hierbei werden wir für festes $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq r$ Abbildungen auf $\mathcal{S}_k^m(\mathcal{B})$ mit gewissen Eigenschaften betrachten. Diese Eigenschaften werden sich unter anderem auf das Verhalten der Funktionen unter der Operation einer Kongruenzuntergruppe beziehen.

Wir werden uns anschließend dem uns in dieser Arbeit interessierenden Fall $r = k = 2$ zuwenden und werden sehen, dass in diesem Fall einige der zuvor an die Funktionen gestellten Bedingungen trivialerweise erfüllt sind. Weiterhin wird es uns gelingen, allein in Abhängigkeit zur Kongruenzuntergruppe eine Obermenge des Trägers jeder entsprechenden Funktion anzugeben.

2.1 Definition harmonischer k-Koketten

Die folgende Definition der harmonischen Koketten entstammt der Arbeit „Residues on buildings, and de-Rham cohomology of p-adic symmetric domains“ von Ehud de Shalit [Sh].

Definition 2.1 Sei \mathcal{B} das Bruhat-Tits-Gebäude der Dimension r sowie $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq r$. Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{S}_k^m(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}$ heißt harmonische k-Kokette, falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (1) Sind $s = (v_0, \dots, v_k) \in \mathcal{S}_k^m(\mathcal{B})$ und $s' = (v_1, \dots, v_k, v_0)$ zwei Simplizes, die sich nur in ihrer Anordnung unterscheiden, so gilt

$$\varphi(s') = (-1)^k \varphi(s).$$

- (2) Sei $t \in \mathcal{S}_{k-1}^m(\mathcal{B})$ sowie d ein Typus markierter k-Simplizes. Die Menge $C(t, d)$ sei gegeben durch

$$\{s \in \mathcal{S}_k^m(\mathcal{B}) \mid t \subseteq s, s \text{ und } t \text{ besitzen denselben ersten Knoten, Typus}(s) = d\}.$$

Dann gilt

$$\sum_{s \in C(t, d)} \varphi(s) = 0.$$

2. Harmonische k -Koketten

(3) Sei $k \geq 1$ und sei $s = ([L_0], \dots, [L_k]) \in \mathcal{S}_k^m(\mathcal{B})$. Für $0 \leq j \leq k$ sei die Menge $D(s, j)$ definiert durch

$$\{([L'_0], \dots, [L'_k]) \in \mathcal{S}_k^m(\mathcal{B}) \mid L'_i = L_i \text{ für } i \neq j, L'_j \subseteq L_j, \dim L'_j/L_{j+1} = 1\}.$$

Dann gilt

$$\varphi(s) = \sum_{s \in D(s, j)} \varphi(s').$$

(4) Sei $s = (v_0, \dots, v_{k+1}) \in S_{k+1}^m(\mathcal{B})$ ein markierter $(k+1)$ -Simplex sowie $s_j = (v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{k+1})$ eine k -Seite von s . Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \varphi(s_j) = 0.$$

Die Menge der harmonischen k -Koketten mit Werten in \mathbb{C} wird mit $\mathcal{H}^k(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ bezeichnet.

Ist k gleich der Dimension des betrachteten Bruhat-Tits-Gebäudes, so reduzieren sich offensichtlich die in dieser Definition aufgeführten Bedingungen, denn in diesem Fall sind die Bedingungen (3) und (4) trivial bzw. leer. Weiterhin vereinfacht sich auch die Bedingung (2), da sich für d lediglich die Möglichkeit $d = (1, \dots, 1)$ ergibt.

Betrachtet man weiter die Bedingung (1) im Fall $k \equiv 0 \pmod{2}$, so erkennt man, dass in diesem Fall der Funktionswert der harmonischen Kokette unabhängig von der Ordnung des Simplex ist.

Zusammengenommen motivieren diese Überlegungen die folgende Definition.

Definition 2.2 Sei \mathcal{B} das Bruhat-Tits-Gebäude der Dimension k . Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{S}_k(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ungeordnete harmonische k -Kokette, falls für alle $(k-1)$ -Simplizes t und die dazugehörige Menge

$$C(t) := \{s \in \mathcal{S}_k(\mathcal{B}) \mid t \subseteq s\}$$

die Gleichheit

$$\sum_{s \in C(t)} \varphi(s) = 0$$

gilt. Die Menge der ungeordneten harmonischen k -Koketten wird mit $\mathcal{H}^k(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ bezeichnet.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir die Bedingung

$$\sum_{s \in C(t)} \varphi(s) = 0$$

als Harmonizitätsbedingung bezeichnen. Die vorigen Bemerkungen zeigen, dass in bestimmten Fällen die harmonischen Koketten zu den ungeordneten harmonischen Koketten in gewisser Weise äquivalent sind. Dies wird im folgenden Lemma beschrieben.

2.1 Definition harmonischer k -Koketten

Lemma 2.3 Sei \mathcal{B} das Bruhat-Tits-Gebäude der Dimension k mit $k \equiv 0 \pmod{2}$. Es gilt

(i) Ist $\varphi : \mathcal{S}_k(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}$ eine ungeordnete harmonische k -Kokette, so ist die durch

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{S}_k^m(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}, (v_0, \dots, v_k) \mapsto \varphi(\{v_0, \dots, v_k\})$$

definierte Funktion eine harmonische k -Kokette.

(ii) Ist $\varphi : \mathcal{S}_k^m(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}$ eine harmonische k -Kokette, so ist die durch

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{S}_k(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}, \{v_0, \dots, v_k\} \mapsto \varphi((v_0, \dots, v_k))$$

definierte Funktion eine ungeordnete harmonische k -Kokette.

Somit müssen wir in dem uns interessierenden Fall $k = \dim(\mathcal{B}) = 2$ lediglich ungeordnete harmonische 2-Koketten untersuchen.

Im weiteren Verlauf möchten wir spezielle harmonische k -Koketten betrachten. Diese beschreiben wir in der folgenden Definition.

Definition 2.4 Sei \mathcal{B} das Bruhat-Tits-Gebäude der Dimension r sowie Γ eine Kongruenzuntergruppe der $\mathrm{GL}_r(\mathbb{F}_q[T])$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq r$ sei

$$\mathcal{H}^k(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma := \left\{ \varphi \in \mathcal{H}^k(\mathcal{B}, \mathbb{C}) \mid \varphi(\gamma s) = \varphi(s) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma, s \in \mathcal{S}_k^m(\mathcal{B}) \right\}$$

die Menge der Γ -invarianten harmonischen k -Koketten sowie

$$\mathcal{H}_\Gamma^k(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma := \left\{ \varphi \in \mathcal{H}^k(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma \mid \varphi \text{ besitzt modulo } \Gamma \text{ endlichen Träger} \right\}$$

die Menge der Γ -invarianten harmonischen k -Koketten mit endlichem Träger modulo Γ .

Diese Definition übertragen wir auf die Menge der ungeordneten harmonischen 2-Koketten.

Definition 2.5 Sei \mathcal{B} das Bruhat-Tits-Gebäude der Dimension 2 sowie Γ eine Kongruenzuntergruppe der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$. Es sei

$$\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma := \left\{ \varphi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{B}, \mathbb{C}) \mid \varphi(\gamma s) = \varphi(s) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma, s \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B}) \right\}$$

die Menge der Γ -invarianten ungeordneten harmonischen 2-Koketten sowie

$$\mathcal{H}_\Gamma(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma := \left\{ \varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma \mid \varphi \text{ besitzt modulo } \Gamma \text{ endlichen Träger} \right\}$$

die Menge der Γ -invarianten ungeordneten harmonischen 2-Koketten mit endlichem Träger modulo Γ .

2. Harmonische k -Koketten

2.2 Träger der Funktionen aus $\mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$

Nach Definition nimmt jedes Element φ aus $\mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ nur auf einem endlichen Bereich des Quotientengraphen $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ Werte ungleich Null an. Ziel dieses Abschnittes ist es, nachzuweisen, dass dieser Bereich nicht von der Funktion φ , sondern lediglich von der Kongruenzuntergruppe Γ , genauer vom Grad des Polynoms N minimalen Grades mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$, abhängt.

Hierzu erinnern wir an den in Kapitel 1 eingeführten Unterkomplex \mathcal{W}_n der Standardweylkammer, welcher durch die Angabe der Knotenmenge

$$\mathcal{V}(\mathcal{W}_n) = \{[j, k] \mid 0 \leq j \leq n-1 \text{ und } j \leq k \leq j+n-1\}$$

definiert wurde. Ausgehend von \mathcal{W}_n zeichnen wir einen von n abhängigen Unterkomplex des Bruhat-Tits-Gebäudes aus.

Definition 2.6 Sei $n \in \mathbb{N}$. Mit \mathcal{B}_n bezeichnen wir den maximalen Unterkomplex von \mathcal{B} mit

$$\mathcal{V}(\mathcal{B}_n) := \{v \in \mathcal{V}(\mathcal{B}) \mid \text{Niveau}(v) \in \mathcal{W}_n\}.$$

Mittels der vorigen Definitionen können wir für Γ den Bereich, der den Träger jeder harmonischen k -Kokette aus $\mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ enthält, angeben. Der Beweis des folgenden Satzes beruht hierbei maßgeblich auf Satz 1.38, in welchem wir nachgewiesen haben, dass an bestimmten inneren Kanten in $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ lediglich zwei 2-Simplizes anliegen.

Satz 2.7 Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe der $\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ und sei $N \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$. Weiter sei $n := \max\{2, \deg N\}$. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ die Inklusion

$$\text{Supp}(\varphi) \subseteq \mathcal{S}_2(\mathcal{B}_n).$$

Beweis: Für den Beweis verwenden wir die Darstellung des Bruhat-Tits-Gebäudes als Überlagerungen von Weylkammern. Es gilt

$$\mathcal{S}(\mathcal{B}) = \bigcup_{g \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])} g\mathcal{S}(\mathcal{W}).$$

Wir betrachten zunächst zwei Zerlegungen der Standardweylkammer in Folgen von benachbarten 2-Simplizes. Dabei werden zwei 2-Simplizes als benachbart bezeichnet, wenn sie eine gemeinsame Seite der Dimension 1 besitzen.

Bei der ersten Zerlegung betrachten wir für $e \in \mathbb{N}$ unendliche Folgen der Form

$$w_e = \{s_{0,1}^e, s_{0,2}^e, s_{1,1}^e, s_{1,2}^e, s_{2,1}^e, s_{2,2}^e, \dots\}$$

mit

$$\begin{aligned} s_{i,1}^e &= \{[e-1, i+e-1], [e-1, i+e], [e, i+e]\}, \\ s_{i,2}^e &= \{[e-1, i+e], [e, i+e], [e, i+e+1]\}. \end{aligned}$$

2.2 Träger der Funktionen aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$

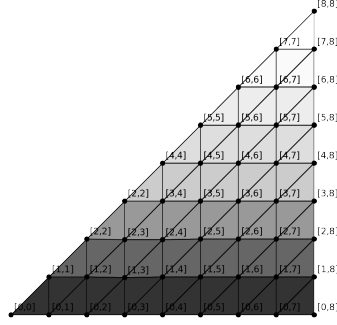


Abb. 2.1: Ausschnitt von \mathcal{W} mit Zerlegung in die Folgen w_e

Die zweite Zerlegung besteht aus unendlichen Folgen der Form

$$\tilde{w}_e = \{ \tilde{s}_{0,1}^e, \tilde{s}_{0,2}^e, \tilde{s}_{1,1}^e, \tilde{s}_{1,2}^e, \tilde{s}_{2,1}^e, \tilde{s}_{2,2}^e, \dots \}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{i,1}^e &= \{ [i, i + e - 1], [i, i + e], [i + 1, i + e] \}, \\ \tilde{s}_{i,2}^e &= \{ [i, i + e], [i + 1, i + e], [i + 1, i + e + 1] \}. \end{aligned}$$

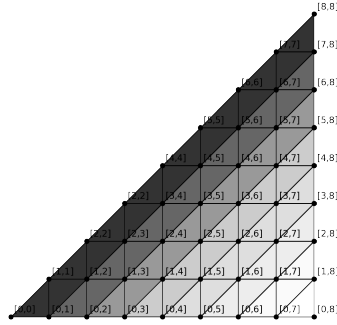


Abb. 2.2: Ausschnitt von \mathcal{W} mit Zerlegung in die Folgen \tilde{w}_e

Für $g \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ betrachten wir zunächst die Funktionswerte an den Simplizes $gs_{i,1}^e$ bzw. $gs_{i,2}^e$. Die Simplizes $gs_{i-1,2}^e$ und $gs_{i,1}^e$ sind durch die Kante

$$t = g \{ [e - 1, i + e - 1], [e, i + e] \}$$

verbunden. Nach Satz 1.38 existiert für $i \geq n$ zur Kante $[t]$ im Quotientenkomplex $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ genau ein 2-Simplex $[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ mit Seite $[t]$ und $[s] <_{\mathcal{W}} [t]$. Dies bedeutet, dass die q 2-Simplizes $s_1, \dots, s_q \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ mit Seite t und $s_i <_{\mathcal{W}} t$ unter der Operation der Gruppe Γ äquivalent sind. Daher existieren $\gamma_1, \dots, \gamma_{q-1} \in \Gamma$, so dass sich die Menge $C(t)$ der an t anliegenden 2-Simplizes als

$$C(t) = \{ gs_{i,1}^e, gs_{i-1,2}^e, \gamma_1 gs_{i-1,2}^e, \dots, \gamma_{q-1} gs_{i-1,2}^e \}$$

2. Harmonische k -Koketten

schreiben lässt. Aus der Harmonizitätsbedingung sowie der Γ -Invarianz von φ folgt die Gleichheit

$$0 = \sum_{s \in C(t)} \varphi(s) = \varphi(gs_{i,1}^e) + \varphi(gs_{i-1,2}^e) + \sum_{l=1}^{q-1} \varphi(\gamma_l gs_{i-1,2}^e) = \varphi(gs_{i,1}^e) + q\varphi(gs_{i-1,2}^e).$$

Somit gilt für $i \geq n$ die Identität

$$\varphi(gs_{i-1,2}^e) = -q^{-1}\varphi(gs_{i,1}^e).$$

Analog folgt mittels Satz 1.38 für $i \geq n-1$ die Gleichheit

$$\varphi(gs_{i,1}^e) = -q^{-1}\varphi(gs_{i,2}^e).$$

Da φ modulo der Gruppe Γ einen endlichen Träger besitzt, existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(gs_{i,1}^e) = \varphi(gs_{i,2}^e) = 0$ für alle $i \geq j$. Mittels der gerade gezeigten Identitäten folgt somit

$$\varphi(gs_{i,1}^e) = \varphi(gs_{i,2}^e) = 0$$

für alle $i \geq n-1$.

Analog lassen sich für $i \geq n-1$ die Gleichheiten

$$\varphi(g\tilde{s}_{i,1}^e) = \varphi(g\tilde{s}_{i,2}^e) = 0$$

nachweisen. □

3. Bestimmung einer Basis von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$

In diesem Kapitel möchten wir mit der Bestimmung einer Basis des \mathbb{C} -Vektorraums $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ beginnen. Hierzu werden wir $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ mit einem \mathbb{C} -Vektorraum $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C}$ spezieller \mathbb{C} -Linearkombinationen von 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ identifizieren. Wir werden nachweisen, dass eine endliche Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C}$ existiert, die nur aus \mathbb{Z} -Linearkombination von 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ besteht. Die Bestimmung einer solchen Basis ist Inhalt des vierten Kapitels.

3.1 Endlichkeit der Dimension von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$

Im letzten Kapitel haben wir gezeigt, dass das Niveau des Trägers jeder Funktion aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ in einem endlichen Bereich der Standardweylkammer liegt, dessen Größe allein von der Kongruenzuntergruppe Γ abhängt. Aus der Γ -Invarianz der Funktionen aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ folgt somit die Endlichkeit der Dimension von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$. Wir möchten dieses Ergebnis im nächsten Satz noch einmal herausstellen.

Satz 3.1 *Es gilt*

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma) < \infty.$$

Beweis: Sei $\varphi \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$. Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, dass für jeden 2-Simplex $s \in \text{Supp}(\varphi)$ die Inklusion $\text{Niveau}(s) \in \mathcal{S}(\mathcal{W}_n)$ gilt, wobei n den Grad des minimalen normierten Polynoms $N \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ sowie \mathcal{W}_n den maximalen Unterkomplex von \mathcal{W} mit

$$\mathcal{V}(\mathcal{W}_n) = \{[j, k] \mid 0 \leq j \leq k \leq j + n - 1, j \leq n - 1\}$$

bezeichne. Wie in Satz 2.7 gezeigt, ist der Träger jedes Elementes aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ daher eine Teilmenge des maximalen Unterkomplexes \mathcal{B}_n von \mathcal{B} mit

$$\mathcal{V}(\mathcal{B}_n) = \{s \in \mathcal{V}(\mathcal{B}) \mid \text{Niveau}(s) \in \mathcal{V}(\mathcal{W}_n)\}.$$

Sei $D_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{C})^\Gamma$ die Menge aller Γ -invarianten \mathbb{C} -wertigen Funktionen auf $\mathcal{S}_2(\mathcal{B}_n)$. Nach den soeben ausgeführten Überlegungen können wir $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ als \mathbb{C} -Untervektorraum

3. Bestimmung einer Basis von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$

von $D_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{C})^\Gamma$ auffassen. Aus der Γ -Invarianz der Funktionen aus $D_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{C})^\Gamma$ und der Endlichkeit des Index $[\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) : \Gamma]$ folgt

$$\dim_{\mathbb{C}}(D_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{C})^\Gamma) < \infty$$

und somit

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma) < \infty.$$

□

3.2 Harmonische Koketten als Funktionen auf $\Gamma \backslash \mathcal{B}$

Wie anfangs erklärt, möchten wir jeder Funktion aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ eine \mathbb{C} -Linearkombination von 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ zuordnen. Der erste Schritt hierbei ist die Identifikation einer Funktion aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ mit einer \mathbb{C} -wertigen Funktion auf $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$, die einer speziellen Harmonizitätsbedingung genügt. Im darauffolgenden Schritt werden wir die Harmonizitätsbedingung vereinfachen.

Die Ideen dieses Abschnittes beruhen hierbei auf Ideen der Arbeit „Jacobians of Drinfeld Modular Curves“ [GR] von E.-U.Gekeler und M.Reservat, in welcher harmonische Koketten auf Bruhat-Tits-Bäumen, somit Bruhat-Tits-Gebäuden der Dimension 1, behandelt werden.

Für eine gegebene Funktion $\varphi \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ erhalten wir eine Funktion auf dem Quotientengraphen, indem wir für ein Element $[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ die Funktion durch

$$\varphi_\Gamma([s]) := \varphi(s)$$

definieren. Da φ Γ -invariant ist, erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung, welche wir ungeordnete harmonische 2-Kokette auf $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ nennen. Die Menge dieser Abbildungen bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C})$.

Nach Definition der Menge $\mathcal{H}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C})$ erhalten wir als ersten Schritt eine \mathbb{C} -lineare Bijektion

$$\begin{aligned} \rho_1 : \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma &\rightarrow \mathcal{H}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C}) \\ \varphi &\mapsto \varphi_\Gamma. \end{aligned}$$

Vor dem nächsten Zwischenschritt möchten wir die Funktionen aus $\mathcal{H}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C})$ näher beschreiben.

Aus der Endlichkeit des Trägers der Abbildung $\varphi \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ folgt die Endlichkeit des Trägers der Funktionen aus $\mathcal{H}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C})$.

Weiter möchten wir untersuchen, wie sich die Bedingung

$$\sum_{s \in C(t)} \varphi(s) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathcal{S}_1(\mathcal{B})$$

3.2 Harmonische Koketten als Funktionen auf $\Gamma \backslash \mathcal{B}$

auf den Quotientenkomplex übertragen lässt.

Hierzu bestimmen wir für eine Kante $t \in \mathcal{S}_1(\mathcal{B})$ und einen 2-Simplex $s \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ mit $t \subseteq s$ die Anzahl der 2-Simplizes mit Seite t , die unter Γ zu s äquivalent sind. Dazu betrachten wir die Operation der Gruppe

$$\Gamma_t := \text{Fix}_\Gamma(t)$$

auf dem Simplex s . Diese Fixgruppe operiert transitiv auf den zu s äquivalenten 2-Simplizes mit Kante t . Nach der Bahnengleichung gilt daher

$$|\{\tilde{s} \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B}) \mid t \subseteq \tilde{s} \text{ und } [s] = [\tilde{s}]\}| = |\Gamma_t \cdot s| = \frac{|\Gamma_t|}{|\text{Fix}_{\Gamma_t}(s)|} = \frac{|\Gamma_t|}{|\Gamma_s|},$$

wobei Γ_s die Fixgruppe $\text{Fix}_\Gamma(s)$ bezeichne.

Ist nun $[t] \in \mathcal{S}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ eine Kante im Quotientenkomplex und $[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ ein 2-Simplex mit Seite $[t]$, so muss i.A. nicht $t \subseteq s$ gelten. Aber auch hier beschreibt

$$m_t(s) := \frac{|\Gamma_t|}{|\Gamma_s|}$$

die Anzahl der zu s äquivalenten 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ mit Seite t . Denn:

Nach dem Beweis von Lemma 1.37 existiert ein 2-Simplex \tilde{s} mit $t \subseteq \tilde{s}$ sowie $[s] = [\tilde{s}]$. Hieraus folgt die Existenz eines Elementes $\gamma \in \Gamma$ mit $\tilde{s} = \gamma s$. Für die Mächtigkeit der Fixgruppen ergibt sich folglich

$$|\Gamma_{\tilde{s}}| = |\Gamma_{\gamma s}| = |\gamma \Gamma_s \gamma^{-1}| = |\Gamma_s|.$$

Da nach voriger Überlegung der Quotient

$$m_t(\tilde{s}) = \frac{|\Gamma_t|}{|\Gamma_{\tilde{s}}|}$$

die Anzahl der zu \tilde{s} äquivalenten 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ mit Seite t angibt und $[s] = [\tilde{s}]$ gilt, ist

$$m_t(s) = \frac{|\Gamma_t|}{|\Gamma_s|} = \frac{|\Gamma_t|}{|\Gamma_{\tilde{s}}|} = m_t(\tilde{s})$$

gleich der Anzahl der 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ mit Seite t , die zu s äquivalent sind.

Bezeichnet

$$\tilde{C}([t]) := \{[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B}) \mid \exists i \in \{0, 1, 2\} : \Phi_2^i([s]) = [t]\}$$

die Menge der 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ mit Seite $[t]$, so folgt insgesamt

$$0 = \sum_{\tilde{s} \in C(t)} \varphi(\tilde{s}) = \sum_{[s] \in \tilde{C}([t])} m_t(s) \varphi(s) = \sum_{[s] \in \tilde{C}([t])} m_t(s) \varphi_\Gamma([s]).$$

Wir können somit an dieser Stelle auch ungeordnete harmonische 2-Koketten auf dem Quotientengraphen charakterisieren.

3. Bestimmung einer Basis von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$

Lemma 3.2 Sei $\varphi : \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit endlichem Träger. Dann liegt φ genau dann in $\mathcal{H}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C})$, wenn für alle $[t] \in \mathcal{S}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ die Gleichheit

$$\sum_{[s] \in \tilde{\mathcal{C}}([t])} m_t(s) \varphi([s]) = 0$$

gilt.

Als nächsten Zwischenschritt werden wir jeder Funktion aus $\mathcal{H}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C})$ eine Funktion mit einer vereinfachten Harmonizitätsbedingung zuordnen. Diese Funktionen sind Gegenstand der nächsten Definition.

Definition 3.3 Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe. Mit $F(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C})$ bezeichnen wir die Menge der Abbildungen $\varphi : \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}$, die folgende Eigenschaften besitzen:

- (i) $|\text{Supp}(\varphi)| < \infty$
- (ii) Für alle $[t] \in \mathcal{S}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ gilt die Gleichheit

$$\sum_{[s] \in \tilde{\mathcal{C}}([t])} \varphi([s]) = 0.$$

Wie bereits zuvor erwähnt, möchten wir eine Verbindung zwischen den Elementen aus $F(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C})$ und den ungeordneten harmonischen 2-Koketten aus $\mathcal{H}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C})$ herstellen. Dies geschieht im folgenden Satz.

Satz 3.4 Für $s \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ bezeichne Γ_s die Fixgruppe $\text{Fix}_\Gamma(s)$. Dann ist die durch

$$\begin{aligned} \rho_2 : \mathcal{H}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C}) &\rightarrow F(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C}), \\ \varphi &\mapsto \varphi^* \end{aligned}$$

mit

$$\varphi^*([s]) := \frac{1}{|\Gamma_s|} \varphi([s])$$

definierte Funktion eine wohldefinierte bijektive \mathbb{C} -lineare Abbildung.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass φ^* ein Element des \mathbb{C} -Vektorraums $F(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C})$ ist. Da für jedes $\tilde{s} \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ mit $[s] = [\tilde{s}]$ für die Mächtigkeit der Fixgruppen die Gleichheit $|\Gamma_s| = |\Gamma_{\tilde{s}}|$ gilt, ist die Definition von φ^* unabhängig von der Wahl des Vertreters. Die Endlichkeit des Trägers von φ^* ergibt sich direkt aus der Endlichkeit des Trägers von φ . Somit bleibt lediglich die vereinfachte Harmonizitätsbedingung zu überprüfen. Für $[t] \in \mathcal{S}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ gilt

$$\begin{aligned} |\Gamma_t| \sum_{[s] \in \tilde{\mathcal{C}}([t])} \varphi^*([s]) &= |\Gamma_t| \sum_{[s] \in \tilde{\mathcal{C}}([t])} \frac{1}{|\Gamma_s|} \varphi([s]) = \sum_{[s] \in \tilde{\mathcal{C}}([t])} \frac{|\Gamma_t|}{|\Gamma_s|} \varphi([s]) \\ &= \sum_{[s] \in \tilde{\mathcal{C}}([t])} m_t(s) \varphi([s]) = 0. \end{aligned}$$

Somit ist die Abbildung ρ_2 wohldefiniert.

Die \mathbb{C} -Linearität ist trivial. Für die Bijektivität betrachten wir die Abbildung

3.3 Übergang zu geschlossenen Flächen

$$\begin{aligned}\sigma_2 : F(\Gamma \setminus \mathcal{B}, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{H}_1(\Gamma \setminus \mathcal{B}, \mathbb{C}) \\ \varphi &\mapsto \tilde{\varphi}\end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\varphi}([s]) := |\Gamma_s| \varphi([s]).$$

Mit analogen Rechnungen wie im Fall ρ_2 lässt sich leicht die Wohldefiniertheit der Abbildung σ_2 nachweisen. Weiter gilt

$$\sigma_2 = \rho_2^{-1}.$$

□

3.3 Übergang zu geschlossenen Flächen

Wie anfangs beschrieben, streben wir an, Elemente aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ mit \mathbb{C} -Linearkombinationen aus 2-Simplizes des Quotientengraphens zu identifizieren. Hierzu definieren wir zunächst eine Art Randabbildung.

Definition 3.5 *Bezeichne $\mathbb{C}^{\mathcal{S}_i(\Gamma \setminus \mathcal{B})}$ für $i \in \{1, 2\}$ den \mathbb{C} -Vektorraum der endlichen \mathbb{C} -Linearkombinationen von Elementen aus $\mathcal{S}_i(\Gamma \setminus \mathcal{B})$. Die Abbildung*

$$\delta_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{S}_1(\Gamma \setminus \mathcal{B})}$$

sei durch die lineare Fortsetzung von

$$\delta_{\mathbb{C}}([s]) := \sum_{i=0}^2 \Phi_2^i([s])$$

definiert.

Einen einzelnen Simplex $[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ bildet die Funktion $\delta_{\mathbb{C}}$ also auf die Summe seiner 1-Seiten ab. Wir möchten in der nächsten Definition diejenigen Elemente von $\mathbb{C}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})}$ näher betrachten, die auf Null abgebildet werden.

Definition 3.6 *Sei $G := \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\kappa} [s_{\kappa}] \in \mathbb{C}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})}$. Liegt G im Kern von $\delta_{\mathbb{C}}$, so heißt G geschlossene Fläche. Den \mathbb{C} -Vektorraum der geschlossenen Flächen bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$.*

3. Bestimmung einer Basis von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$

Eine \mathbb{C} -Linearkombination von 2-Simplizes ist genau dann ein Element des Kerns von $\delta_{\mathbb{C}}$, wenn sich an jeder Kante die Koeffizienten der angrenzenden 2-Simplizes zu Null addieren. Diese Eigenschaft werden wir im Weiteren als Geschlossenheitsrelation bezeichnen.

Diese Bedingung erinnert an die vereinfachte Harmonizitätsbedingung aus der Definition der Funktionen $F(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C})$. Wir stellen diesen Zusammenhang im nächsten Satz heraus.

Satz 3.7 Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$.

(i) Sei $\varphi \in F(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C})$. Dann ist

$$G^\varphi := \sum_{[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})} \varphi([s])[s]$$

eine geschlossene Fläche.

(ii) Sei $G := \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_\kappa [s_\kappa] \in \mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{C}}$. Dann ist die durch

$$\varphi_G([s]) = \begin{cases} a_k, & \text{falls } [s] = [s_k], \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion ein Element von $F(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C})$.

Beweis: Für den Nachweis von Aussage (i) betrachten wir die Gleichheiten

$$\delta_{\mathbb{C}}(G^\varphi) = \delta_{\mathbb{C}}\left(\sum_{[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})} \varphi([s])[s]\right) = \sum_{i=0}^2 \sum_{[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})} \varphi([s]) \Phi_2^i([s]).$$

Somit wird für jede Kante $[t] \in \mathcal{S}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ für jeden Simplex $[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$, der $[t]$ als Seite besitzt, die Kante $\varphi([s])$ -mal hinzuaddiert. Aus diesen Überlegungen folgt mit der Harmonizitätsbedingung

$$\delta_{\mathbb{C}}(G^\varphi) = \sum_{[t] \in \mathcal{S}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B})} \left(\sum_{[s] \in \tilde{\mathcal{C}}([t])} \varphi([s]) \right) \cdot [t] = \sum_{[t] \in \mathcal{S}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B})} 0 \cdot [t] = 0.$$

Wenden wir uns dem Beweis der Aussage (ii) zu. Da G eine endliche Linearkombination ist, besitzt die Funktion φ_G einen endlichen Träger. Es bleibt somit lediglich die Harmonizität zu zeigen.

Hierzu sei $t \in \mathcal{S}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ eine Kante im Quotientengraphen. Existiert kein 2-Simplex, der einen Funktionswert ungleich 0 sowie t als Seite besitzt, so ist die Harmonizität an dieser Kante offensichtlich.

Betrachten wir also den Fall, dass an $[t]$ 2-Simplizes mit Funktionswerten ungleich Null

3.4 Übergang zu geschlossenen Flächen über \mathbb{Z}

anliegen. Seien $[s_{k_1}], \dots, [s_{k_l}] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ alle Elemente mit $\varphi_G([s_{k_i}]) \neq 0$, so dass eine Seitenabbildung $\Phi_2^{j_i}$ mit $\Phi_2^{j_i}([s_{k_i}]) = [t]$ existiert. Da G im Kern von δ liegt, gilt

$$\sum_{i=1}^l \varphi_G([s_{k_i}]) = \sum_{i=1}^l a_{k_i} = 0.$$

Aus der Gleichheit $\varphi_G([s]) = 0$ für alle anderen 2-Simplizes in $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ mit Seite $[t]$ folgt

$$\sum_{[s] \in \tilde{\mathcal{C}}([t])} \varphi_G([s]) = \sum_{i=1}^l \varphi_G([s_{k_i}]) = 0.$$

□

Betrachtet man die in den letzten beiden Sätzen gegebene Abbildung, so ist leicht erkennbar, dass diese zueinander invers sind. Wir haben also die Existenz einer \mathbb{C} -linearen Bijektion

$$\begin{aligned} \rho_3 : F(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{C}}, \\ \varphi &\mapsto G^\varphi \end{aligned}$$

nachgewiesen.

3.4 Übergang zu geschlossenen Flächen über \mathbb{Z}

In den letzten Abschnitten haben wir die Existenz \mathbb{C} -linearer bijektiver Abbildungen ρ_1, ρ_2 und ρ_3 mit

$$\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma \xrightarrow{\rho_1} \mathcal{H}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\rho_2} F(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\rho_3} \mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{C}}$$

nachgewiesen. Wir haben somit jeder Funktion aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ eine geschlossene Fläche mit Koeffizienten in \mathbb{C} zugeordnet. Dieses Ergebnis möchten wir im folgenden Satz herausstellen.

Satz 3.8 *Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe. Dann ist die durch*

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma &\rightarrow \mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{C}}, \\ \varphi &\mapsto G_\varphi \end{aligned}$$

mit

$$G_\varphi := \sum_{[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})} \frac{1}{|\Gamma_s|} \varphi(s)[s]$$

definierte Funktion eine wohldefinierte \mathbb{C} -lineare bijektive Abbildung.

3. Bestimmung einer Basis von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$

Beweis: Die Abbildung ρ entspricht der Abbildung $\rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1$. □

Wir haben somit die Bestimmung einer \mathbb{C} -Basis von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ auf die Bestimmung einer \mathbb{C} -Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C}$ zurückgeführt.

In Kapitel 2 haben wir gezeigt, dass der Träger einer Funktion $\varphi \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ in dem von Γ abhängigen Unterkomplex

$$\mathcal{B}_n = \{s \in \mathcal{S}(\mathcal{B}) \mid \text{Niveau}(s) \in \mathcal{S}(\mathcal{W}_n)\}$$

enthalten ist. Hierbei bezeichnet \mathcal{W}_n die Standardweylkammer der Größe n . Durch die Abbildung ρ ist es möglich, dieses Ergebnis auf die Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C}$ zu übertragen.

Lemma 3.9 Sei $N \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ und sei $n := \max\{2, \deg N\}$. Dann gilt

$$\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B}_n)}.$$

Somit können wir $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C}$ als Kern der Einschränkung $\tilde{\delta}_\mathbb{C}$ der Abbildung $\delta_\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B}_n)}$ auffassen.

Im folgenden Satz werden wir nachweisen, dass eine Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C}$ existiert, welche ein Erzeugendensystem der Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{Z}$ ist, wobei $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{Z}$ der Kern der Einschränkung $\delta_\mathbb{Z}$ von $\delta_\mathbb{C}$ auf die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})}$ sei. Die Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{Z}$ werden wir zukünftig als Gruppe der geschlossenen Flächen über \mathbb{Z} bezeichnen.

Satz 3.10 Es gilt

$$\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C} = \mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}.$$

Beweis: Analog zum vorigen Lemma können wir $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{Z}$ als Kern der Einschränkung $\tilde{\delta}_\mathbb{Z}$ der Abbildung $\delta_\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B}_n)}$ auffassen. Die \mathbb{Z} -lineare Abbildung $\tilde{\delta}_\mathbb{Z}$ kann durch eine endlich-dimensionale Matrix $M_{\tilde{\delta}}$ mit ganzzahligen Einträgen dargestellt werden. Da jede Basis der freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B}_n)}$ eine Basis von $\mathbb{C}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B}_n)}$ ist, repräsentiert die Matrix $M_{\tilde{\delta}}$ ebenfalls die Abbildung $\tilde{\delta}_\mathbb{C}$. Hieraus folgt

$$\text{Kern}(\tilde{\delta}_\mathbb{Z}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C} = \text{Kern}(\tilde{\delta}_\mathbb{C})$$

und somit die Behauptung. □

Die Überlegung dieses Kapitels zeigen, dass jede Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{Z}$ mittels der Abbildung ρ^{-1} eine Basis des \mathbb{C} -Vektorraums $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ liefert. Unsere Aufgabe ist es im nächsten Kapitel daher, eine Basis der freien abelschen Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{Z}$ der geschlossenen Flächen über \mathbb{Z} zu ermitteln.

4. Geschlossene Flächen über \mathbb{Z}

4.1 Gestalt

In diesem Abschnitt möchten wir den Aufbau geschlossener Flächen analysieren. Wir werden zeigen, dass eine geschlossene Fläche allein durch ihre Summanden vom Niveau

$$\mathcal{C}_2 = \{[0, 0], [0, 1], [1, 1]\}$$

bestimmt ist.

Im 1. Kapitel haben wir in Lemma 1.35 gesehen, dass an jeder inneren Kante $t \in \mathcal{S}_1(\mathcal{B})$ genau q 2-Simplizes $s_i \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ mit $s_i <_{\mathcal{W}} t$, aber nur ein Simplex s mit $t =_{\mathcal{W}} s$ anliegt. Somit lässt sich jeder Simplex aus $\mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ vom Niveau \mathcal{C}_2 eindeutig zu einer Weylkammer in \mathcal{B} fortsetzen. Da zudem für innere Simplizes aus der Gleichheit $=_{\mathcal{W}}$ stets auch die Gleichheit $=_F$ bezüglich der Fixgruppe folgt, liegt, wie in Lemma 1.37 gezeigt, auch im Quotientengraphen an jeder inneren Kante $[t]$ nur ein 2-Simplex $[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ mit $[t] =_{\mathcal{W}} [s]$. Daher kann auch im Quotientenkomplex jeder 2-Simplex vom Niveau \mathcal{C}_2 eindeutig fortgesetzt werden.

Diese Eindeutigkeit motiviert die folgende Definition.

Definition 4.1 Sei $[s] = [g\mathcal{C}_2]$ mit $g \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ ein 2-Simplex aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ vom Niveau \mathcal{C}_2 . Die Menge

$$\mathcal{F}_{\Gamma}([s]) := \{[gw] \mid w \in \mathcal{S}_2(\mathcal{W})\}$$

heißt Fortsetzung von $[s]$ bezüglich Γ .

Im nächsten Lemma wird die besondere Stellung der Simplizes vom Niveau \mathcal{C}_2 hervorgehoben. So werden wir sehen, dass jeder in einer geschlossenen Fläche auftretende Simplex in der Fortsetzung eines Summanden vom Niveau \mathcal{C}_2 liegt.

Lemma 4.2 Sei $G = \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\kappa}[s_{\kappa}] \in \mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{Z}}$ eine geschlossene Fläche. Dann existiert zu jedem $\kappa \in \{1, \dots, \mu\}$ ein $\lambda \in \{1, \dots, \mu\}$ mit

(i) $\text{Niveau}([s_{\lambda}]) = \mathcal{C}_2$,

(ii) $[s_{\kappa}] \in \mathcal{F}_{\Gamma}([s_{\lambda}])$.

4. Geschlossene Flächen über \mathbb{Z}

Beweis: Ist $[s_\kappa]$ vom Niveau \mathcal{C}_2 , so kann trivialerweise $\lambda = \kappa$ gewählt werden. Betrachten wir also den Fall $\text{Niveau}([s_\kappa]) \neq \mathcal{C}_2$. Sei $[t_\kappa] \in \mathcal{S}_1(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ eine innere Kante und Seite von $[s_\kappa]$ mit $[t_\kappa] =_{\mathcal{W}} [s_\kappa]$. Nach Lemma 1.37 liegt an $[t_\kappa]$ kein weiterer 2-Simplex vom gleichen Niveau wie $[s_\kappa]$, sondern lediglich 2-Simplizes $[\tilde{s}]$ mit $[\tilde{s}] <_{\mathcal{W}} [t_\kappa]$ an. Da G eine geschlossene Fläche ist, existiert somit ein $\iota \in \{1, \dots, r\}$ mit $[s_\iota] <_{\mathcal{W}} [s_\kappa]$ sowie ein $i \in \{0, 1, 2\}$ mit $\Phi_2^i([s_\iota]) = [t_\kappa]$. Die induktive Fortsetzung dieses Verfahrens liefert einen Simplex $[s_\lambda]$ mit $\text{Niveau}([s_\lambda]) = \mathcal{C}_2$ und $[s_\kappa] \in \mathcal{F}_\Gamma([s_\lambda])$. \square

Nach vorigem Lemma lässt sich jede geschlossene Fläche in Summen über Fortsetzungen von \mathcal{C}_2 aufteilen. Somit ist jede geschlossene Fläche G nach eventueller Umsortierung und Aufspaltung von der Form

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{[s] \in \mathcal{F}_\Gamma([s_\lambda])} b_s [s]$$

mit $b_{s_\lambda} \neq 0$ für alle Simplizes $[s_\lambda]$ mit $\text{Niveau}([s_\lambda]) = \mathcal{C}_2$. Hierbei ist zu beachten, dass ein Simplex $[s]$ durchaus in der Fortsetzung mehrerer Simplizes vom Niveau \mathcal{C}_2 liegen kann und daher mehrfach als Summand auftaucht.

Im Folgenden möchten wir den Summationsbereich weiter einschränken. Ist $N \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$, so gilt nach Lemma 3.9 für $n := \max\{2, \deg N\}$ die Inklusion

$$\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B}_n)},$$

wobei \mathcal{B}_n den Unterkomplex von \mathcal{B} mit

$$\mathcal{S}(\mathcal{B}_n) := \{s \in \mathcal{S}(\mathcal{B}) \mid \text{Niveau}(s) \in \mathcal{S}(\mathcal{W}_n)\}$$

bezeichnet. Daher erscheint es sinnvoll, die Fortsetzung ebenfalls auf diesen Bereich zu beschränken.

Definition 4.3 Sei $[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})$. Die Menge

$$\mathcal{F}_\Gamma^n([s]) = \{[\tilde{s}] \in \mathcal{F}_\Gamma([s]) \mid \text{Niveau}([\tilde{s}]) \in \mathcal{W}_n\}$$

heißt *Fortsetzung der Größe n* .

Wir können also den Summationsbereich auf die Fortsetzungen der Größe n begrenzen. Somit ist jede geschlossene Form nach eventueller Umsortierung von der Form

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{[s] \in \mathcal{F}_\Gamma^n([s_\lambda])} b_s [s]$$

mit $b_{s_\lambda} \neq 0$ für alle Simplizes $[s_\lambda]$ mit $\text{Niveau}([s_\lambda]) = \mathcal{C}_2$.

Zu Beginn des Kapitels haben wir als Ziel angegeben, nachzuweisen, dass jede geschlossene Fläche schon durch die Summanden vom Niveau \mathcal{C}_2 bestimmt ist. Im letzten Schritt betrachten wir die Koeffizienten b_s . Es wird sich zeigen, dass die Koeffizienten b_s für $[s] \in \mathcal{F}_\Gamma^n([s_\lambda])$ bis auf das Vorzeichen dem Koeffizienten b_{s_λ} entsprechen.

Lemma 4.4 *Sei*

$$G = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{[s] \in \mathcal{F}_{\Gamma}^n([s_{\lambda}])} b_s [s]$$

eine geschlossene Fläche über \mathbb{Z} . Der Wert ε_s sei definiert durch

$$\varepsilon_s := \begin{cases} 1 & \exists j, k \in \mathbb{N}_0 : \text{Niveau}(s) = \{[j, k], [j, k+1], [j+1, k+1]\}, \\ -1 & \exists j, k \in \mathbb{N}_0 : \text{Niveau}(s) = \{[j, k], [j+1, k], [j+1, k+1]\}. \end{cases}$$

Dann gilt

$$G = \sum_{\lambda=1}^{\nu} b_{s_{\lambda}} \sum_{[s] \in \mathcal{F}_{\Gamma}^n([s_{\lambda}])} \varepsilon_s [s].$$

Beweis: Sei $[t]$ Seite eines in G auftretenden Simplex. Nach Lemma 1.37 liegen an der Kante $[t]$ genau ein 2-Simplex $[s]$, der bezüglich \mathcal{W} gleich $[t]$ ist, sowie endlich viele bezüglich der Weylkammer kleinere 2-Simplizes $[s_1], \dots, [s_k]$. Seien $[s_{i_1}], \dots, [s_{i_l}]$ dabei diejenigen Simplizes, die in der geschlossenen Fläche G als Summanden auftreten. Um die Geschlossenheitsrelation zu erfüllen, muss der Koeffizient von $[s]$ gerade das additive Inverse der Summe der Koeffizienten von $[s_{i_1}], \dots, [s_{i_l}]$ sein. Dies wird durch die Wahl von ε_s erreicht. \square

Durch das vorige Lemma haben wir unsere zu Beginn des Abschnittes getätigte Aussage, dass jede geschlossene Fläche durch ihre Summanden vom Niveau \mathcal{C}_2 eindeutig festgelegt sei, bewiesen. Wir möchten dieses Ergebnis noch einmal im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 4.5 *Sei $N \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ und $n := \max\{2, \deg N\}$. Weiter sei*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}(\Gamma \setminus \mathcal{B}) := \{[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B}) \mid \text{Niveau}([s]) = \mathcal{C}_2\}$$

und ε_s definiert wie in Lemma 4.4. Dann ist die durch

$$\Upsilon : \mathbb{Z}^{\mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}(\Gamma \setminus \mathcal{B})} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B}_n)}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} a_{\lambda} [s_{\lambda}] \mapsto \sum_{\lambda=1}^{\nu} a_{\lambda} \sum_{[s] \in \mathcal{F}_{\Gamma}^n([s_{\lambda}])} \varepsilon_s [s]$$

definierte \mathbb{Z} -lineare Abbildung injektiv. Es gilt

$$\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{Z}} \subseteq \text{Im } \Upsilon.$$

Beweis: Die Aussage folgt aus den bisherigen Überlegungen dieses Abschnittes. \square

Nach Wahl der zur Definition von Υ verwendeten Koeffizienten ε_s erfüllt jedes Element aus $\text{Im } \Upsilon$ bereits die Geschlossenheitsrelation an denjenigen Kanten, deren Niveau im Inneren der Standardweylkammer der Größe n liegen. Diese Menge der Kanten wird in der folgenden Graphik für den Fall $n = 4$ veranschaulicht.

4. Geschlossene Flächen über \mathbb{Z}

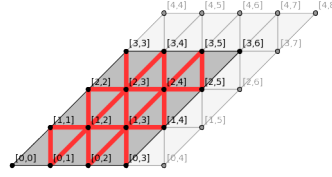


Abb. 4.1: Innere Kanten von \mathcal{W}_4

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels möchten wir das Urbild $\mathcal{U} := \Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}})$ der geschlossenen Fläche über \mathbb{Z} unter der Abbildung Υ bestimmen. Nach Definition der geschlossenen Flächen entspricht \mathcal{U} dem Kern der Abbildung $\delta_{\mathbb{Z}} \circ \Upsilon$, wobei $\delta_{\mathbb{Z}}$ diejenige in Kapitel 3 eingeführte Abbildung bezeichnet, die jedem 2-Simplex aus $\mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ die Summe seiner Kanten zuordnet.

4.2 Bedingungen für geschlossene Flächen

Ziel dieses Abschnittes ist die nähere Beschreibung des Urbildes $\mathcal{U} = \Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}})$ von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ unter der zuvor eingeführten Abbildung Υ .

Da eine geschlossene Fläche G an jeder Kante vom Niveau $\mathcal{C}_{10} = \{[0, 0], [0, 1]\}$ sowie vom Niveau $\mathcal{C}_{12} = \{[0, 0], [1, 1]\}$ die Geschlossenheitsrelation erfüllt, gilt dies ebenfalls für $\Upsilon^{-1}(G)$. Daher zeichnen wir in der folgenden Definition all diejenigen Elemente von $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})}$ aus, welche an den Kanten vom Niveau \mathcal{C}_{10} bzw. \mathcal{C}_{12} der Geschlossenheitsrelation genügen.

Definition 4.6 Sei

$$A := \sum_{\lambda=1}^{\nu} a_\lambda [s_\lambda]$$

mit $a_\lambda \in \mathbb{Z}$ und $[s_\lambda] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ mit $\text{Niveau}([s_\lambda]) = \mathcal{C}_2$. Weiter sei $\Phi_2^0([s_\lambda])$ die Seite vom Niveau $\mathcal{C}_{10} = \{[0, 0], [0, 1]\}$ sowie $\Phi_2^1([s_\lambda])$ die Seite vom Niveau $\mathcal{C}_{12} = \{[0, 0], [1, 1]\}$. Gilt

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} a_\lambda \Phi_2^0([s_\lambda]) = \sum_{\lambda=1}^{\nu} a_\lambda \Phi_2^1([s_\lambda]) = 0,$$

so nennen wir A Anfangsfläche.

Die Menge der Anfangsflächen bildet bezüglich der Addition eine Gruppe, welche wir mit \mathcal{A}_Γ bezeichnen.

Nach den vorherigen Bemerkungen gilt

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}_\Gamma.$$

Mittels der in Kapitel 1 erläuterten Relation „bezüglich der Fixgruppe kleiner gleich“ ist es uns möglich, im nächsten Satz genaue Kriterien angeben, wann eine \mathbb{Z} -Linearkombination von 2-Simplexes vom Niveau \mathcal{C}_2 im Urbild \mathcal{U} von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ liegt.

4.2 Bedingungen für geschlossene Flächen

Satz 4.7 Sei $N \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ und sei $n := \max\{2, \deg N\}$. Gegeben sei die Summe

$$U := \sum_{\lambda=1}^{\nu} a_{\lambda}[s_{\lambda}]$$

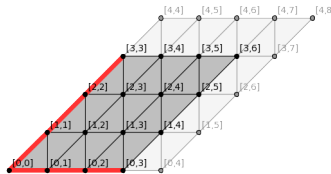
mit $a_{\lambda} \in \mathbb{Z}$, $[s_{\lambda}] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ und $\text{Niveau}([s_{\lambda}]) = \mathcal{C}_2$. Dann ist U genau dann in $\mathcal{U} = \Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{Z}})$ enthalten, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $U \in \mathcal{A}_{\Gamma}$,
- (ii) $\sum_{\lambda=1}^{\nu} a_{\lambda}[t_{\lambda,1}] = 0$, wobei $[t_{\lambda,1}] \in \mathcal{S}_1(\mathcal{F}_{\Gamma}^n([s_{\lambda}]))$ die Kante vom Niveau $\{[0, n-1], [1, n]\}$ bezeichne,
- (iii) $\sum_{\lambda=1}^{\nu} a_{\lambda}[t_{\lambda,2}] = 0$, wobei $[t_{\lambda,2}] \in \mathcal{S}_1(\mathcal{F}_{\Gamma}^n([s_{\lambda}]))$ die Kante vom Niveau $\{[n-1, n-1], [n-1, n]\}$ bezeichne.

Beweis: Ist G eine geschlossene Fläche, so ist die Summe der Koeffizienten der an einer Kante $[t] \in \mathcal{S}_1(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ auftretenden 2-Simplizes stets Null. Dies gilt selbstverständlich auch für die Kanten vom Niveau $\{[0, 0], [0, 1]\}$, $\{[0, 0], [1, 1]\}$, $\{[0, n-1], [1, n]\}$ und $\{[n-1, n-1], [n-1, n]\}$.

Wenden wir uns als der umgekehrten Beweisrichtung zu. Hierbei unterscheiden wir bezüglich des Niveaus der Kanten.

- (1) Kanten, deren Niveau am „äußeren Rand“ von \mathcal{W}_n liegt:



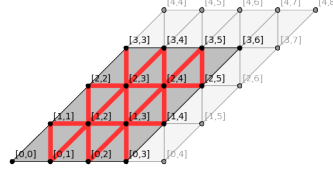
Wir werden sehen, dass die Geschlossenheitsrelation an diesen Kanten aus Bedingung (i), also der Inklusion

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} a_{\lambda}[s_{\lambda}] \in \mathcal{A}_{\Gamma}$$

folgt.

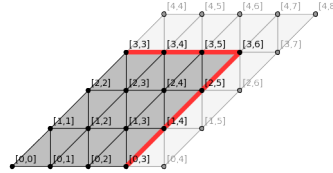
4. Geschlossene Flächen über \mathbb{Z}

(2) Kanten, deren Niveau im Inneren von \mathcal{W}_n liegt:



Es wird sich zeigen, dass sich die Geschlossenheitsrelation bereits aus der Wahl der Abbildung Υ , genauer gesagt der Wahl der Faktoren ε_s ergibt.

(3) Kanten, deren Niveau am „inneren Rand“ von \mathcal{W}_n liegt:



Für diese Kanten benötigen wir zum Nachweis der Geschlossenheitsrelation die Bedingungen (ii) und (iii), d.h. die Voraussetzung

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} a_{\lambda}[t_{\lambda,1}] = \sum_{\lambda=1}^{\nu} a_{\lambda}[t_{\lambda,2}] = 0.$$

Betrachten wir diese Arten im Detail.

(1) Beginnen wir mit den Kanten vom Niveau $\{[0, k], [0, k + 1]\}$ für $0 < k$. Seien $[s_1], [s_2] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ mit $\text{Niveau}([s_1]) = \text{Niveau}([s_2]) = \mathcal{C}_2$ und einer gemeinsamen Seite

$$[t] = \Phi_2^0([s_1]) = \Phi_2^0([s_2])$$

vom Niveau $\{[0, 0], [0, 1]\}$.

Sind $[\tilde{s}_1] \in \mathcal{F}_{\Gamma}^n([s_1])$ und $[\tilde{s}_2] \in \mathcal{F}_{\Gamma}^n([s_2])$ 2-Simplizes mit

$$\text{Niveau}([\tilde{s}_1]) = \text{Niveau}([\tilde{s}_2]) = \{[0, k], [0, k + 1], [1, k + 1]\},$$

sowie $\Phi_2^0([\tilde{s}_1])$ und $\Phi_2^0([\tilde{s}_2])$ die Seiten vom Niveau $\{[0, k], [0, k + 1]\}$, so gilt

$$[t] \leq_{\mathcal{W}} \Phi_2^0([\tilde{s}_1]) \text{ und } [t] \leq_{\mathcal{W}} \Phi_2^0([\tilde{s}_2])$$

Da $[t], \Phi_2^0([\tilde{s}_1])$ sowie $\Phi_2^0([\tilde{s}_2])$ äußere Kanten sind, folgt hieraus die Relation

$$[t] \leq_F \Phi_2^0([\tilde{s}_1]) \text{ und } [t] \leq_F \Phi_2^0([\tilde{s}_2])$$

4.3 Bestimmen der Anfangsflächen

und somit die Gleichheit

$$\Phi_2^0([\tilde{s}_1]) = \Phi_2^0([\tilde{s}_2]).$$

Bezeichnet also $[\tilde{s}_\lambda^k]$ für $k = 1, \dots, n-2$ den 2-Simplex $[\tilde{s}_\lambda^k] \in \mathcal{F}_\Gamma^n([s_\lambda])$ mit $\text{Niveau}([\tilde{s}_\lambda^k]) = \{[0, k], [0, k+1], [1, k+1]\}$, so folgt aus

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} a_\lambda \Phi_2^0([s_\lambda]) = 0$$

für $k = 2, \dots, n-2$ die Gleichheit

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} a_\lambda \Phi_2^0([\tilde{s}_\lambda^k]) = 0.$$

Offensichtlich lässt sich für Kanten vom Niveau $\{[j, j], [j+1, j+1]\}$ analog argumentieren.

- (2) Ähnlich zum Beweis von Lemma 4.4, in welchem die Koeffizienten ε_s eingeführt wurden, lässt sich zeigen, dass bereits jedes Element aus $\text{Im } \Upsilon$ die Geschlossenheitsrelation an diesen Kanten erfüllt.
- (3) Wenden wir uns den Kanten vom Niveau

$$\{[k, n-1+k], [k+1, n+k]\} \text{ bzw. } \{[n-1, n-1+k], [n-1, n+k]\}$$

mit $k \in \{1, \dots, n-2\}$ zu. Aufgrund der Relationen

$$\{[0, n-1], [1, n]\} \leq_w \{[k, n-1+k], [k+1, n+k]\}$$

und

$$\{[n-1, n-1], [n-1, n]\} \leq_w \{[n-1, n-1+k], [n-1, n+k]\}.$$

sowie der Voraussetzung

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} a_\lambda [t_{\lambda,1}] = \sum_{\lambda=1}^{\nu} a_\lambda [t_{\lambda,2}] = 0$$

kann die Argumentation aus (1) auch auf diese Fälle übertragen werden.

□

4.3 Bestimmen der Anfangsflächen

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass das Urbild der Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ der geschlossenen Flächen unter der Abbildung Υ in der Gruppe \mathcal{A}_Γ der Anfangsflächen enthalten ist. Daher möchten wir in diesem Abschnitt die Gruppe der Anfangsflächen näher beschreiben.

4. Geschlossene Flächen über \mathbb{Z}

Die Überlegungen im folgenden Absatz zeigen, dass sich jede Anfangsfläche als Summe von Differenzen zweier Simplizes mit gemeinsamer Kante vom Niveau $\{[0, 0], [0, 1]\}$ schreiben lässt.

Sei $\sum_{\lambda=1}^{\nu} a_{\lambda}[s_{\lambda}]$ eine Anfangsfläche. Diese lässt sich weiter in Teilsummen $\sum_{\eta=1}^{\vartheta_i} a_{i_{\eta}}[s_{i_{\eta}}]$ von 2-Simplizes $[s_{i_{\eta}}]$ mit gemeinsamer Kante vom Niveau $\{[0, 0], [0, 1]\}$ zerlegen. Für diese gilt aufgrund der Geschlossenheitsrelation die Gleichheit $\sum_{\eta=1}^{\vartheta_i} a_{i_{\eta}} = 0$ und somit $a_{i_1} = -\sum_{\eta=2}^{\vartheta_i} a_{i_{\eta}}$. Damit gilt

$$\sum_{\eta=1}^{\vartheta_i} a_{i_{\eta}}[s_{i_{\eta}}] = \sum_{\eta=2}^{\vartheta_i} a_{i_{\eta}}([s_{i_{\eta}}] - [s_{i_1}]).$$

Durch Aufsummieren dieser Summen erhält man die Aussage des vorigen Absatzes. Offensichtlich lässt sich analog zeigen, dass sich jede Anfangsfläche auch als Summe von Differenzen jeweils zweier Simplizes mit gemeinsamer Kante vom Niveau $\{[0, 0], [1, 1]\}$ darstellen lässt.

Die vorigen Überlegungen motivieren die Einführung einer Bezeichnung der kleinsten Untergruppe von $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}c_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})}$, welche alle Differenzen von 2-Simplizes aus $\mathcal{S}(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ mit gemeinsamer Kante vom Niveau $\{[0, 0], [0, 1]\}$ bzw. $\{[0, 0], [1, 1]\}$ enthält.

Definition 4.8 Für $[s_1], [s_2] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ mit gemeinsamer Kante vom Niveau $\{[0, 0], [0, 1]\}$ bzw. $\{[0, 0], [1, 1]\}$ nennen wir die Differenz

$$[s_2] - [s_1]$$

einfaches Modulsymbol erster bzw. zweiter Art für $\Gamma \setminus \mathcal{B}$.

Die \mathbb{Z} -lineare Hülle \mathcal{M}_1 bzw. \mathcal{M}_2 der Mengen einfacher Modulsymbole erster bzw. zweiter Art bezeichnen wir als Gruppe der Modulsymbole erster bzw. zweiter Art für $\Gamma \setminus \mathcal{B}$.

Nach Definition erfüllt jedes Element aus \mathcal{M}_1 die Geschlossenheitsrelation an jeder Kante vom Niveau $\{[0, 0], [0, 1]\}$. Ebenso genügt jedes Element aus \mathcal{M}_2 der Geschlossenheitsrelation an Kanten des Niveaus $\{[0, 0], [1, 1]\}$.

Mittels der soeben eingeführten Bezeichnungen lässt sich eine alternative Beschreibung der Gruppe der Anfangsflächen angeben. Hierbei verwenden wir die zuvor nachgewiesene Darstellung der Anfangsflächen als Summe von Differenzen.

Satz 4.9 Es gilt

$$\mathcal{A}_{\Gamma} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2.$$

Beweis: Die Überlegungen vor der Definition der Modulsymbole für $\Gamma \setminus \mathcal{B}$ haben gezeigt, dass sich jede Anfangsfläche sowohl als Summe von Differenzen von 2-Simplizes

4.3 Bestimmen der Anfangsflächen

mit gemeinsamer Kante vom Niveau $\{[0, 0], [0, 1]\}$ als auch durch Differenzen von 2-Simplizes mit gemeinsamer Seite vom Niveau $\{[0, 0], [1, 1]\}$ darstellen lässt. Somit ist jede Anfangsfläche in \mathcal{M}_1 sowie in \mathcal{M}_2 enthalten.

Ist andererseits eine Summe von C_2 -Simplizes ein Element von \mathcal{M}_1 sowie von \mathcal{M}_2 , so genügt diese Summe der Geschlossenheitsrelation an allen Kanten sowohl vom Niveau $\{[0, 0], [0, 1]\}$ als auch vom Niveau $\{[0, 0], [1, 1]\}$ und ist somit eine Anfangsfläche. \square

Im bisherigen Verlauf dieses Abschnittes haben wir somit die Bestimmung eines Erzeugendensystems der Gruppe \mathcal{A}_Γ der Anfangsflächen auf die Bestimmung eines Erzeugendensystems der Gruppen \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 zurückgeführt. Zur Untersuchung dieser Gruppen werden wir zunächst das Konzept der Modulsymbole für den Quotientengraphen $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ auf das Bruhat-Tits-Gebäude \mathcal{B} übertragen.

Definition 4.10 Für $s_1, s_2 \in \mathcal{S}_{C_2}(\mathcal{B})$ mit gemeinsamer Kante vom Niveau $\{[0, 0], [0, 1]\}$ bzw. $\{[0, 0], [1, 1]\}$ bezeichnen wir

$$[s_1, s_2] := s_2 - s_1$$

als einfaches Modulsymbol erster bzw. zweiter Art für \mathcal{B} .

Die \mathbb{Z} -lineare Hülle M_1 bzw. M_2 der Menge dieser Elemente bezeichnen wir als Gruppe der Modulsymbole erster bzw. zweiter Art für \mathcal{B} .

Ein einfaches Modulsymbol ist also eine Differenz zweier Simplizes aus $\mathcal{S}_1(\mathcal{B})$. Im ersten Kapitel haben wir auf den Simplizes eine Operation der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ definiert, welche wir auf die Modulsymbole ausweiten können.

Sei $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ und $[s_1, s_2] \in M_1$ ein einfaches Modulsymbol erster bzw. zweiter Art. Durch lineare Fortsetzung von

$$g[s_1, s_2] = gs_2 - gs_1$$

erhalten wir eine Operation der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ auf der Gruppe der Modulsymbole erster bzw. zweiter Art.

Da unser Interesse den Modulsymbolen für $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ gilt, möchten wir den größten Quotienten von M_1 bzw. M_2 betrachten, der unter der Operation von Γ invariant bleibt.

Definition 4.11 Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$. Wir bezeichnen die Menge

$$M_1^\Gamma := M_1 / \langle m - \gamma m \mid m \in M_1, \gamma \in \Gamma \rangle$$

bzw.

$$M_2^\Gamma := M_2 / \langle m - \gamma m \mid m \in M_2, \gamma \in \Gamma \rangle$$

als Modulsymbole erster bzw. zweiter Art für Γ .

4. Geschlossene Flächen über \mathbb{Z}

Um schlussendlich die Gruppe \mathcal{M}_1 bzw. \mathcal{M}_2 zu erhalten, betrachten wir die Projektion π_Γ von M_1^Γ bzw. M_2^Γ nach $\mathbb{Z}[\mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})]$. Hierbei können wir die in Abschnitt 1.3 eingeführte Abbildung π_Γ auf Vertreter anwenden. Dies ist offensichtlich wohldefiniert. Wir erhalten

$$\mathcal{M}_1 = \pi_\Gamma(M_1^\Gamma) \text{ sowie } \mathcal{M}_2 = \pi_\Gamma(M_2^\Gamma).$$

Es ergibt sich eine weitere Darstellung der Gruppe der Anfangsflächen.

Korollar 4.12 *Es gilt*

$$\mathcal{A}_\Gamma = \pi_\Gamma(M_1^\Gamma) \cap \pi_\Gamma(M_2^\Gamma).$$

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus Satz 4.9. □

4.4 Modulsymbole erster Art

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Gruppe M_1 durch Erzeuger und Relation darzustellen. Die Ideen dieses Abschnittes beruhen dabei zu großen Teilen auf der Arbeit „Modular Symbols for $\mathbb{F}_q(T)$ “ [Te] von Jeremy T. Teitelbaum sowie den Ausführungen aus „Modulsymbole für Funktionenkörper“ [Tr] von Matthias Traulsen, in welchen Modulsymbole für den Fall $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ behandelt werden.

Hierzu wenden wir uns erneut der zuvor erwähnten Operation der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ auf der Gruppe der Modulsymbole erster Art zu. Mittels dieser werden wir eine Abbildung der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ in die Gruppe M_1 definieren. Wir werden jedem Element aus $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ hierbei ein Modulsymbol zuordnen, das durch seine Operation auf einem festen einfachen Modulsymbol entsteht. Dieses feste Modulsymbol besteht zum einen aus dem Standard-2-Simplex \mathcal{C}_2 sowie dem zur Nebenklasse

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \langle R \rangle \cdot I \cdot K_\infty^\times$$

gehörenden 2-Simplex $\tilde{\mathcal{C}}_2$. Der 2-Simplex $\tilde{\mathcal{C}}_2$ besteht somit aus den Knoten $[0, 0]$, $[0, 1]$ sowie aus dem zum Vertreter

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty \end{pmatrix}$$

gehörenden Knoten.

Definition 4.13 *Sei $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$. Wir setzen*

$$(g)_1 := g[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2] = [g\mathcal{C}_2, g\tilde{\mathcal{C}}_2].$$

Ferner bezeichne $\Psi_1 : \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])] \rightarrow M_1$ den Homomorphismus, der von der Abbildung $g \rightarrow (g)_1$ induziert wird.

Im folgenden Lemma wird die Surjektivität der Abbildung nachgewiesen.

Lemma 4.14 *Die Abbildung Ψ_1 ist surjektiv.*

Beweis: Sei $[s_1, s_2]$ ein einfaches Modulsymbol erster Art. Da die Komponenten s_1, s_2 vom Niveau \mathcal{C}_2 sind, sowie eine gemeinsame Seite vom Niveau $\{[0, 0], [0, 1]\}$ besitzen, existiert ein $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ mit $g[s_1, s_2] = [\mathcal{C}_2, s]$, wobei s die Kante $\{[0, 0], [0, 1]\}$ besitzt. Die Gruppe $\mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\mathcal{C}_2)$ lässt den Simplex \mathcal{C}_2 fest und operiert transitiv auf den anderen Simplexes mit Kante $\{[0, 0], [0, 1]\}$. Daraus folgt die Existenz eines $\tilde{g} \in \mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\mathcal{C}_2)$ mit $\tilde{g}[\mathcal{C}_2, s] = [\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2]$. Insgesamt gilt daher

$$(g^{-1}\tilde{g}^{-1})_1 = g^{-1}\tilde{g}^{-1}[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2] = g^{-1}[\mathcal{C}_2, s] = [s_1, s_2].$$

□

Aufgrund des ersten Isomorphiesatzes genügt es nach vorigem Lemma, zur Bestimmung von M_1 den Kern von Ψ_1 zu kennen. Das nachfolgende Lemma zeigt, dass es hierbei ausreichend ist, den Kern der Einschränkung von Ψ_1 auf die Fixgruppe der Kante $\{[0, 0], [0, 1]\}$ zu berechnen.

Lemma 4.15 *Sei*

$$G_{0,0}^{(1)} := \mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\{[0, 0], [0, 1]\}) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q) \right\}$$

die Fixgruppe der Kante $\{[0, 0], [0, 1]\}$. Weiter sei $I_1 \trianglelefteq \mathbb{Z}[G_{0,0}^{(1)}]$ das Annulatorideal des einfachen Modulsymbols erster Art $[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2]$. Dann gilt

$$\mathrm{Kern}(\Psi_1) = \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])]I_1.$$

Beweis: Die Inklusion $\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])]I_1 \subseteq \mathrm{Kern}(\Psi_1)$ ist trivial.

Sei $g \in \mathrm{Kern}(\Psi_1)$ und sei X ein Vertretersystem des Quotienten $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])/G_{0,0}^{(1)}$. Dann existieren $g_x \in \mathbb{Z}[G_{0,0}^{(1)}]$ mit

$$g = \sum_{x \in X} xg_x.$$

Da jedes g_x eine Summe von Elementen des Stabilisators der Kante $\mathcal{C}_{10} = \{[0, 0], [0, 1]\}$ ist, berühren die Elemente $g_x[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2]$ jeweils die Kante \mathcal{C}_{10} als einzige vom Niveau \mathcal{C}_{10} , d.h. jeder in der Summe $g_x[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2]$ vorkommende 2-Simplex besitzt die Seite \mathcal{C}_{10} und keine andere Kante dieses Niveaus. Die Symbole $xg_x[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2]$ berühren daher jeweils genau eine Kante vom Niveau \mathcal{C}_{10} .

Da der Quotient $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])/G_{0,0}^{(1)}$ isomorph zur Menge der Kanten vom Niveau \mathcal{C}_{10} ist, wird jede Kante vom Niveau \mathcal{C}_{10} von höchstens einem solchen Symbol berührt. Die

4. Geschlossene Flächen über \mathbb{Z}

Summanden $xg_x[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2]$ berühren somit paarweise verschiedene Kanten. Nach Voraussetzung gilt

$$g[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2] = \sum_{x \in X} xg_x[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2] = 0.$$

Aus den vorigen Überlegungen folgt

$$xg_x[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2] = 0$$

für jeden einzelnen Summanden. Somit muss bereits

$$g_x[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2] = 0,$$

also $g_x \in I_1$ und folglich $g \in \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])]I_1$ gelten. □

Unser nächstes Ziel ist es daher, das Ideal I_1 , den Kern der auf $\mathbb{Z}[G_{0,0}^{(1)}]$ eingeschränkten Abbildung Ψ_1 , zu bestimmen. Hierzu führen wir zunächst die Matrix

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein. Es gilt $A_1^2 = 1$ sowie

$$A_1[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2] = [\tilde{\mathcal{C}}_2, \mathcal{C}_2].$$

Somit gilt für $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ die Gleichheit

$$(gA_1)_1 = -(g)_1.$$

Weiter benötigen wir die Matrix

$$B_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese erfüllt $B_1^3 = -1$ und bildet den Simplex \mathcal{C}_2 auf den Simplex $\tilde{\mathcal{C}}_2$ ab. Erneute Multiplikation mit B_1 liefert einen von \mathcal{C}_2 und $\tilde{\mathcal{C}}_2$ verschiedenen 2-Simplex s . Wendet man auf diesen ein weiteres Mal die Matrix B_1 an, so erhält man den Standard-2-Simplex \mathcal{C}_2 . Für ein einfaches Modulsymbol $(g)_1 = [s_1, s_2]$ gelten also die Gleichheiten

$$(gB_1)_1 = [s_2, s_3], (gB_1^2)_1 = [s_3, s_1] \text{ sowie } (gB_1^3)_1 = [s_1, s_2] = (g)_1$$

mit $s_3 \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ und somit

$$(g)_1 = -(gB_1)_1 - (gB_1^2)_1.$$

Mithilfe dieser Elemente ist es uns möglich, das Ideal I anzugeben.

Lemma 4.16 *Das Ideal I_1 wird erzeugt von*

- (i) den Elementen $1 - S$ mit $S \in \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\mathcal{C}_2) \cap \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\tilde{\mathcal{C}}_2) = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$,
- (ii) dem Element $1 + A_1$,
- (iii) dem Element $1 + B_1 + B_1^2$.

Beweis:

Sei J das von den gegebenen Elementen erzeugte Ideal von $\mathbb{Z}[G_{0,0}^{(1)}]$.

Die Inklusion $J \subseteq I_1$ folgt durch einfaches Nachrechnen und mittels der Bemerkungen zu den Matrizen A_1 und B_1 .

Wir wollen nun die umgekehrte Inklusion zeigen. Sei hierfür

$$\alpha = \sum_{g \in G_{0,0}^{(1)}} \lambda_g g \in I_1$$

und sei seine Länge durch

$$l(\alpha) = \sum |\lambda_g|$$

definiert. Wir werden im Verlaufe dieses Beweises ein zu α bezüglich J äquivalentes Element geringerer Länge bestimmen. Induktiv kann dann insgesamt ein zu α äquivalentes Element der Länge 0 bestimmt werden. Folglich ist α bezüglich J zu 0 äquivalent, liegt daher in J .

Als ersten Schritt werden wir nachweisen, dass α zu einem Element $\sum \tilde{\lambda}_g g$ äquivalent ist, für welches aus $\tilde{\lambda}_g \neq 0$ die Gleichheit $\tilde{\lambda}_{gA_1S} = 0$ für alle $S \in \text{Fix}(\mathcal{C}_2) \cap \text{Fix}(\tilde{\mathcal{C}}_2)$ folgt. Hierfür betrachten wir für $\lambda_g \neq 0 \neq \lambda_{gA_1S}$ die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \lambda_g g + \lambda_{gA_1S} g A_1 S &\equiv \lambda_g g + \lambda_{gA_1S} g A_1 - \lambda_{gA_1S} g A_1 (1 - S) && \pmod{J} \\ &\equiv \lambda_g g - \lambda_{gA_1S} g + \lambda_{gA_1S} g (1 + A_1) && \pmod{J} \\ &\equiv (\lambda_g - \lambda_{gA_1S}) g && \pmod{J}. \end{aligned}$$

Modulo J können wir somit den Koeffizienten λ_g durch $\lambda_g - \lambda_{gA_1S}$ ersetzen und den Summanden $\lambda_{gA_1S} g A_1 S$ entfernen. Induktiv liefert uns dieses Verfahren das gesuchte Element $\sum \tilde{\lambda}_g g$.

O.B.d.A. können wir also für $\lambda_g \neq 0$ die Gleichheit $\lambda_{gA_1S} = 0$ für alle $S \in \text{Fix}(\mathcal{C}_2) \cap \text{Fix}(\tilde{\mathcal{C}}_2)$ annehmen.

Sei $g \in G_{0,0}^{(1)}$ mit $\lambda_g \neq 0$ und sei

$$g[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2] = [s_1, s_2].$$

Nach Voraussetzung liegt α in I und erfüllt somit die Gleichheit $(\alpha)_1 = 0$. Daher muss ein $s_3 \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ sowie $g' \in G_{0,0}^{(1)}$ mit $\lambda_{g'} \neq 0$, $\text{sgn}(\lambda_{g'}) = \text{sgn}(\lambda_g)$ und

$$g'[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2] = [s_2, s_3]$$

existieren. Da nach Annahme $g' \neq gA_1S$ gilt, sind s_1 und s_3 verschieden.

Unser nächstes Ziel ist es, ein Element $\tau \in G_{0,0}^{(1)}$ mit

$$\tau s_1 = \mathcal{C}_2, \tau s_2 = \tilde{\mathcal{C}}_2 = B_1 \mathcal{C}_2 \text{ und } \tau s_3 = B_1 \tilde{\mathcal{C}}_2 = B_1^2 \mathcal{C}_2$$

4. Geschlossene Flächen über \mathbb{Z}

zu bestimmen. Hierbei müssen speziell diejenigen Fälle beachtet werden, in welchen ein s_i dem Standard-2-Simplex \mathcal{C}_2 entspricht.

Wir setzen

$$\tau = \begin{cases} \begin{pmatrix} z-x & y(x-z) & 0 \\ z-y & x(y-z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{falls } s_1 = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -y & 0 \\ 0 & z-y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{falls } s_1 = \mathcal{C}_2, s_2 = \begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & z-x & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{falls } s_1 = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s_2 = \mathcal{C}_2, s_3 = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -y & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{falls } s_1 = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s_3 = \mathcal{C}_2. \end{cases}$$

Man rechnet direkt nach, dass dieses τ die Anforderungen erfüllt. Es gilt also

$$\tau g[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2] = [\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2] \text{ und } \tau g'[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2] = B_1[\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2].$$

Somit liegen τg und $B_1^{-1}\tau g'$ in $\text{Fix}(\mathcal{C}_2) \cap \text{Fix}(\tilde{\mathcal{C}}_2)$, d.h. es existieren Elemente S_1, S_2 dieser Gruppe mit $\tau g = S_1$ und $\tau g' = B_1 S_2$. Diese Überlegungen führen uns zu folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \alpha - \tau^{-1}(1 + B_1 + B_1^2) && (\text{mod } J) \\ &\equiv \alpha - \tau^{-1}(1 - S_1) - \tau^{-1}S_1 - \tau^{-1}B_1(1 - S_2) - \tau^{-1}B_1S_2 - \tau^{-1}B_1^2 && (\text{mod } J) \\ &\equiv \alpha - \tau^{-1}\tau g - \tau^{-1}\tau g' - \tau^{-1}B_1^2 && (\text{mod } J) \\ &\equiv \alpha - g - g' - \tau^{-1}B_1^2 && (\text{mod } J). \end{aligned}$$

Da sowohl g als auch g' Bestandteil von α sind sowie $\text{sgn}(\lambda_g) = \text{sgn}(\lambda_{g'})$ gilt, haben wir die Länge im Fall $\lambda_g > 0$ um mindestens 1 reduziert. Ist $\lambda_g < 0$ betrachten wir analog die Äquivalenz

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \alpha + \tau^{-1}(1 + B_1 + B_1^2) && (\text{mod } J) \\ &\equiv \alpha + g + g' + \tau^{-1}B_1^2 && (\text{mod } J). \end{aligned}$$

Induktiv können wir auf diese Weise die Länge auf 0 reduzieren und somit $\alpha \in J$ nachweisen. □

Diese Ergebnisse lassen sich direkt auf die Gruppe der Modulsymbole erster Art bezüglich Γ übertragen.

Satz 4.17 Die Gruppe M_1^Γ ist isomorph zum Quotienten der freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}[\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])]$ modulo der Relationen

$$\begin{aligned}\Gamma g - \Gamma g S &= 0, \\ \Gamma g + \Gamma g A_1 &= 0, \\ \Gamma g + \Gamma g B_1 + \Gamma g B_1^2 &= 0.\end{aligned}$$

Dabei durchläuft S die Elemente von $\mathrm{Fix}(\mathcal{C}_2) \cap \mathrm{Fix}(\tilde{\mathcal{C}}_2)$.

Beweis: Da für $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ und $\gamma \in \Gamma$ die Gleichheit $\gamma(g)_1 = (\gamma g)_1$ gilt, ist dies eine direkte Folgerung aus Lemma 4.16. □

Der vorige Satz liefert uns eine Möglichkeit, ein Erzeugendensystem der Gruppe M_1^Γ und somit durch Projektion auch ein Vertretersystem der Gruppe \mathcal{M}_1 der Modulsymbole erster Art für den Quotientenkomplex $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ zu bestimmen. Aus der Endlichkeit der Menge $\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ folgt auch die Endlichkeit dieses Erzeugendensystems.

4.5 Modulsymbole zweiter Art

Da sich die Gruppe der Anfangsflächen als Schnitt der Gruppen \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 ergibt, möchten wir auch die Modulsymbole zweiter Art weiter untersuchen und diese Gruppe ebenfalls durch Erzeuger und Relationen beschreiben. Hierbei werden wir feststellen, dass sich die Ideen des vorigen Abschnittes leicht übertragen lassen.

Wie auch bei den Modulsymbolen erster Art definieren wir ein Standardsymbol, welches aus dem Standard-2-Simplex \mathcal{C}_2 und einem weiteren Simplex vom Niveau \mathcal{C}_2 besteht. Hierfür betrachten wir den durch die Nebenklasse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \langle R \rangle \cdot I \cdot K_\infty$$

gegebenen 2-Simplex $\hat{\mathcal{C}}_2$, welcher sich aus den Knoten $[0, 0], [1, 1]$ und dem zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gehörendem Knoten zusammensetzt.

Sei $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$. Wir setzen

$$(g)_2 := [g\mathcal{C}_2, g\hat{\mathcal{C}}_2]$$

und bezeichnen mit $\Psi_2 : \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])] \rightarrow M_2$ den Homomorphismus, der von der Abbildung $g \mapsto (g)_2$ induziert wird. Diese Abbildung besitzt dieselben Eigenschaften wie die im vorigen Abschnitt eingeführte Abbildung Ψ_1 . Wir werden diese in den folgenden Lemmata angeben.

4. Geschlossene Flächen über \mathbb{Z}

Lemma 4.18 Die Abbildung Ψ_2 ist surjektiv.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 4.14. □

Somit kann die Gruppe M_2 mit dem Quotienten von $\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])]$ modulo des Kerns von Ψ_2 identifiziert werden. Auch im Fall von Ψ_2 kann der Kern durch Betrachtung einer Teilmenge der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ bestimmt werden.

Lemma 4.19 Sei

$$G_{0,0}^{(2)} := \mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\{[0,0], [1,1]\}) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q) \right\}$$

die Fixgruppe der Kante $\{[0,0], [1,1]\}$. Weiter sei $I_2 \trianglelefteq \mathbb{Z}[G_{0,0}^{(2)}]$ das Annulatorideal des einfachen Modulsymbols erster Art $[\mathcal{C}_2, \hat{\mathcal{C}}_2]$. Dann gilt

$$\mathrm{Kern}(\Psi_2) = \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])]I_2.$$

Beweis: Die Aussage kann auf die selbe Weise wie Lemma 4.15 bewiesen werden. □

Zur Angabe des Ideals I_2 müssen erneut zwei Matrizen eingeführt werden. Dies ist zum einen die Matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

welche $A_2^2 = 1$ sowie für alle $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ die Gleichheit

$$(gA_2)_2 = -(g)_2$$

erfüllt. Des weiteren führen wir die Matrix

$$B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ein, für welche $B_2^3 = -1$ gilt. Sei $(g)_2 = [s_1, s_2]$ ein einfaches Modulsymbol. Dann gelten die Gleichheiten

$$(gB_2)_2 = [s_2, s_3], (gB_2^2)_2 = [s_3, s_1] \text{ sowie } (gB_2^3)_2 = [s_1, s_2] = (g)_2$$

mit $s_3 \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ und somit

$$(g)_2 = -(gB_2)_2 - (gB_2^2)_2.$$

Diese Matrizen ermöglichen es uns, das Ideal I_2 zu beschreiben.

Lemma 4.20 *Das Ideal I_2 wird erzeugt von*

- (i) *den Elementen $1 - S$ mit $S \in \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\mathcal{C}_2) \cap \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\widehat{\mathcal{C}}_2) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$,*
- (ii) *dem Element $1 + A_2$,*
- (iii) *dem Element $1 + B_2 + B_2^2$.*

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 4.16, lediglich die dort auftretende Matrix τ muss abgeändert werden. So setzen wir in diesem Falle

$$\tau = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z-x & y(x-z) \\ 0 & z-y & x(y-z) \end{pmatrix}, & \text{falls } s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & z-y \end{pmatrix}, & \text{falls } s_1 = \mathcal{C}_2, s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-x \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix}, & \text{falls } s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, s_2 = \mathcal{C}_2, s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix}, & \text{falls } s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, s_3 = \mathcal{C}_2. \end{cases}$$

□

Somit können wir auch die Gruppe der Modulsymbole zweiter Art bezüglich Γ beschreiben.

Satz 4.21 *Die Gruppe M_2^Γ ist isomorph zum Quotienten der freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}[\Gamma \setminus \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])]$ modulo der Relationen*

$$\begin{aligned} \Gamma g - \Gamma g S &= 0, \\ \Gamma g + \Gamma g A_2 &= 0, \\ \Gamma g + \Gamma g B_2 + \Gamma g B_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Dabei durchläuft S die Elemente von $\text{Fix}(\mathcal{C}_2) \cap \text{Fix}(\widehat{\mathcal{C}}_2)$.

Beweis: Siehe Beweis zu Satz 4.17.

□

4.6 Modulsymbole für $\Gamma_0(N)$

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir vermehrt spezielle Kongruenzuntergruppen der Form

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \gamma \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \mid \gamma \equiv \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

mit $a, b, c, e, f, i \in \mathbb{F}_q[T]$ betrachten. Daher möchten wir in diesem Abschnitt die Gruppen der Modulsymbole für besagte Gruppen betrachten.

Für die Bestimmung der Modulsymbole benötigen wir ein Vertretersystem der

$$\Gamma_0(N) \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]).$$

Hierzu zitieren wir zunächst ein Lemma aus [Mü], welches angibt, unter welchen Bedingungen zwei Elemente der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ unter der Operation der $\Gamma_0(N)$ äquivalent sind.

Lemma 4.22 Sei $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$. Für eine Matrix $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ \tilde{d} & \tilde{e} & \tilde{f} \\ \tilde{g} & \tilde{h} & \tilde{i} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ gilt $\tilde{A} \in \Gamma_0(N)A$ genau dann, wenn ein Polynom $y \in \mathbb{F}_q[T]$ sowie zu N teilerfremde Polynome $x, z \in \mathbb{F}_q[T]$ mit

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{d} & \tilde{e} & \tilde{f} \\ \tilde{g} & \tilde{h} & \tilde{i} \end{pmatrix} \pmod{N}$$

existieren.

Beweis: Siehe [Mü]. □

Das vorangegangene Lemma zeigt uns, in welcher Weise wir eine Matrix abändern können, ohne die jeweilige Äquivalenzklasse zu verlassen. Insbesondere sehen wir, dass die erste Zeile beliebig gewählt werden kann, so lange die so entstandene Matrix weiterhin über $\mathbb{F}_q[T]$ invertierbar ist. Mithilfe dieser Bedingungen ist es uns möglich, im Falle, dass N irreduzibel ist, ein vollständiges Vertretersystem anzugeben.

Lemma 4.23 Sei $N \in \mathbb{F}_q[T]$ irreduzibel und sei X ein vollständiges Vertretersystem von $\mathbb{F}_q[T]/(N)$. Dann ist die Menge

$$\begin{aligned} X_0(N) &:= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \mid d, g, h \in X \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \mid g, h \in X \right\} \\ &\cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 \\ g & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid d, g \in X \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ g & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid g \in X \right\} \\ &\cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & e & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid e \in X \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ein vollständiges Vertretersystem von $\Gamma_0(N) \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$.

Beweis: Da N irreduzibel ist, ist $\mathbb{F}_q[T]/(N)$ ein Körper. Somit ist jedes Element aus $\mathbb{F}_q[T] \setminus \{0\}$ modulo N invertierbar. Wir können jeweils den letzten nichttrivialen Eintrag der dritten Zeile durch Multiplikation mit dem Inversen modulo N normieren. Wir erhalten somit für die untere Zeile die Möglichkeiten

$$(g \ h \ 1), (g \ 1 \ 0) \text{ und } (1 \ 0 \ 0),$$

wobei g und h ein Vertretersystem von $\mathbb{F}_q[T]/(N)$ durchlaufen.

Die Normierung eines Eintrages der letzten Zeile ermöglicht es uns immer, durch Addition eines entsprechenden Vielfachens der dritten Zeile zur zweiten Zeile, einen Eintrag der mittleren Zeile zu eliminieren. Anschließend können wir auch schon zuvor bei der unteren Zeile auch in der zweiten Reihe den letzten nichttrivialen Eintrag normieren. Insgesamt ergeben sich somit für die unteren beiden Zeilen folgende Möglichkeiten

$$\begin{pmatrix} d & 1 & 0 \\ g & h & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g & h & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & 0 & 1 \\ g & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei d, e, g und h ein vollständiges Vertretersystem von $\mathbb{F}_q[T]/(N)$ durchlaufen.

Wie man leicht überprüfen kann, können die unteren beiden Zeilen jeweils durch eine der Zeilen

$$(1 \ 0 \ 0), (0 \ 1 \ 0) \text{ oder } (0 \ 0 \ 1)$$

zu einer Matrix mit Determinante ± 1 , also einem Element der $GL_3(\mathbb{F}_q[T])$ ergänzt werden. □

Wir haben gesehen, dass die Äquivalenzklasse einer Matrix modulo $\Gamma_0(N)$ unabhängig von der Wahl der oberen Zeile ist. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 4.24 Sei $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{F}_q[T])$. Wir definieren das Manin-Symbol $\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}_N$ als

$$\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}_N := \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Nach den Erkenntnissen der letzten beiden Abschnitte lassen sich die Gruppen $M_1^{\Gamma_0(N)}$ und $M_2^{\Gamma_0(N)}$ mithilfe der Manin-Symbole beschreiben.

Lemma 4.25 a) Die Gruppe $M_1^{\Gamma_0(N)}$ ist isomorph zur freien abelschen Gruppe auf den Manin-Symbolen modulo der Relationen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}_N - \begin{pmatrix} \alpha d & \gamma e & \beta d + \delta e + \varepsilon f \\ \alpha g & \gamma h & \beta g + \delta h + \varepsilon i \end{pmatrix}_N &= 0, \\ \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}_N + \begin{pmatrix} e & d & f \\ h & g & i \end{pmatrix}_N &= 0, \end{aligned}$$

4. Geschlossene Flächen über \mathbb{Z}

$$\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}_N + \begin{pmatrix} -e & d+e & -f \\ -h & g+h & -i \end{pmatrix}_N + \begin{pmatrix} -d-e & d & f \\ -g-h & g & i \end{pmatrix}_N = 0,$$

für $\alpha, \gamma, \varepsilon \in \mathbb{F}_q^\times$ und $\beta, \delta \in \mathbb{F}_q$.

b) Die Gruppe $M_2^{\Gamma_0(N)}$ ist isomorph zur freien abelschen Gruppe auf den Manin-Symbolen modulo der Relationen

$$\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}_N - \begin{pmatrix} \alpha d & \beta d + \delta e & \gamma d + \varepsilon f \\ \alpha g & \beta g + \delta h & \gamma g + \varepsilon i \end{pmatrix}_N = 0,$$

$$\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}_N + \begin{pmatrix} d & f & e \\ g & i & h \end{pmatrix}_N = 0,$$

$$\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}_N + \begin{pmatrix} -d & -f & e+f \\ -g & -i & h+i \end{pmatrix}_N + \begin{pmatrix} d & -e-f & e \\ g & -h-i & h \end{pmatrix}_N = 0,$$

für $\alpha, \delta, \varepsilon \in \mathbb{F}_q^\times$ und $\beta, \gamma \in \mathbb{F}_q$.

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus Satz 4.17 und Satz 4.21.

□

5. Berechnung einer Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$

Im vorigen Kapitel haben wir die Bestimmung der Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ theoretisch behandelt. Genauer gesagt wurden die zugehörigen Summen von 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ vom Niveau \mathcal{C}_2 , d.h. das Urbild $\mathcal{U} = \Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}})$, beschrieben.

Wir werden ausgehend von diesen Überlegungen des letzten Kapitels erläutern, wie aus einem Vertretersystem von $\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ algorithmisch in endlicher Zeit eine Basis der Gruppe \mathcal{U} berechnet werden kann. Durch Abbilden dieser Basis mittels der Funktion Υ erhalten wir eine Basis der Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ der geschlossenen Flächen über \mathbb{Z} .

Dieses Verfahren zur Bestimmung einer Basis von \mathcal{U} wurde im Zuge der Arbeit für den Fall $\Gamma = \Gamma_0(N)$ für irreduzible Polynome $N \in \mathbb{F}_q[T]$ im Computer-Algebra-System Mathematica implementiert. Daher gehen wir an einigen Stellen ebenfalls auf die programmiertechnische Umsetzung ein. Die entsprechende Mathematica-Datei findet sich in der Anlage zur Arbeit.

Die einzelnen Zwischenschritte werden wir anhand eines Beispiels für den Fall $q = 2$ erläutern.

5.1 Ablauf des Verfahrens

Bevor wir das Verfahren im Detail betrachten, beschreiben wir zunächst den groben Ablauf dessen. Wir werden dafür im Folgenden die einzelnen Schritte aufführen, welche bei der Bestimmung Basis von $\Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}})$, ausgehend von einem Vertretersystem V_Γ von $\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$, durchlaufen werden.

Eingabe

- Vertretersystem V_Γ von $\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$

Ablauf

- (1) Bestimmen einer Basis der Gruppe M_1^Γ bzw. M_2^Γ

- (1.1) Reduktion von V_Γ bezüglich der Relation

$$\Gamma g + \Gamma g A_1 = 0 \text{ bzw. } \Gamma g + \Gamma g A_2 = 0$$

5. Berechnung einer Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$

(1.2) Reduktion des in (1.1) reduzierten Vertretersystems bezüglich der Relation

$$\Gamma g - \Gamma g S = 0,$$

wobei S alle Elemente des Schnittes $\text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\mathcal{C}_2) \cap \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\tilde{\mathcal{C}}_2)$ bzw. $\text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\mathcal{C}_2) \cap \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\hat{\mathcal{C}}_2)$ durchläuft

(1.3) Reduktion des in (1.2) reduzierten Vertretersystems bezüglich der Relation

$$\Gamma g + \Gamma g B_1 + \Gamma g B_1^2 = 0 \text{ bzw. } \Gamma g + \Gamma g B_2 + \Gamma g B_2^2 = 0$$

(1.4) Erstellen von Basen der Gruppen M_1^Γ bzw. M_2^Γ mittels der Zuordnung $(g)_1 = [g\mathcal{C}_2, g\tilde{\mathcal{C}}_2]$ bzw. $(g)_2 = [g\mathcal{C}_2, g\hat{\mathcal{C}}_2]$

(2) Bestimmen einer Basis der Gruppe \mathcal{M}_1 bzw. \mathcal{M}_2 mittels der Projektion π_Γ

(3) Bestimmen einer Basis der Gruppe der Anfangsflächen mittels $\mathcal{A}_\Gamma = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$

(4) Bestimmen einer Basis der Gruppe $\mathcal{U} = \Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}})$

(4.1) Bestimmen einer Basis der kleinsten Untergruppe $\mathcal{U}^{(1)} \leq \mathcal{A}_\Gamma$, welche alle Elemente $\sum a_\lambda [s_\lambda]$ mit $\sum a_\lambda [t_{\lambda,1}] = 0$ enthält, wobei $[t_{\lambda,1}] \in \mathcal{F}_\Gamma([s_\lambda])$ die Kante vom Niveau $\{[0, n-1], [1, n]\}$ bezeichne

(4.2) Bestimmen einer Basis der kleinsten Untergruppe $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}^{(1)}$, welche alle Elemente $\sum a_\lambda [s_\lambda]$ mit $\sum a_\lambda [t_{\lambda,2}] = 0$ enthält, wobei $[t_{\lambda,2}] \in \mathcal{F}_\Gamma([s_\lambda])$ die Kante vom Niveau $\{[n-1, n-1], [n-1, n]\}$ bezeichne

Ausgabe

- Basis (U_1, \dots, U_r) der Gruppe $\mathcal{U} = \Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}})$

Wir werden die einzelnen Punkte in den folgenden Abschnitten näher erklären.

5.2 Bestimmen der Modulsymbole M_1^Γ bzw. M_2^Γ für Γ

In diesem Abschnitt möchten wir die Bestimmung eines Erzeugendensystems der Gruppe M_1^Γ der Modulsymbole erster Art erläutern. Für die Gruppe M_2^Γ der Modulsymbole zweiter Art kann analog verfahren werden.

In Satz 4.17 haben wir die Gruppe M_1^Γ durch Erzeuger und Relationen beschrieben. So haben wir gesehen, dass M_1^Γ isomorph zur freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}[\Gamma \setminus \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])]$ modulo der Relationen

$$(1) \quad \Gamma g + \Gamma g A_1 = 0,$$

$$(2) \quad \Gamma g - \Gamma g S = 0,$$

5.2 Bestimmen der Modulsymbole M_1^Γ bzw. M_2^Γ für Γ

$$(3) \quad \Gamma g + \Gamma g B_1 + \Gamma g B_1^2 = 0$$

ist. Dabei durchläuft S die Elemente von $\text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\mathcal{C}_2) \cap \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\tilde{\mathcal{C}}_2)$. Das zu reduzierende Vertretersystem der $\Gamma \backslash \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ können wir als Liste V_Γ abspeichern. Aufgrund der Endlichkeit von V_Γ kann in endlich vielen Schritten stets zu jeder Matrix $g \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ ein Element $g_v \in V_\Gamma$ mit $\Gamma g = \Gamma g_v$ bestimmt werden. Für den Fall $\Gamma = \Gamma_0(N)$ mit irreduziblem $N \in \mathbb{F}_q[T]$ haben wir in Lemma 4.23 ein Vertretersystem bestimmt. Der Beweis zu Lemma 4.23 zeigt weiter, wie in diesem Fall zu jeder Matrix $g \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ algorithmisch ein kanonischer Vertreter der Nebenklasse aus V_Γ bestimmt werden kann.

5.2.1 Reduktion bezüglich der ersten Relation

Zum Auswerten der ersten Relation bestimmen wir für das erste Element g der Liste V_Γ den kanonischen Vertreter \tilde{g} von gA_1 . Gilt $g = \tilde{g}$, so speichern wir g in einer neu angelegten Liste $M_1^{(0)}$, der zu Null äquivalenten ab. Anderenfalls fügen wir einer neu angelegten Liste $M_1^{(1)}$ das Paar

$$((g, 1), (\tilde{g}, -1))$$

hinzu. Anschließend entfernen wir die Elemente g und \tilde{g} aus der Liste V_Γ und beginnen erneut mit der Untersuchung des ersten Elements der gekürzten Liste V_Γ .

5.2.2 Reduktion bezüglich der zweiten Relation

Bei der Auswertung der zweiten Relation verfahren wir nahezu analog zur Auswertung der ersten Relation. Beginnend beim ersten Element g des ersten Paares der Liste $M_1^{(1)}$ berechnen wir die kanonischen Vertreter der Produkte gS für alle

$$S \in \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\mathcal{C}_2) \cap \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\tilde{\mathcal{C}}_2) = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

und erhalten so Elemente $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m$. Anschließend vereinigen wir all diejenigen Paare aus $M_1^{(1)}$, welche eines der Elemente \tilde{g}_i enthalten, samt Koeffizienten zu einer Menge. Ist eines der Elemente $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m$ in der Liste der zu Null äquivalenten Elemente enthalten, so fügen wir die Matrizen der zuvor bestimmten Menge dieser Liste hinzu. Anderenfalls speichern wir die Vereinigungsmenge als Eintrag einer neu angelegten Liste $M_1^{(2)}$ ab.

Anschließend löschen wir die in der Vereinigungsmenge vorkommenden Paare aus der Liste $M_1^{(1)}$ und wiederholen das Verfahren mit dem ersten Eintrag des ersten Paares der verkürzten Liste.

5. Berechnung einer Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$

5.2.3 Reduktion bezüglich der dritten Relation

Wenden wir uns der Reduktion bezüglich der dritten Relation zu. Unser Vorgehen basiert hierbei auf der bereits zuvor erwähnten Arbeit „Modulsymbole für Funktionenkörper“ [Tr] von Matthias Traulsen, in der Modulsymbole für den Fall der $GL_2(\mathbb{F}_q[T])$ untersucht werden.

Sei $M_1^{(3)}$ die Liste der jeweils ersten Elemente der Einträge der Liste $M_1^{(2)}$. Weiter sei l die Länge der Liste $M_1^{(3)}$.

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem, das wir erhalten, in dem wir für jedes $g \in M_1^{(3)}$ in der Gleichung

$$g + gB_1 + gB_1^2 = 0$$

die Elemente gB_1 und gB_1^2 durch die unter der ersten und zweiten Relation äquivalenten Elemente aus $M_1^{(3)}$ mit entsprechendem Vorzeichen ersetzen. Ist hierbei eines der Elemente von gB_1 und gB_1^2 zu Null äquivalent, so wird der entsprechende Summand gestrichen.

Das so entstandene lineare Gleichungssystem können wir durch eine $l \times l$ -Matrix mit Einträgen darstellen, welches wir beispielsweise mittels des Gauß-Algorithmus reduzieren. Sei NPS die Menge der Nicht-Pivotstellen der reduzierten Matrix.

Im Folgenden werden wir zeigen, dass die Menge

$$\{g_i \in M_1^{(3)} \mid i \in \text{NPS}\}$$

eine Basis des Quotientenmoduls $\langle M_1^{(3)} \rangle_{\mathbb{Z}} / R_3$ ist, wobei R_3 den Untermodul bezeichnet, welcher von den zuvor durch die Gleichungen beschriebenen Relationen erzeugt wird.

Es ist offensichtlich, dass die Mächtigkeit der Basis von $\langle M_1^{(3)} \rangle_{\mathbb{Z}} / R_3$ der Anzahl der Nicht-Pivotstellen entspricht. Es bleibt die lineare Unabhängigkeit der Menge zu zeigen. Seien $b_i \in \mathbb{Z}$ mit

$$\sum_{i \in \text{NPS}} b_i g_i + R_3 = 0 + R_3.$$

Dann ist die Summe $\sum b_i g_i$ durch die Relation in R_3 bzw. somit die Gleichung $\sum b_i g_i = 0$ durch die zuvor aufgeführten linearen Gleichungen darstellbar. Da es sich jedoch bei den Indizes i aus NPS um Nicht-Pivotstellen handelt, ist dies nur für $b_i = 0$ möglich.

5.2.4 Erstellen einer Basis von M_1^Γ

Bezeichnet $(g)_1$ das zu einer Matrix $g \in GL_3(\mathbb{F}_q[T])$ gehörende Modulsymbol erster Art, so erhalten wir mit

$$\{(g_i)_1 \mid g_i \in M_1^{(3)}, i \in \text{NPS}\}$$

ein Vertretersystem der Basis der Gruppe M_1^Γ der Modulsymbole erster Art bezüglich Γ .

5.2.5 Ein erstes Beispiel

Wie zuvor erwähnt, möchten wir ein erstes Beispiel betrachten, welches wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels wiederholt aufgreifen werden.

Beispiel 5.1 Es sei $q = 2$ und $\Gamma = \Gamma_0(N)$ mit $N = T^2 + T + 1 \in \mathbb{F}_q[T]$. In diesem Fall besitzt die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[\Gamma_0(N) \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])]$ ein Erzeugendensystem der Mächtigkeit 105. Nach Anwendung der ersten Reduktion zur Bestimmung der Gruppe M_1^Γ der Modulsymbole erster Art, reduziert sich die Liste auf 49 Elemente. Die weitere Reduktion nach der zweiten Relation ergibt eine Liste von 15 Elementen. Durch die abschließende Reduktion modulo der dritten Relation erhalten wir

$$M_1^\Gamma = \left\langle \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & T & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \right. \\ \left. \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & T & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_1 \right\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Die Mächtigkeit der Listen nach Reduktion modulo der Relationen zur Bestimmung der Gruppe M_2^Γ verhalten sich analog. Der Algorithmus liefert

$$M_2^\Gamma = \left\langle \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \right. \\ \left. \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & T+1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix}\right)}_2 \right\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Für $i \in \{1, 2\}$ und $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ bezeichnet hierbei $\overline{(g)}_i$ die Nebenklasse des Elements $(g)_i \in M_i$ bezüglich der Gruppe $\langle m - \gamma m \mid m \in M_i, \gamma \in \Gamma \rangle_{\mathbb{Z}}$.

5.3 Bestimmen der Modulsymbole \mathcal{M}_1 bzw. \mathcal{M}_2 für $\Gamma \backslash \mathcal{B}$

Zur anschließenden Bestimmung der Anfangsflächen \mathcal{A}_Γ als Schnitt der Gruppen

$$\mathcal{M}_1 = \pi_\Gamma(M_1^\Gamma) \text{ und } \mathcal{M}_2 = \pi(M_2^\Gamma)$$

projizieren wir das Erzeugendensystem von M_1^Γ bzw. M_2^Γ auf $\Gamma \backslash \mathcal{B}$.

Hierzu bringen wir zunächst all diejenigen im Erzeugendensystem von M_1^Γ bzw. M_2^Γ vorkommenden Simplizes, die im Quotientenkomplex $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ zueinander äquivalent sind, auf einen gemeinsamen Vertreter. Diese Anpassung geschieht im Hinblick auf die folgende Bestimmung der Anfangsflächen gleichzeitig für die Erzeugendensysteme von M_1^Γ und M_2^Γ .

In der programmiertechnischen Umsetzung liegt an diesem Punkt die Gruppe M_1^Γ bzw. M_2^Γ als Liste der Form

$$\{ ((g_{i1}, 1), (g_{i2}, -1)) \mid i = 1, \dots, k \}$$

5. Berechnung einer Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$

vor, wobei die Matrix $g_{ij} \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ den Simplex $g_{ij}\mathcal{C}_2 \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}(\mathcal{B})$ repräsentiert.

Um zu überprüfen, ob für zwei Matrizen $g_1, g_2 \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ die Gleichheit $[g_1\mathcal{C}_2] = [g_2\mathcal{C}_2]$ gilt, erinnern wir an Satz 1.21, nach welchem die Simplizes $g_1\mathcal{C}_2$ und $g_2\mathcal{C}_2$ genau dann unter der Operation der Kongruenzuntergruppe Γ äquivalent sind, wenn ein $g \in \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\mathcal{C}_2)$ mit $g_2gg_1^{-1} \in \Gamma$ existiert. Da die Gruppe $\text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\mathcal{C}_2)$ endlich ist, kann die Äquivalenz der Elemente $g_1\mathcal{C}_2$ und $g_2\mathcal{C}_2$ somit in endlich vielen Schritten entschieden werden.

Dies ermöglicht es uns, die Liste

$$\{ ((g_{i1}, 1), (g_{i2}, -1)) \mid i = 1, \dots, k \}$$

durch eine Liste

$$\{ ((\widetilde{g}_{i1}, 1), (\widetilde{g}_{i2}, -1)) \mid i = 1, \dots, k \}$$

mit $[\widetilde{g}_{ij}\mathcal{C}_2] = [g_{ij}\mathcal{C}_2]$ zu ersetzen, so dass die Matrizen $\widetilde{g}_{i_1j_1}$ und $\widetilde{g}_{i_2j_2}$ genau dann gleich sind, wenn die zugehörigen Simplizes unter Γ äquivalent sind. Diese Liste spiegelt dann die projizierte Basis der Gruppe M_1^Γ bzw. M_2^Γ wider.

Die projizierten Erzeugendensysteme liefern uns Auskunft darüber, welche 2-Simplizes in $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ an einer Kante vom Niveau $\{[0, 0], [0, 1]\}$ bzw. $\{[0, 0], [1, 1]\}$ zusammenhängen. Wir erhalten so eine Liste von Listen von 2-Simplizes, die eine gemeinsame Seite vom Niveau $\{[0, 0], [0, 1]\}$ bzw. $\{[0, 0], [1, 1]\}$ besitzen. Indem wir für jede solche Liste $\{[s_1], \dots, [s_m]\}$ die Differenzen $[s_1] - [s_i]$ für $i = 2, \dots, m$ bilden, erhalten wir eine Basis von \mathcal{M}_1 bzw. \mathcal{M}_2 .

Wir führen an dieser Stelle Beispiel 5.1 fort.

Beispiel 5.2 Durch das oben beschriebene Verfahren können wir aus den in Beispiel 5.1 bestimmten Gruppen M_1^Γ und M_2^Γ die Gruppen \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 ermitteln. Die Simplizes aus $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}(\mathcal{B})$ werden hierbei durch Matrizen der $\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ repräsentiert. Die Rechnungen liefern

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = & \left\langle \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & T & 1 \end{pmatrix} \right], \right. \\ & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right], \\ & \left. \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\rangle_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 = & \left\langle \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \right. \\ & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right], \\ & \left. \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\rangle_{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

5.4 Bestimmen der Anfangsflächen \mathcal{A}_Γ

Wie zuvor erwähnt, ist die Gruppe \mathcal{A}_Γ der Anfangsflächen der Schnitt der Gruppen \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 . Zur Vereinfachung der Rechnung beschränken wir uns bei der Schnittbildung auf das Erzeugnis derjenigen Modulsymbole des Erzeugendensystems, welche aus 2-Simplizes bestehen, welche sowohl in \mathcal{M}_1 sowie \mathcal{M}_2 auftauchen. Wir bestimmen \mathcal{A}_Γ als den freien Untermodul von \mathcal{M}_1 , der durch die so reduzierte Menge von Modulsymbolen erzeugt wird. Hierzu nutzen wir das aus der linearen Algebra bekannte Verfahren zur Bestimmung einer Basis eines Untermoduls eines freien Moduls.

Kommen wir zurück zu unserem Beispiel.

Beispiel 5.3 Die oben beschriebene Berechnung des Schnittes der in Beispiel 5.2 bestimmten Gruppen \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Gamma = \langle & \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \\ & - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix} \right], \\ & + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \rangle_{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Die Matrizen repräsentieren hierbei erneut Simplizes aus $\mathcal{S}_{C_2}(\mathcal{B})$.

5.5 Bestimmen der Gruppe \mathcal{U}

In Kapitel 4 haben wir das Urbild $\mathcal{U} = \Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}})$ als Untermodul des freien \mathbb{Z} -Moduls \mathcal{A}_Γ der Anfangsflächen beschrieben. Eine Anfangsfläche

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} a_\lambda [s_\lambda] \in \mathcal{A}_\Gamma$$

liegt dabei genau dann in \mathcal{U} , wenn

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} a_\lambda [t_{\lambda,1}] = 0 = \sum_{\lambda=0}^{\nu} a_\lambda [t_{\lambda,2}]$$

gilt, wobei $[t_{\lambda,1}] \in \mathcal{F}_\Gamma([s_\lambda])$ die Kante vom Niveau $\{[0, n-1], [1, n]\}$ sowie $[t_{\lambda,2}] \in \mathcal{F}_\Gamma([s_\lambda])$ die Kante vom Niveau $\{[n-1, n-1], [n-1, n]\}$ bezeichne.

Die Bestimmung erfolgt in zwei Schritten. So ermitteln wir zunächst die Basis eines Untermoduls $\mathcal{U}^{(1)}$ von \mathcal{A}_Γ , der all diejenigen Anfangsflächen beinhaltet, die die Bedingung $\sum a_\lambda [t_{\lambda,1}] = 0$ erfüllen. Anschließend bestimmen wir durch Untersuchung des Verhaltens an den Kanten vom Niveau $\{[n-1, n-1], [n-1, n]\}$ eine Basis der Gruppe \mathcal{U} als Untermodul des zuvor bestimmten freien Moduls $\mathcal{U}^{(1)}$.

5. Berechnung einer Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$

5.5.1 Bestimmen einer Basis von $\mathcal{U}^{(1)}$

Sei

$$\{A_1, \dots, A_m\}$$

die zuvor bestimmte Basis der Gruppe \mathcal{A}_Γ . Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, dass jedem 2-Simplex $[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ vom Niveau \mathcal{C}_2 durch Fortsetzung genau eine Kante $[t_s] \in \mathcal{S}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ vom Niveau $t := \{[0, n-1], [1, n]\}$ zugeordnet werden kann. Auf diese Weise ordnen wir jeder Anfangsfläche

$$A_k := \sum_{\lambda=1}^{\nu_k} a_{s_{k\lambda}} [s_{k\lambda}]$$

die Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu_k} a_{s_{k\lambda}} [t_{s_{k\lambda}}]$$

von Kanten zu.

Bei der erfolgten programmiertechnischen Umsetzung liegt die bisher bestimmte Basis $\{A_1, \dots, A_m\}$ der Gruppe der Anfangsflächen als Liste der Form

$$\left\{ \{ (g_{k\lambda}, a_{k\lambda}) \mid \lambda = 1, \dots, \nu_k \} \mid k = 1, \dots, m \right\}$$

vor, wobei die Matrix $g_{k\lambda}$ den Simplex $[g_{k\lambda}\mathcal{C}_2] \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ repräsentiert.

Nach Satz 1.21 sind für $g_1, g_2 \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ die Simplizes $g_1 t$ und $g_2 t$ genau dann unter Γ äquivalent, wenn ein $g \in \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(t)$ mit $g_2 g g_1^{-1} \in \Gamma$ existiert. Die Äquivalenz zweier Simplizes $g_1 t$ und $g_2 t$ kann daher in endlich vielen Schritten getestet werden.

Aus der Liste

$$\left\{ \{ (g_{k\lambda}, a_{k\lambda}) \mid \lambda = 1, \dots, \nu_k \} \mid k = 1, \dots, m \right\}$$

kann daher in endlicher Zeit eine Liste

$$\left\{ \{ (g_{k\lambda}, \widetilde{g_{k\lambda}}, a_{k\lambda}) \mid \lambda = 1, \dots, \nu_k \} \mid k = 1, \dots, m \right\}$$

mit $[\widetilde{g_{k\lambda}} t] \in \mathcal{F}_\Gamma([g_{k\lambda}\mathcal{C}_2])$ gewonnen werden, wobei zwei Einträge $\widetilde{g_{k_1\lambda_1}}$ und $\widetilde{g_{k_2\lambda_2}}$ genau dann gleich sind, wenn $[\widetilde{g_{k_1\lambda_1}} t] = [\widetilde{g_{k_2\lambda_2}} t]$ gilt.

Anschließend erstellen wir eine Liste aller im fortgesetzten Erzeugendensystem vorkommenden Kanten

$$\{[t_1], \dots, [t_r]\}$$

vom Niveau $\{[0, n-1], [1, n]\}$ und stellen die Summen

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu_k} a_{s_{k\lambda}} [t_{s_{k\lambda}}]$$

als Koeffizientenvektoren bezüglich der Basis $\{[t_1], \dots, [t_r]\}$ dar.

Wir haben somit jeder erzeugenden Anfangsfläche A_k einen Vektor $v_k \in \mathbb{Z}^r$ zugeordnet, der ihr Verhalten an den Kanten vom Niveau $\{[0, n-1], [1, n]\}$ widerspiegelt.

Nach dem aus der linearen Algebra bekannten Verfahren zu Bestimmung von Basen von Untermoduln freier Moduln, suchen wir für $k = 1, \dots, m$, falls vorhanden, eine \mathbb{Z} -Linearkombination

$$\sum_{i=1}^k b_{ik} A_i \text{ mit } \sum_{i=1}^k b_{ik} v_i = 0$$

mit nichttriviale und betragsmäßig minimalen b_{kk} .

Wir berechnen daher für $k = 1, \dots, m$ die Lösungsmenge \mathbb{L} des homogenen Gleichungssystems

$$(v_1 \dots v_k) = 0$$

und bestimmen, falls vorhanden, ein Element

$$(b_{1k}, \dots, b_{kk}) \in \mathbb{L}$$

mit $b_{kk} \neq 0$ sowie $|b_{kk}|$ minimal. Existiert ein solches Element, so liegt die Summe $\sum_{i=1}^k b_{ik} A_i$ in einer Basis von $\mathcal{U}^{(1)}$.

Beispiel 5.4 Ausgehend von der in Beispiel 5.3 bestimmten Basis der Anfangsflächen ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{(1)} = \langle & \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \\ & - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix} \right] \rangle_{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

5.5.2 Bestimmen einer Basis von \mathcal{U}

Zur Bestimmung einer Basis der Gruppe \mathcal{U} verfahren wir analog wie im vorigen Abschnitt, beginnen jedoch diesmal mit dem Erzeugendensystem von $\mathcal{U}^{(1)}$ und betrachten die Fortsetzung an den Kanten vom Niveau $\{[n-1, n-1], [n-1, n]\}$.

Mithilfe des soeben vorgestellten Verfahrens können wir aus dem in Beispiel 5.3 gewonnenen Erzeugendensystem von \mathcal{A}_Γ eine Basis der Gruppe \mathcal{U} des Urbildes der geschlossenen Flächen über \mathbb{Z} bestimmen.

Beispiel 5.5 Jede der Flächen der in Beispiel 5.4 bestimmten Basis aus $\mathcal{U}^{(1)}$ erfüllt in diesem Fall die zweite Bedingung. Es gilt somit

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(1)}.$$

5. Berechnung einer Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$

5.6 Zusammenfassung

Insgesamt haben wir in diesem Kapitel beschrieben, wie ausgehend von einem Vertreter-system des Quotienten $\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ in endlich vielen Schritten eine Basis des Urbildes $\mathcal{U} = \Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}})$ bestimmt werden kann. Die Anwendung der Abbildung Υ auf diese Basis liefert eine Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ der geschlossenen Flächen über \mathbb{Z} .

Im Verlauf dieses Kapitel haben wir zur Verdeutlichung der einzelnen Zwischenschritte das Beispiel der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ mit $N = T^2 + T + 1$ für den Fall $q = 2$ mehrfach aufgegriffen.

Wir möchten an dieser Stelle noch einmal die einzelnen Ergebnisse aufführen. Hierbei orientieren wir uns an dem in Abschnitt 5.1. angegebenen Verlauf des Verfahrens.

Für eine Matrix $g \in \mathrm{GL}_3(K_\infty)$ bezeichne hierbei $[g]$ den 2-Simplex $[\Theta_2(g)] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$, wobei $\Theta_2(g)$ der zur Matrix g gehörende 2-Simplex aus $\mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ sei.

(1) Basis der Gruppe M_1^Γ :

$$\begin{aligned} & \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & T & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \\ & \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & T & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix}\right)}_1, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_1 \end{aligned}$$

Basis der Gruppe M_2^Γ :

$$\begin{aligned} & \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \\ & \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & T+1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_2, \quad \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix}\right)}_2 \end{aligned}$$

(2) Basis der Gruppe \mathcal{M}_1 :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & T & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T & 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \\ & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix}\right], \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix}\right], \\ & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & T & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix}\right], \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix}\right], \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

Basis der Gruppe \mathcal{M}_2

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right], \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \\ & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix}\right], \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix}\right], \\ & \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right], \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix}\right], \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

(3) Basis der Gruppe \mathcal{A}^Γ :

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix} \right], \\ & \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

(4) Basis der Gruppe \mathcal{U}

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \\ & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Bilden wir die so bestimmte Basis mittels der Abbildung Υ ab, so erhalten wir die geschlossenen Flächen

$$\begin{aligned} G_1 & := \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & 0 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & 0 \end{pmatrix} \right], \\ G_2 & := \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ & - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & 0 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & 0 \end{pmatrix} \right] \\ & + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & 0 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Eine Untersuchung der Äquivalenz der Simplizes liefert

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & 0 \end{pmatrix} \right]$$

und somit

$$G_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ T & 1 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Da wir von einer Basis des Urbildes $\Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}})$ ausgegangen sind, gilt

$$\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}} = \langle G_1, G_2 \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Zum Abschluss dieses Beispiels möchten wir die geschlossenen Flächen im Quotientenkomplex für den Fall $q = 2$, $\Gamma = \Gamma_0(N)$ und $N = T^2 + T + 1$ visualisieren. Eine erste Zeichnung eines Ausschnittes des Quotientenkomplexes $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ findet sich bereits in Abschnitt 1.4. dieser Arbeit.

In der ersten Graphik heben wir die geschlossene Fläche G_1 rot hervor. Weiter kennzeichnet der in der Zeichnung blau hervorgehobene Bereich diejenigen Simplizes, deren Niveau in der Weylkammer \mathcal{W}_2 der Größe 2 enthalten ist.

5. Berechnung einer Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$

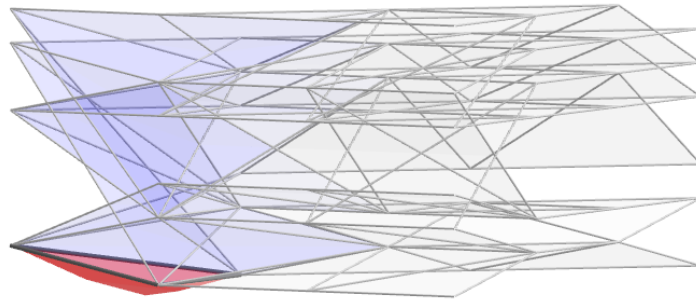


Abb. 5.1: Visualisierung von G_1

G_1 besitzt die kleinstmögliche Form einer nichttrivialen geschlossenen Fläche. Sie besteht aus zwei 2-Simplizes $[s_1], [s_2] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ vom Niveau \mathcal{C}_2 , für die $\Phi_2^i([s_1]) = \Phi_2^i([s_2])$ für $i \in \{0, 1, 2\}$, jedoch $[s_1] \neq [s_2]$ gilt. Die Simplizes $[s_1]$ und $[s_2]$ besitzen somit zwar die gleichen Kanten, sind jedoch selbst voneinander verschieden.

Abschließend möchten wir in einer weiteren Graphik die geschlossene Fläche G_2 darstellen. Sie ist in der folgenden Abbildung ebenfalls rot gekennzeichnet. Zur besseren Visualisierung verwenden wir verschiedene Perspektiven.

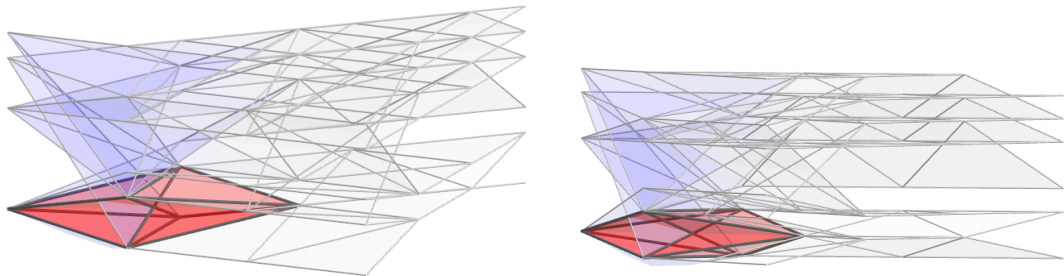


Abb. 5.2: Visualisierung von G_2

6. Hecke-Operatoren

Zu Beginn des Kapitels werden wir $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ durch eine positiv-definite hermitesche Sesquilinearform zu einem unitären Raum ergänzen. Im weiteren Verlauf werden wir auf diesem Raum gewisse Endomorphismen, sogenannte Doppelnebenklassenoperatoren, definieren und die adjungierten Abbildungen dieser Endomorphismen bezüglich der zuvor eingeführten Sesquilinearform bestimmen. Mittels der in Kapitel 3 nachgewiesenen Dualität zwischen $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ und $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C}$ können wir anschließend auch Doppelnebenklassenoperatoren auf $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C}$ einführen. Zum Abschluss des Kapitels betrachten wir für den Fall $\Gamma = \Gamma_0(N)$ eine von speziellen Doppelnebenklassenoperatoren erzeugte \mathbb{C} -Algebra, die sogenannte Hecke-Algebra. Hierbei werden wir nachweisen, dass jedes Element der Hecke-Algebra normal ist.

Große Teile dieses Kapitels beruhen auf Ideen aus dem Buch „A First Course in Modular Forms“ von Fred Diamond und Jerry Shurman [DS], in welchem Hecke-Operatoren für den Fall der $SL_2(\mathbb{Z})$ betrachtet werden.

6.1 Petersson-Skalarprodukt

Wir führen zunächst die besagte Sesquilinearform auf $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma \times \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ ein.

Definition 6.1 Für $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ definieren wir das Petersson-Skalarprodukt bezüglich Γ durch

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\Gamma := \sum_{[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})} \varphi(s) \overline{\psi(s)} \frac{1}{|\Gamma_s|}$$

mit $\Gamma_s = \text{Fix}_\Gamma(s)$.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass das Petersson-Skalarprodukt eine hermitesche positiv-definite Sesquilinearform ist. Somit ist durch $(\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma, \langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma)$ ein unitärer Raum gegeben.

Für jede Kongruenzuntergruppe $\tilde{\Gamma}$ mit $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ gilt die Inklusion $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma \subseteq \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\tilde{\Gamma}}$. Daher lässt sich das Petersson-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\Gamma}}$ bezüglich $\tilde{\Gamma}$ ebenfalls auf Funktionen aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ anwenden. Wie sich das Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\Gamma}}$ zum Petersson-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ bezüglich der Gruppe Γ verhält, ist Gegenstand des nächsten Lemmas.

6. Hecke-Operatoren

Lemma 6.2 Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe und seien $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$. Weiter sei $\tilde{\Gamma}$ eine Kongruenzuntergruppe mit $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$. Dann gilt

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\tilde{\Gamma}} = [\Gamma : \tilde{\Gamma}] \langle \varphi, \psi \rangle_{\Gamma}.$$

Beweis: Im Beweis des Lemmas werden wir vorrangig das Verhalten des Faktors $\frac{1}{|\Gamma_s|}$ beim Übergang der Kongruenzuntergruppen untersuchen.

Für $[s]_{\Gamma} \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ bezeichne $\{[\tilde{s}]_{\tilde{\Gamma}} \mapsto [s]_{\Gamma}\}$ die Menge der 2-Simplizes in $\mathcal{S}_2(\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B})$, die nach $[s]_{\Gamma} \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ projiziert werden.

Behauptung: Es gilt

$$\sum_{\{[\tilde{s}]_{\tilde{\Gamma}} \mapsto [s]_{\Gamma}\}} \frac{1}{|\tilde{\Gamma}_{\tilde{s}}|} = [\Gamma : \tilde{\Gamma}] \frac{1}{|\Gamma_s|}.$$

Beweis der Behauptung: Der Beweis der Behauptung entstammt zu großen Teilen der Arbeit „Ein Algorithmus zum Berechnen von Hecke-Operatoren auf Drinfeldschen Modulformen“ von Ralf Butenuth [Bu]. Für $s \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ definieren wir eine Operation der Gruppe Γ_s auf $\tilde{\Gamma} \backslash \Gamma$ durch

$$\begin{aligned} \Gamma_s \times \tilde{\Gamma} \backslash \Gamma &\rightarrow \tilde{\Gamma} \backslash \Gamma \\ (g, \tilde{\Gamma} \gamma) &\mapsto \tilde{\Gamma} \gamma g. \end{aligned}$$

Da $\tilde{\Gamma} \backslash \Gamma$ endlich ist, existiert ein endliches Vertretersystem $\tilde{\Gamma} \gamma_1, \dots, \tilde{\Gamma} \gamma_l$ der Bahnen von Γ_s in $\tilde{\Gamma} \backslash \Gamma$. Aus der Bahnengleichung folgt

$$[\Gamma : \tilde{\Gamma}] = \sum_{i=1}^l \frac{|\Gamma_s|}{|\text{Fix}_{\Gamma_s}(\tilde{\Gamma} \gamma_i)|}.$$

Im nächsten Schritt bestimmen wir die Fixgruppe der Vertreter $\tilde{\Gamma} \gamma_i$ der Bahnen unter Γ_s . Es gilt

$$\text{Fix}_{\Gamma_s}(\tilde{\Gamma} \gamma_i) = \{g \in \Gamma_s \mid \tilde{\Gamma} \gamma_i g \subseteq \tilde{\Gamma} \gamma_i\} = \{g \in \Gamma_s \mid g \in \gamma_i^{-1} \tilde{\Gamma} \gamma_i\} = \Gamma_s \cap \gamma_i^{-1} \tilde{\Gamma} \gamma_i.$$

Somit folgt nach voriger Überlegung

$$[\Gamma : \tilde{\Gamma}] = \sum_{i=1}^l \frac{|\Gamma_s|}{|\text{Fix}_{\Gamma_s}(\tilde{\Gamma} \gamma_i)|} = \sum_{i=1}^l \frac{|\Gamma_s|}{|\Gamma_s \cap \gamma_i^{-1} \tilde{\Gamma} \gamma_i|}$$

und daher

$$[\Gamma : \tilde{\Gamma}] \frac{1}{|\Gamma_s|} = \sum_{i=1}^l \frac{1}{|\Gamma_s \cap \gamma_i^{-1} \tilde{\Gamma} \gamma_i|}.$$

Unser nächstes Ziel ist es daher, die Mächtigkeit von $\Gamma_s \cap \gamma_i^{-1} \tilde{\Gamma} \gamma_i$ zu bestimmen. Es gilt

$$|\Gamma_s \cap \gamma_i^{-1} \tilde{\Gamma} \gamma_i| = |\gamma_i \Gamma_s \gamma_i^{-1} \cap \tilde{\Gamma}| = |\Gamma_{\gamma_i s} \cap \tilde{\Gamma}| = |\tilde{\Gamma}_{\gamma_i s}|.$$

Bisher haben wir also die Gleichheit

$$[\Gamma : \tilde{\Gamma}] \frac{1}{|\Gamma_s|} = \sum_{i=1}^l \frac{1}{|\Gamma_s \cap \gamma_i^{-1} \tilde{\Gamma} \gamma_i|} = \sum_{i=1}^l \frac{1}{|\tilde{\Gamma}_{\gamma_i s}|}$$

nachgewiesen. Es bleibt noch eine Verbindung zwischen den Vertretern der Bahnen $\tilde{\Gamma}\gamma_1, \dots, \tilde{\Gamma}\gamma_l$ unter Operation der Γ_s sowie der Menge $\{[\tilde{s}]_{\tilde{\Gamma}} \mapsto [s]_{\Gamma}\}$ herzustellen.

Sei $s \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ und seien $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Nach den Erläuterungen im dritten Abschnitt des ersten Kapitels besitzen γs und $\gamma' s$ genau dann das gleiche Bild in $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{B}$, wenn ein $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ mit $\gamma^{-1} \tilde{\gamma} \gamma' \in \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(s)$ existiert. Da alle drei Faktoren in Γ enthalten sind, ist dies äquivalent zu $\gamma^{-1} \tilde{\gamma} \gamma' \in \Gamma_s$. Dies wiederum entspricht der Existenz eines $\gamma_s \in \Gamma_s$ mit $\tilde{\gamma} \gamma' = \gamma \gamma_s$. Insgesamt zeigen diese Überlegungen, dass zwei Simplizes γs und $\gamma' s$ genau dann modulo $\tilde{\Gamma}$ miteinander identifiziert werden, wenn $\tilde{\Gamma}\gamma$ und $\tilde{\Gamma}\gamma'$ in der selben Bahn bezüglich der zuvor erklärten Operation von Γ_s liegen. Es existiert somit eine Bijektion zwischen Vertretern der Bahnen und Elementen der Menge $\{[\tilde{s}]_{\tilde{\Gamma}} \mapsto [s]_{\Gamma}\}$. Hieraus ergibt sich

$$\sum_{\{[\tilde{s}]_{\tilde{\Gamma}} \mapsto [s]_{\Gamma}\}} \frac{1}{|\tilde{\Gamma}_{\tilde{s}}|} = \sum_{i=1}^l \frac{1}{|\tilde{\Gamma}_{\gamma_i s}|} = [\Gamma : \tilde{\Gamma}] \frac{1}{|\Gamma_s|}.$$

□

Mithilfe der obigen Behauptung erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle_{\tilde{\Gamma}} &= \sum_{[\tilde{s}]_{\tilde{\Gamma}} \in \mathcal{S}_2(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{B})} \varphi(\tilde{s}) \overline{\psi(\tilde{s})} \frac{1}{|\tilde{\Gamma}_{\tilde{s}}|} = \sum_{[s]_{\Gamma} \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})} \varphi(s) \overline{\psi(s)} \sum_{\{[\tilde{s}]_{\tilde{\Gamma}} \mapsto [s]_{\Gamma}\}} \frac{1}{|\tilde{\Gamma}_{\tilde{s}}|} \\ &= \sum_{[s]_{\Gamma} \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})} \varphi(s) \overline{\psi(s)} \frac{[\Gamma : \tilde{\Gamma}]}{|\Gamma_s|} = [\Gamma : \tilde{\Gamma}] \sum_{[s]_{\Gamma} \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})} \varphi(s) \overline{\psi(s)} \frac{1}{|\Gamma_s|} \\ &= [\Gamma : \tilde{\Gamma}] \langle \varphi, \psi \rangle_{\Gamma}. \end{aligned}$$

□

In Kapitel 3 haben wir einen Isomorphismus

$$\rho : \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma} \rightarrow \mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$$

zwischen dem Raum der harmonischen 2-Koketten und dem \mathbb{C} -Vektorraum der geschlossenen Flächen eingeführt. Diese Dualität ermöglicht es uns, aus dem Petersson-Skalarprodukt eine Paarung auf $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma} \times \mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ zu gewinnen.

Definition 6.3 Sei $\varphi \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma}$ sowie $G \in \mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ eine geschlossene Fläche. Wir definieren

$$(\varphi, G)_{\Gamma} := \langle \varphi, \rho^{-1}(G) \rangle_{\Gamma}.$$

6. Hecke-Operatoren

Betrachten wir die Paarung $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ genauer.

Offensichtlich ist $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ eine nicht-ausgeartete \mathbb{C} -Sesquilinearform auf $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma \times \mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C}$.
Ist

$$G = \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_\kappa [s_\kappa]$$

eine geschlossene Fläche, so ergibt sich

$$(\varphi, G)_\Gamma = \langle \varphi, \rho^{-1}(G) \rangle_\Gamma = \sum_{[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})} \varphi(s) \overline{\rho^{-1}(G)(s)} \frac{1}{|\Gamma_s|} = \sum_{\kappa=1}^{\mu} \overline{a_\kappa} \varphi(s_\kappa).$$

Die Paarung $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ entspricht somit der Summe der Funktionswerte $\varphi(s_\kappa)$ der Vertreter der in G auftretenden 2-Simplizes unter Berücksichtigung der konjugierten Koeffizienten $\overline{a_\kappa}$. Die komplexe Konjugation ist hierbei der Positiv-Definitheit des Petersson-Skalarproduktes geschuldet.

6.2 Doppelnebenklassenoperatoren

In diesem Abschnitt möchten wir für Kongruenzuntergruppen $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ lineare Abbildungen zwischen den Räumen $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_1}$ und $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_2}$ von ungeordneten Γ_1 - bzw. Γ_2 -invarianten 2-Koketten mit endlichem Träger modulo Γ_1 bzw. Γ_2 einführen. Für $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$ erhalten wir so die eingangs erwähnten Endomorphismen auf $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$.

Zur Definition der gesuchten Abbildungen betrachten wir für $\alpha \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ die Doppelnebenklasse $\Gamma_1 \alpha \Gamma_2$ und stellen diese als Vereinigung von Γ_1 -Nebenklassen dar. Da wir für die Definition der gesuchten Abbildung zwischen $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_1}$ und $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_2}$ über ein Vertretersystem dieser Nebenklassen summieren werden, weisen wir zunächst dessen Endlichkeit nach.

Lemma 6.4 *Seien Γ_1, Γ_2 zwei Kongruenzuntergruppen. Weiter sei $\alpha \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$. Dann existieren $\beta_1, \dots, \beta_m \in \Gamma_1 \alpha \Gamma_2$ mit*

$$\Gamma_1 \alpha \Gamma_2 = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_1 \beta_i.$$

Beweis: Im ersten Schritt des Beweises betrachten wir die durch

$$\begin{aligned} \Gamma_2 \times \Gamma_1 \backslash \Gamma_1 \alpha \Gamma_2 &\rightarrow \Gamma_1 \backslash \Gamma_1 \alpha \Gamma_2 \\ (\tilde{\gamma}_2, \Gamma_1 \alpha \gamma_2) &\mapsto \Gamma_1 \alpha \gamma_2 \tilde{\gamma}_2 \end{aligned}$$

definierte Operation der Gruppe Γ_2 auf $\Gamma_1 \backslash \Gamma_1 \alpha \Gamma_2$. Aus der Transitivität der Operation folgt mithilfe der Bahnengleichung die Isomorphie

$$\mathrm{Fix}_{\Gamma_2}(\Gamma_1 \alpha) \backslash \Gamma_2 \simeq \Gamma_1 \backslash \Gamma_1 \alpha \Gamma_2.$$

Kennen wir also ein Vertretersystem $\{\gamma_{2,i}\}$ von $\text{Fix}_{\Gamma_2}(\Gamma_1\alpha)\backslash\Gamma_2$, so erhalten wir durch $\{\beta_i\} = \{\alpha\gamma_{2,i}\}$ ein Vertretersystem von $\Gamma_1\backslash\Gamma_1\alpha\Gamma_2$. Hierfür bestimmen wir zunächst die Fixgruppe $\text{Fix}_{\Gamma_2}(\Gamma_1\alpha)$.

Ist $\gamma_2 \in \text{Fix}_{\Gamma_2}(\Gamma_1\alpha)$, so gilt $\Gamma_1\alpha\gamma_2 = \Gamma_1\alpha$. Somit existiert ein $\gamma_1 \in \Gamma_1$ mit $\gamma_1\alpha\gamma_2 = \alpha$. Hieraus folgt die Inklusion $\gamma_2 = \alpha^{-1}\gamma_1^{-1}\alpha \in \alpha^{-1}\Gamma_1\alpha \cap \Gamma_2$ und daher $\text{Fix}_{\Gamma_2}(\Gamma_1\alpha) \subseteq \alpha^{-1}\Gamma_1\alpha \cap \Gamma_2$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial. Es gilt somit

$$\text{Fix}_{\Gamma_2}(\Gamma_1\alpha) = \alpha^{-1}\Gamma_1\alpha \cap \Gamma_2.$$

In den folgenden zwei Schritten weisen wir die Endlichkeit des Quotienten

$$(\alpha^{-1}\Gamma_1\alpha \cap \Gamma_2)\backslash\Gamma_2$$

nach. Zuerst werden wir zeigen, dass der Index $[\Gamma_2 : \Gamma \cap \Gamma_2]$ für jede beliebige Kongruenzuntergruppe Γ endlich ist. Es bleibt also im zweiten Schritt nachzuweisen, dass $\alpha^{-1}\Gamma_1\alpha \cap \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ die Definition einer Kongruenzuntergruppe erfüllt. Beginnen wir mit dem ersten Schritt.

1.Behauptung: Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe. Dann gilt

$$[\Gamma_2 : \Gamma \cap \Gamma_2] < \infty.$$

Beweis der 1.Behauptung: Sei $N_2 \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(N_2) \subseteq \Gamma_2$ sowie $N \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$. Weiter sei \tilde{N} das kleinste gemeinsame Vielfache von N_2 und N . Dann gelten die Inklusionen $\Gamma(\tilde{N}) \subseteq \Gamma(N_2) \subseteq \Gamma_2$ sowie $\Gamma(\tilde{N}) \subseteq \Gamma(N) \subseteq \Gamma$ und somit

$$\Gamma(\tilde{N}) \subseteq \Gamma_2 \cap \Gamma.$$

Da der Index $[\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) : \Gamma(\tilde{N})]$ nach Lemma 1.18 endlich ist, gilt dies auch für den Index $[\Gamma_2 : \Gamma(\tilde{N})]$. Mit voriger Überlegung folgt hieraus die Endlichkeit von $[\Gamma_2 : \Gamma \cap \Gamma_2]$. \square

Es bleibt also nachzuweisen, dass $\alpha^{-1}\Gamma_1\alpha \cap \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ eine Kongruenzuntergruppe ist.

2.Behauptung Es existiert ein $N \in \mathbb{F}_q[T]$ mit

$$\Gamma(N) \subseteq \alpha^{-1}\Gamma_1\alpha \cap \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]).$$

Beweis der 2.Behauptung: Da α ein Element der $\text{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ ist, existiert ein Polynom $\tilde{N} \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(\tilde{N}) \subseteq \Gamma_1$ sowie $\tilde{N}\alpha \in M_3(\mathbb{F}_q[T])$ und $\tilde{N}\alpha^{-1} \in M_3(\mathbb{F}_q[T])$. Wir setzen $N := \tilde{N}^3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha\Gamma(N)\alpha^{-1} &\subseteq \alpha \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \tilde{N}^3 M_3(\mathbb{F}_q[T]) \right) \alpha^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \tilde{N}^3 M_3(\mathbb{F}_q[T]) \alpha^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \tilde{N}(\tilde{N}\alpha) M_3(\mathbb{F}_q[T])(\tilde{N}\alpha^{-1}) \end{aligned}$$

6. Hecke-Operatoren

$$\subseteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \tilde{N}M_3(\mathbb{F}_q[T]).$$

Weiter gilt für jedes Element $\gamma \in \Gamma(N)$ die Gleichheit $\det(\gamma) = 1$ und somit $\det(\alpha^{-1}\gamma\alpha) = 1$. Zusammengenommen mit der zuvor gezeigten Inklusion erhalten wir

$$\alpha\Gamma(N)\alpha^{-1} \subseteq \Gamma(\tilde{N})$$

und somit

$$\Gamma(N) \subseteq \alpha^{-1}\Gamma(\tilde{N})\alpha \subseteq \alpha^{-1}\Gamma_1\alpha.$$

Da $\Gamma(N)$ eine Untergruppe der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ ist, ergibt sich

$$\Gamma(N) \subseteq \alpha^{-1}\Gamma_1\alpha \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]).$$

□

Durch Kombination der bisherigen Überlegungen erhalten wir

$$|\Gamma_1 \backslash \Gamma_1\alpha\Gamma_2| = [\Gamma_2 : \mathrm{Fix}_{\Gamma_2}(\Gamma_1\alpha)] = [\Gamma_2 : (\alpha^{-1}\Gamma_1\alpha \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])) \cap \Gamma_2] < \infty.$$

□

Die gerade gezeigte Existenz eines endlichen Vertretersystems ermöglicht es uns, die gesuchte Abbildung auf $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_1}$ zu definieren.

Definition 6.5 Seien $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ mit

$$\Gamma_1\alpha\Gamma_2 = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_1\beta_i.$$

Weiter sei $\varphi \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_1}$ eine ungeordnete Γ_1 -invariante 2-Kokette mit endlichem Träger modulo Γ_1 sowie $s \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ ein 2-Simplex. Wir definieren den Nebeklassenoperator $T_{\Gamma_1\alpha\Gamma_2}$ auf $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_1}$ durch

$$T_{\Gamma_1\alpha\Gamma_2}\varphi(s) := \sum_{i=1}^m \varphi(\beta_i s).$$

Aus der Γ_1 -Invarianz der Funktionen aus $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_1}$ folgt die Unabhängigkeit der Definition des Doppelnebenklassenoperators von der Wahl des Vertretersystems $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ und es ist leicht nachzuweisen, dass $T_{\Gamma_1\alpha\Gamma_2}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung ist.

Weiter gilt für $\lambda \in \mathbb{F}_q(T)^\times$ und $\tilde{\alpha} \in \Gamma_1\alpha\Gamma_2$ die Gleichheit

$$\Gamma_1\lambda\tilde{\alpha}\Gamma_2 = \lambda\Gamma_1\tilde{\alpha}\Gamma_2 = \lambda\Gamma_1\alpha\Gamma_2$$

und somit

$$T_{\Gamma_1\lambda\tilde{\alpha}\Gamma_2}\varphi(s) = \sum_{i=1}^m \varphi(\lambda\beta_i s) = \sum_{i=1}^m \varphi(\beta_i(\lambda s))$$

6.2 Doppelnebenklassenoperatoren

für $s \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$. Aus der Gleichheit $\lambda s = s$ folgt weiter

$$T_{\Gamma_1 \lambda \tilde{\alpha} \Gamma_2} \varphi(s) = \sum_{i=1}^m \varphi(\beta_i(\lambda s)) = T_{\Gamma_1 \alpha \Gamma_2} \varphi(s).$$

Somit gilt für alle $\lambda \in \mathbb{F}_q(T)^\times$ und alle $\tilde{\alpha} \in \Gamma_1 \alpha \Gamma_2$ die Identität

$$T_{\Gamma_1 \lambda \tilde{\alpha} \Gamma_2} = T_{\Gamma_1 \alpha \Gamma_2}.$$

Zu Beginn des Abschnittes haben wir eine Abbildung zwischen $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_1}$ und $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_2}$ gesucht. Der nächste Satz zeigt, dass der Doppelnebenklassenoperator $T_{\Gamma_1 \alpha \Gamma_2}$ das Gewünschte leistet.

Satz 6.6 *Seien Γ_1, Γ_2 zwei Kongruenzuntergruppen der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ und sei $\alpha \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$. Weiter sei $\varphi \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_1}$. Dann gilt*

$$T_{\Gamma_1 \alpha \Gamma_2} \varphi \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_2}.$$

Beweis: Zum Beweis interpretieren wir $T_{\Gamma_1 \alpha \Gamma_2}$ als Summe

$$T_{\Gamma_1 \alpha \Gamma_2} = \sum_{i=1}^m \varphi_i$$

von Abbildungen φ_i mit

$$\varphi_i(s) := \varphi(\beta_i s)$$

für $s \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$. Wir werden die Endlichkeit des Trägers modulo Γ_2 sowie die Harmonizität jeder der Funktionen φ_i nachweisen. Für die Γ_2 -Invarianz jedoch müssen wir die komplette Summe der φ_i betrachten.

Beginnen wir mit der Endlichkeit des Trägers modulo Γ_2 .

Nach Voraussetzung ist der Träger von φ modulo Γ_1 endlich. Dies gilt trivialerweise auch für den Träger von φ_i . Da die Kongruenzuntergruppe Γ_1 eine Untergruppe der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ ist, ist der Träger von φ_i ebenfalls modulo der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ endlich. Aus der Endlichkeit des Indexes $[\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) : \Gamma_2]$ folgt die Endlichkeit des Trägers von φ_i modulo Γ_2 . Da $T_{\Gamma_1 \alpha \Gamma_2} \varphi$ der endlichen Summe $\sum \varphi_i$ entspricht, ist somit der Träger von $T_{\Gamma_1 \alpha \Gamma_2} \varphi$ modulo Γ_2 endlich.

Wenden wir uns der Harmonizität zu.

Für jede Kante $t \in \mathcal{S}_1(\mathcal{B})$ gelten aufgrund der Harmonizität von φ die Gleichheiten

$$\sum_{s \in C(t)} \varphi_i(s) = \sum_{s \in C(t)} \varphi(\beta_i s) = \sum_{s \in C(\beta_i t)} \varphi(s) = 0.$$

Da die Summe harmonischer Funktionen stets wieder harmonisch ist, ist somit $T_{\Gamma_1 \alpha \Gamma_2} \varphi$ harmonisch.

Es bleibt abschließend die Γ_2 -Invarianz zu zeigen.

Hierfür betrachten wir für ein festes Element $\gamma_2 \in \Gamma_2$ die Abbildung

6. Hecke-Operatoren

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \backslash \Gamma_1 \alpha \Gamma_2 &\rightarrow \Gamma_1 \backslash \Gamma_1 \alpha \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \beta &\mapsto \Gamma_1 \beta \gamma_2.\end{aligned}$$

Diese ist wohldefiniert und bijektiv. Ist also $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ ein Vertretersystem von $\Gamma_1 \backslash \Gamma_1 \alpha \Gamma_2$, so gilt dies ebenfalls für $\{\beta_1 \gamma_2, \dots, \beta_m \gamma_2\}$. Daher ergeben sich für jedes $\gamma_2 \in \Gamma_2$ die Gleichheiten

$$T_{\Gamma_1 \alpha \Gamma_2} \varphi(\gamma_2 s) = \sum_{\beta=1}^m \varphi(\beta_i(\gamma_2 s)) = \sum_{i=1}^m \varphi((\beta_i \gamma_2) s) = T_{\Gamma_1 \alpha \Gamma_2} \varphi(s).$$

□

In diesem Abschnitt haben wir insgesamt eine \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$T_{\Gamma_1 \alpha \Gamma_2} : \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_1} \rightarrow \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_2}$$

definiert.

6.3 Adjungierte Abbildung von $T_{\Gamma \alpha \Gamma}$

Ab diesem Abschnitt möchten wir uns auf den Fall $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$ identischer Kongruenzuntergruppen beschränken. In dieser Situation ist der zuvor eingeführte Doppelnebenklassenoperator $T_{\Gamma \alpha \Gamma}$ somit ein Endomorphismus auf dem Raum $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$.

Wir möchten zunächst für diesen Fall Doppelnebenklassen $\Gamma \alpha \Gamma$ bzw. Vertretersysteme dieser näher betrachten.

Im bisherigen Verlauf dieses Kapitels haben wir bereits gesehen, dass sich die Doppelnebenklasse $\Gamma \alpha \Gamma$ als endliche Vereinigung $\bigcup \Gamma \beta_i$ schreiben lässt. Das nächste Lemma zeigt, dass die β_i derart gewählt werden können, dass sie sowohl als Vertreter von $\Gamma \backslash \Gamma \alpha \Gamma$ als auch von $\Gamma \alpha \Gamma / \Gamma$ dienen.

Lemma 6.7 *Sei $\alpha \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$. Dann existieren $\beta_1, \dots, \beta_m \in \Gamma \alpha \Gamma$ mit*

$$\Gamma \alpha \Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma \beta_i = \bigcup_{i=1}^m \beta_i \Gamma.$$

Beweis: Zu Beginn des Beweises werden wir eine technische Aussage nachweisen, welche sich auch in weiteren Beweisen dieses Abschnittes nützlich erweisen wird.

Behauptung: Für $\alpha \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ gilt

$$[\Gamma : \alpha^{-1} \Gamma \alpha \cap \Gamma] = [\Gamma : \Gamma \cap \alpha \Gamma \alpha^{-1}].$$

Beweis der Behauptung: Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned}\varsigma : (\alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap \Gamma)\backslash\Gamma &\rightarrow (\Gamma \cap \alpha\Gamma\alpha^{-1})\backslash\Gamma \\ \gamma\Gamma &\mapsto \alpha\gamma\alpha^{-1}\Gamma.\end{aligned}$$

Die folgenden Äquivalenzen weisen die Wohldefiniertheit von ς nach:

$$\begin{aligned}\gamma_1 \equiv \gamma_2 \pmod{\alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap \Gamma} &\Leftrightarrow \exists g \in \alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap \Gamma : g\gamma_1 = \gamma_2 \\ &\Leftrightarrow \exists g \in \alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap \Gamma : (\alpha g\alpha^{-1})(\alpha\gamma_1\alpha^{-1}) = \alpha\gamma_2\alpha^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists \tilde{g} \in \Gamma \cap \alpha\Gamma\alpha^{-1} : \tilde{g}(\alpha\gamma_1\alpha^{-1}) = \alpha\gamma_2\alpha^{-1} \\ &\Leftrightarrow \alpha\gamma_1\alpha^{-1} \equiv \alpha\gamma_2\alpha^{-1} \pmod{\Gamma \cap \alpha\Gamma\alpha^{-1}}.\end{aligned}$$

Es bleibt die Bijektivität der Abbildung ς nachzuweisen. Dies geschieht durch die Angabe der Umkehrabbildung

$$\begin{aligned}\varsigma^{-1} : (\Gamma \cap \alpha\Gamma\alpha^{-1})\backslash\Gamma &\rightarrow (\alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap \Gamma)\backslash\Gamma \\ \gamma\Gamma &\mapsto \alpha^{-1}\gamma\alpha\Gamma,\end{aligned}$$

welche nach obiger Argumentation wohldefiniert ist. □

Nach der gerade gezeigten Aussage existieren $\gamma_1, \dots, \gamma_m, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m \in \Gamma$ mit

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^m (\alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap \Gamma)\gamma_i = \bigcup_{i=1}^m (\Gamma \cap \alpha\Gamma\alpha^{-1})\tilde{\gamma}_i^{-1}.$$

Wie im Beweis zu Lemma 6.4 folgt mit $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$ die Gleichheit

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma\alpha\gamma_i.$$

Analog ergibt sich mit $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$ für α^{-1} die Identität

$$\Gamma\alpha^{-1}\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma\alpha^{-1}\tilde{\gamma}_i^{-1}.$$

Im nächsten Schritt werden wir hieraus die Gleichheit

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \tilde{\gamma}_i\alpha\Gamma$$

folgern.

Da jedes $\tilde{\gamma}_i$ in Γ enthalten ist, ist die Inklusion

$$\Gamma\alpha\Gamma \supseteq \bigcup_{i=1}^m \tilde{\gamma}_i\alpha\Gamma$$

trivial. Für die umgekehrte Inklusion seien $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2 \in \Gamma$. Dann existiert ein $i \in \{1, \dots, m\}$ sowie ein $\gamma \in \Gamma$ mit

$$\hat{\gamma}_1\alpha\hat{\gamma}_2 = (\hat{\gamma}_2^{-1}\alpha^{-1}\hat{\gamma}_1^{-1})^{-1} = (\gamma\alpha^{-1}\tilde{\gamma}_i^{-1})^{-1} = \tilde{\gamma}_i\alpha\gamma^{-1} \in \tilde{\gamma}_i\alpha\Gamma.$$

6. Hecke-Operatoren

Somit erhalten wir auch die umgekehrte Inklusion

$$\Gamma\alpha\Gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^m \tilde{\gamma}_i\alpha\Gamma.$$

Es bleibt die Disjunktheit nachzuweisen. Angenommen für $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $i \neq j$ sei der Schnitt $\tilde{\gamma}_i\alpha\Gamma \cap \tilde{\gamma}_j\alpha\Gamma$ nicht leer. Dann existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\tilde{\gamma}_i\alpha\gamma = \tilde{\gamma}_j\alpha$ und somit $\gamma^{-1}\alpha^{-1}\tilde{\gamma}_i^{-1} = \alpha^{-1}\tilde{\gamma}_j^{-1}$. Also wäre der Schnitt $\Gamma\alpha^{-1}\tilde{\gamma}_i^{-1} \cap \Gamma\alpha^{-1}\tilde{\gamma}_j^{-1}$ ebenfalls nicht leer, was der Wahl der Menge $\{\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m\}$ als Vertretersystem widerspricht.

Als nächsten Schritt werden wir für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ die Ungleichheit

$$\Gamma\alpha\gamma_i \cap \tilde{\gamma}_j\alpha\Gamma \neq \emptyset$$

nachweisen.

Angenommen der Schnitt sei leer. So folgt für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ die Inklusion

$$\Gamma\alpha\gamma_i \subseteq \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \tilde{\gamma}_k\alpha\Gamma$$

und somit

$$\Gamma\alpha\Gamma \subseteq \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \tilde{\gamma}_k\alpha\Gamma,$$

was einen Widerspruch zur zuvor gezeigten Aussage

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \tilde{\gamma}_i\alpha\Gamma$$

darstellt.

Nach bisheriger Argumentation können wir also für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ein

$$\beta_i \in \Gamma\alpha\gamma_i \cap \tilde{\gamma}_i\alpha\Gamma$$

wählen. Für diese gilt

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma\beta_i = \bigcup_{i=1}^m \beta_i\Gamma.$$

□

Die Darstellung $\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup \beta_i\Gamma$, ermöglicht es uns, im nächsten Lemma ein Vertretersystem der Menge $\Gamma \setminus \Gamma\alpha^{-1}\Gamma$ anzugeben.

Lemma 6.8 *Seien $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ mit*

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \beta_i\Gamma.$$

Dann gilt

$$\Gamma\alpha^{-1}\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma\beta_i^{-1}.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Inklusion

$$\Gamma\alpha^{-1}\Gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^m \Gamma\beta_i^{-1}.$$

Für $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ gilt $(\gamma_1\alpha^{-1}\gamma_2)^{-1} = \gamma_2^{-1}\alpha\gamma_1^{-1}$. Somit existiert ein $\gamma \in \Gamma$ sowie ein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $(\gamma_1\alpha^{-1}\gamma_2)^{-1} = \beta_i\gamma$. Es folgt die Gleichung $\gamma_1\alpha\gamma_2 = \gamma^{-1}\beta_i^{-1}$ und somit die Inklusion

$$\gamma_1\alpha^{-1}\gamma_2 \in \bigcup_{i=1}^m \Gamma\beta_i^{-1}.$$

Für die umgekehrte Inklusion betrachten wir ein Element $\gamma \in \Gamma$ sowie ein $i \in \{1, \dots, m\}$. Nach Voraussetzung existieren $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ mit

$$(\gamma\beta_i^{-1})^{-1} = \beta_i\gamma^{-1} = \gamma_1\alpha\gamma_2$$

und somit

$$\gamma\beta_i^{-1} = \gamma_2^{-1}\alpha^{-1}\gamma_1^{-1} \in \Gamma\alpha^{-1}\Gamma.$$

Es bleibt die Disjunktheit der Vereinigung zu zeigen. Angenommen für $i \neq j$ existiert ein $\gamma \in \Gamma\beta_i^{-1} \cap \Gamma\beta_j^{-1}$, so gibt es $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ mit

$$\gamma = \gamma_1\beta_i^{-1} = \gamma_2\beta_j^{-1}$$

und daher

$$\gamma^{-1} = \beta_i\gamma_1^{-1} = \beta_j\gamma_2^{-1}.$$

Es folgt die Inklusion

$$\gamma^{-1} \in \beta_i\Gamma \cap \beta_j\Gamma,$$

was der Disjunktheit der Nebenklassen widerspricht. \square

Unter Zuhilfenahme der vorigen Lemmata werden wir im folgenden Satz die adjungierte Abbildung des Doppelnebenklassenoperators $T_{\Gamma\alpha\Gamma}$ unter dem Petersson-Skalarprodukt bestimmen.

Satz 6.9 Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe der $GL_3(\mathbb{F}_q[T])$ und sei $\alpha \in GL_3(\mathbb{F}_q(T))$. Für $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ gilt

$$\langle T_{\Gamma\alpha\Gamma}\varphi, \psi \rangle_\Gamma = \langle \varphi, T_{\Gamma\alpha^{-1}\Gamma}\psi \rangle_\Gamma.$$

Beweis: Nach Lemma 6.7 existiert ein Vertretersystem $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ mit

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma\beta_i = \bigcup_{i=1}^m \beta_i\Gamma.$$

Für dieses gilt zudem nach Lemma 6.8 die Gleichheit

$$\Gamma\alpha^{-1}\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma\beta_i^{-1}.$$

6. Hecke-Operatoren

Wir erhalten somit

$$\langle T_{\Gamma\alpha}\varphi, \psi \rangle_{\Gamma} = \sum_{i=1}^m \sum_{[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})} \varphi(\beta_i s) \overline{\psi(s)} \frac{1}{|\Gamma_s|}$$

sowie

$$\langle \varphi, T_{\Gamma\alpha^{-1}\Gamma}\psi \rangle_{\Gamma} = \sum_{i=1}^m \sum_{[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})} \varphi(s) \overline{\psi(\beta_i^{-1}s)} \frac{1}{|\Gamma_s|}.$$

Im Folgenden werden wir die Gleichheit der inneren Summen nachweisen.

Hierbei werden wir auf die Untergruppen $\Gamma_i := \beta_i^{-1}\Gamma\beta_i \cap \Gamma$ bzw. $\tilde{\Gamma}_i := \beta_i\Gamma_i\beta_i^{-1} = \Gamma \cap \beta_i\Gamma\beta_i^{-1}$ übergehen. Da der Schnitt zweier Kongruenzuntergruppen stets wieder eine Kongruenzuntergruppe ist, sind nach dem Beweis zu Lemma 6.4 die Gruppen Γ_i und $\tilde{\Gamma}_i$ ebenfalls Kongruenzuntergruppen. Analog zum Beweis von Lemma 6.2 können wir die Gleichheiten

$$\sum_{[s]_{\Gamma} \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})} \varphi(\beta_i s) \overline{\psi(s)} \frac{1}{|\Gamma_s|} = [\Gamma : \Gamma_i] \sum_{[s]_{\Gamma_i} \in \mathcal{S}_2(\Gamma_i \setminus \mathcal{B})} \varphi(\beta_i s) \overline{\psi(s)} \frac{1}{|(\Gamma_i)_s|}$$

sowie

$$\sum_{[s]_{\Gamma} \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})} \varphi(s) \overline{\psi(\beta_i^{-1}s)} \frac{1}{|\Gamma_s|} = [\Gamma : \tilde{\Gamma}_i] \sum_{[s]_{\tilde{\Gamma}_i} \in \mathcal{S}_2(\tilde{\Gamma}_i \setminus \mathcal{B})} \varphi(s) \overline{\psi(\beta_i^{-1}s)} \frac{1}{|(\tilde{\Gamma}_i)_s|}$$

herleiten.

Wie im Beweis von Lemma 6.7 gezeigt, gilt für die Faktoren

$$[\Gamma : \Gamma_i] = [\Gamma : \beta_i^{-1}\Gamma\beta_i \cap \Gamma] = [\Gamma : \Gamma \cap \beta_i\Gamma\beta_i^{-1}] = [\Gamma : \tilde{\Gamma}_i].$$

Es bleibt somit die Gleichheit der Summen nachzuweisen. Hierfür betrachten wir die durch

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2(\Gamma_i \setminus \mathcal{B}) &\rightarrow \mathcal{S}_2(\tilde{\Gamma}_i \setminus \mathcal{B}) \\ [s]_{\Gamma_i} &\mapsto [\beta_i s]_{\tilde{\Gamma}_i} \end{aligned}$$

gegebene Abbildung. Es lässt sich leicht zeigen, dass die Abbildung wohldefiniert und bijektiv ist.

Weiter betrachten wir für $s \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ das Verhältnis der Mächtigkeiten $|(\Gamma_i)_s|$ und $|(\tilde{\Gamma}_i)_{\beta_i s}|$. Es gilt

$$\begin{aligned} (\Gamma_i)_s &= \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(s) \cap \Gamma_i \\ &= \beta_i^{-1}(\beta_i \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(s) \beta_i^{-1} \cap \beta_i \Gamma_i \beta_i^{-1}) \beta_i \\ &= \beta_i^{-1}(\text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\beta_i s) \cap \beta_i \Gamma_i \beta_i^{-1}) \beta_i \\ &= \beta_i^{-1} \text{Fix}_{\tilde{\Gamma}_i}(\beta_i s) \beta_i. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$|(\Gamma_i)_s| = |(\tilde{\Gamma}_i)_{\beta_i s}|.$$

6.4 Doppelnebenklassenoperatoren auf geschlossenen Flächen

Zusammengefasst ergeben sich die Gleichheiten

$$\begin{aligned}
 \sum_{[s]_{\Gamma_i} \in \mathcal{S}_2(\Gamma_i \setminus \mathcal{B})} \varphi(\beta_i s) \overline{\psi(s)} \frac{1}{|(\Gamma_i)_s|} &= \sum_{[s]_{\Gamma_i} \in \mathcal{S}_2(\Gamma_i \setminus \mathcal{B})} \varphi(\beta_i s) \overline{\psi(\beta_i^{-1}(\beta_i s))} \frac{1}{|(\tilde{\Gamma}_i)_{\beta_i s}|} \\
 &= \sum_{[\beta_i s]_{\tilde{\Gamma}_i} \in \mathcal{S}_2(\tilde{\Gamma}_i \setminus \mathcal{B})} \varphi(\beta_i s) \overline{\psi(\beta_i^{-1}(\beta_i s))} \frac{1}{|(\tilde{\Gamma}_i)_{\beta_i s}|} \\
 &= \sum_{[s]_{\tilde{\Gamma}_i} \in \mathcal{S}_2(\tilde{\Gamma}_i \setminus \mathcal{B})} \varphi(s) \overline{\psi(\beta_i^{-1} s)} \frac{1}{|(\tilde{\Gamma}_i)_s|}.
 \end{aligned}$$

Insgesamt liefern die Überlegungen die Identität

$$\langle T_{\Gamma\alpha\Gamma}\varphi, \psi \rangle_{\Gamma} = \langle \varphi, T_{\Gamma\alpha^{-1}\Gamma}\psi \rangle_{\Gamma}.$$

□

6.4 Doppelnebenklassenoperatoren auf geschlossenen Flächen

Wir möchten in diesem Abschnitt ausgehend von Doppelnebenklassen der Form $\Gamma\alpha\Gamma$ mit $\alpha \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ Endomorphismen auf dem Raum der geschlossenen Flächen betrachten. Hierzu verwenden wir die in Kapitel 3 nachgewiesene Isomorphie zwischen den Räumen $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma}$ und $\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$, welche durch die Abbildung

$$\begin{aligned}
 \rho: \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma} &\rightarrow \mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}} \\
 \varphi &\mapsto \sum_{[s] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})} \frac{1}{|\Gamma_s|} \varphi(s)[s]
 \end{aligned}$$

gegeben ist.

Ausgehend von den Doppelnebenklassenoperatoren auf $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma}$ liegen zwei Möglichkeiten zur Definition der von Doppelnebenklassen abhängigen Endomorphismen auf $\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ nahe:

- (1) Für jedes $\alpha \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ ist durch

$$\rho \circ T_{\Gamma\alpha\Gamma} \circ \rho^{-1}$$

ein Endomorphismus auf $\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ gegeben.

- (2) Zu Beginn des Kapitels haben wir ausgehend vom Petersson-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ mittels des Isomorphismus ρ eine nicht-ausgeartete Sesquilinearform $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ auf dem Produkt $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma} \times \mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ definiert. Somit existiert für jedes $\alpha \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ eine

6. Hecke-Operatoren

eindeutig bestimmte Rechtsadjungierte von $T_{\Gamma\alpha\Gamma}$ bezüglich $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$, d.h es gibt einen eindeutigen bestimmten Endomorphismus $T^{\mathcal{G}}$ auf $\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ mit

$$(T_{\Gamma\alpha\Gamma}\varphi, G)_{\Gamma} = (\varphi, T^{\mathcal{G}}G)_{\Gamma}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma}$ und alle $G \in \mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$. Nach Definition der Paarung $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ gilt

$$(T_{\Gamma\alpha\Gamma}\varphi, G)_{\Gamma} = \langle T_{\Gamma\alpha\Gamma}\varphi, \rho^{-1}(G) \rangle_{\Gamma} = \langle \varphi, \widetilde{T_{\Gamma\alpha\Gamma}} \circ \rho^{-1}(G) \rangle_{\Gamma} = (\varphi, \rho \circ \widetilde{T_{\Gamma\alpha\Gamma}} \circ \rho^{-1}(G))_{\Gamma}.$$

Die Rechtsadjungierte von $T_{\Gamma\alpha\Gamma}$ bezüglich $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ ist somit durch

$$\rho \circ \widetilde{T_{\Gamma\alpha\Gamma}} \circ \rho^{-1}$$

gegeben, wobei $\widetilde{T_{\Gamma\alpha\Gamma}}$ die Adjungierte von $T_{\Gamma\alpha\Gamma}$ bezüglich des Petersson-Skalarproduktes bezeichnet.

Wir werden im Folgenden die zweite Variante zur Definition der von Doppelnebenklassen abhängigen Endomorphismen auf $\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ nutzen. Statt jedoch für eine allgemeine geschlossene Fläche $G \in \mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ das Bild $\rho \circ \widetilde{T_{\Gamma\alpha\Gamma}} \circ \rho^{-1}(G)$ direkt zu bestimmen, werden wir im weiteren Verlauf des Abschnittes ausgehend von $\Gamma\alpha\Gamma$ intuitiv einen Endomorphismus $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}$ auf $\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ definieren, und anschließend nachweisen, dass $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}$ rechtsadjungiert zu $T_{\Gamma\alpha\Gamma}$ bezüglich $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ ist. Aufgrund der Eindeutigkeit der Rechtsadjungierten folgt dann

$$\rho \circ \widetilde{T_{\Gamma\alpha\Gamma}} \circ \rho^{-1} = T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}.$$

Beginnen wir mit der Definition der Abbildung $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}$.

Definition 6.10 Seien $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ mit

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma\beta_i.$$

Weiter sei

$$G := \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\kappa}[s_{\kappa}] \in \mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$$

eine geschlossene Fläche. Wir definieren die Abbildung $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}$ auf $\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ durch

$$T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}(G) := \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\kappa} \sum_{i=1}^m [\beta_i s_{\kappa}].$$

Die Wohldefiniertheit der Abbildung ergibt sich hierbei wie zuvor bei den Doppelnebenklassenoperatoren aus der Summation über das gesamte Vertretersystem.

Denn seien $s, \tilde{s} \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ mit $[s] = [\tilde{s}]$. Dann existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma s = \tilde{s}$. Da die Elemente $\{\beta_1\gamma, \dots, \beta_m\gamma\}$ ein neues Vertretersystem der Menge $\Gamma\alpha\Gamma$ bilden, existiert

6.4 Doppelnebenklassenoperatoren auf geschlossenen Flächen

zu jedem $i \in \{1, \dots, m\}$ ein $\tilde{\gamma}_i \in \Gamma$ und ein $j_i \in \{1, \dots, m\}$ mit $\beta_i \gamma = \tilde{\gamma}_i \beta_{j_i}$ sowie $\{j_1, \dots, j_m\} = \{1, \dots, m\}$. Somit gilt

$$\sum_{i=1}^m [\beta_i \tilde{s}] = \sum_{i=1}^m [\beta_i \gamma s] = \sum_{i=1}^m [\tilde{\gamma}_i \beta_{j_i} s] = \sum_{i=1}^m [\beta_{j_i} s] = \sum_{i=1}^m [\beta_i s].$$

Weiter ist leicht zu zeigen, dass $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}$ unabhängig von der Wahl des Vertretersystems $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ sowie \mathbb{C} -linear ist.

Um nachzuweisen, dass $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}$ ein Endomorphismus auf dem Raum der geschlossenen Flächen ist, bleibt zu zeigen, dass das Bild von $\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ unter $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}$ wieder in $\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ enthalten ist. Dies ist Gegenstand des nächsten Lemmas.

Lemma 6.11 *Sei $G \in \mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ eine geschlossene Fläche und sei $\alpha \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$. Dann gilt*

$$T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}} G \in \mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}.$$

Beweis: Nach Definition 6.10 ist die Summe $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}} G$ endlich. Es bleibt somit lediglich die Geschlossenheitsrelation zu prüfen.

Da $G := \sum a_{\kappa}([s_{\kappa}])$ eine geschlossene Fläche ist und somit im Kern von $\delta_{\mathbb{C}}$ liegt, gilt

$$\sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\kappa} \sum_{j=0}^2 \Phi_2^j([s_{\kappa}]) = 0.$$

Aus dieser Identität soll die Gleichheit

$$\sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\kappa} \sum_{j=0}^2 \sum_{i=1}^m \Phi_2^j([\beta_i s_{\kappa}]) = 0$$

und somit die Inklusion $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}} G \in \mathrm{Kern}(\delta_{\mathbb{C}})$ gefolgert werden.

Zum Beweis dieser Gleichheit genügt es, zu zeigen, dass für zwei 2-Simplizes $s, \tilde{s} \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ und Indizes $j_1, j_2 \in \{0, 1, 2\}$ aus

$$\Phi_2^{j_1}([s]) = \Phi_2^{j_2}([\tilde{s}])$$

die Identität

$$\sum_{i=1}^m \Phi_2^{j_1}([\beta_i s]) = \sum_{i=1}^m \Phi_2^{j_2}([\beta_i \tilde{s}])$$

folgt.

Da für jedes $g \in \mathrm{GL}_3(K_{\infty})$ und jeden Simplex $s \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ für die Seitenabbildung $\tilde{\Phi}_2^j$ des Bruhat-Tits-Gebäudes die Gleichheit

$$\tilde{\Phi}_2^j(gs) = g\tilde{\Phi}_2^j(s)$$

gilt, folgt für die Seitenabbildung Φ_2^j des Quotientenkomplexes

$$\sum_{i=1}^m \Phi_2^j([\beta_i s]) = \sum_{i=1}^m [\tilde{\Phi}_2^j(\beta_i s)] = \sum_{i=1}^m [\beta_i \tilde{\Phi}_2^j(s)].$$

6. Hecke-Operatoren

Aus

$$\Phi_2^{j_1}([s]) = \Phi_2^{j_2}([\tilde{s}])$$

und der daraus resultierenden Gleichheit

$$[\tilde{\Phi}_2^{j_1}(s)] = [\tilde{\Phi}_2^{j_2}(\tilde{s})]$$

folgt mit analoger Argumentation wie zum Nachweis der Wohldefiniertheit von $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}$ die Identität

$$\sum_{i=1}^m \Phi_2^{j_1}([\beta_i s]) = \sum_{i=1}^m [\beta_i \tilde{\Phi}_2^{j_1}(s)] = \sum_{i=1}^m [\beta_i \tilde{\Phi}_2^{j_2}(\tilde{s})] = \sum_{i=1}^m \Phi_2^{j_2}([\beta_i \tilde{s}]).$$

Somit überträgt sich die Geschlossenheitsrelation von G auf die Summe $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}G$. \square

Wie zu Beginn des Abschnittes erwähnt, wollen wir einen Endomorphismus auf $\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ definieren, welcher bezüglich der Paarung $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ rechtsadjungiert zu $T_{\Gamma\alpha\Gamma}$ ist. Der nächste Satz zeigt, dass $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}$ dies bereits nach Definition erfüllt.

Satz 6.12 Sei $G \in \mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{C}}$ eine geschlossene Fläche und $\varphi \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma}$. Weiter sei $\alpha \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$. Dann gilt

$$(\varphi, T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}G)_{\Gamma} = (T_{\Gamma\alpha\Gamma}\varphi, G)_{\Gamma}.$$

Beweis: Die Paarung $(\varphi, G)_{\Gamma}$ entspricht der Summe der Funktionswerte unter φ der in G auftretenden 2-Simplizes unter Berücksichtigung der konjugierten Koeffizienten. Für

$$G := \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\kappa} [s_{\kappa}]$$

und $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ mit

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma\beta_i$$

erhalten wir somit

$$\begin{aligned} (\varphi, T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}G)_{\Gamma} &= (\varphi, \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\kappa} \sum_{i=1}^m [\beta_i s_{\kappa}])_{\Gamma} \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\mu} \overline{a_{\kappa}} \sum_{i=1}^m \varphi([\beta_i s_{\kappa}]) \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\mu} \overline{a_{\kappa}} T_{\Gamma\alpha\Gamma}\varphi([s_{\kappa}]) \\ &= (T_{\Gamma\alpha\Gamma}\varphi, G)_{\Gamma}. \end{aligned}$$

\square

Mittels der zu Beginn des Abschnittes geführten Überlegungen zur Rechtsadjungierten sowie der im vorigen Abschnitt erlangten Kenntnis der Adjungierten bezüglich des Petersson-Skalarproduktes können wir im folgenden Korollar mittels der in Kapitel 3 eingeführten Abbildung

$$\rho : \mathcal{H}_l(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma \rightarrow \mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C}$$

den Zusammenhang zwischen $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^\mathcal{G}$ und dem Doppelnebenklassenoperator auf $\mathcal{H}_l(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ beschreiben.

Korollar 6.13 *Für $\alpha \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ gilt*

$$T_{\Gamma\alpha\Gamma}^\mathcal{G} = \rho \circ T_{\Gamma\alpha^{-1}\Gamma} \circ \rho^{-1}.$$

Beweis: Wie zu Beginn des Abschnittes erklärt, gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}_l(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ und alle $G \in \mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C}$ die Gleichheit

$$(T_{\Gamma\alpha\Gamma}\varphi, G)_\Gamma = (\varphi, \rho \circ \widetilde{T_{\Gamma\alpha\Gamma}} \circ \rho^{-1}(G))_\Gamma$$

und somit aufgrund der Eindeutigkeit der Rechtsadjungierten

$$T_{\Gamma\alpha\Gamma}^\mathcal{G} = \rho \circ \widetilde{T_{\Gamma\alpha\Gamma}} \circ \rho^{-1}.$$

Mittels Satz 6.12 ergibt sich

$$T_{\Gamma\alpha\Gamma}^\mathcal{G} = \rho \circ T_{\Gamma\alpha^{-1}\Gamma} \circ \rho^{-1}.$$

□

6.5 Hecke-Operatoren

Wie zu Beginn des Kapitels erwähnt, möchten wir spezielle Doppelnebenklassenoperatoren, genauer gesagt eine von speziellen Doppelnebenklassenoperatoren erzeugte \mathbb{C} -Algebra, betrachten. So gelte im Folgenden stets $\Gamma = \Gamma_0(N)$ für ein normiertes Polynom $N \in \mathbb{F}_q[T]$.

Beginnen wir mit der Definition der erwähnten Doppelnebenklassenoperatoren.

Definition 6.14 *Sei $N \in \mathbb{F}_q[T]$ normiert. Es sei*

$$\mathbb{P}_N := \{P \in \mathbb{F}_q[T] \mid P \text{ normiert, irreduzibel und } \mathrm{ggT}(P, N) = 1\}$$

die Menge der normierten irreduziblen Polynome, die zu N teilerfremd sind. Für $P \in \mathbb{P}_N$ bezeichne $T_{(1,1,P)}$ den zur Doppelnebenklasse

$$\Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \Gamma_0(N)$$

sowie $T_{(1,P,P)}$ den zur Doppelnebenklasse

$$\Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \Gamma_0(N)$$

gehörigen Doppelnebenklassenoperator.

6. Hecke-Operatoren

In den folgenden beiden Lemmata werden wir die für die Berechnung der Hecke-Operatoren $T_{(1,1,P)}$ bzw. $T_{(1,P,P)}$ benötigten Vertretersysteme der zugehörigen Doppelnebenklassen bestimmen.

Lemma 6.15 *Seien N und P zwei normierte Polynome aus $\mathbb{F}_q[T]$. Weiter sei P irreduzibel sowie N und P teilerfremd. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \Gamma_0(N) \\ &= \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S \bmod P} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S,T \bmod P} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & S \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass jedes Element der Menge

$$\Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \Gamma_0(N)$$

in einer der oben angegebenen Nebenklassen liegt.

Hierfür betrachten wir zunächst die Doppelnebenklasse

$$\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]).$$

Aufgrund der Irreduzibilität von P gilt

$$\begin{aligned} & \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \\ &= \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S \bmod P} \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \begin{pmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S,T \bmod P} \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \begin{pmatrix} 1 & 0 & S \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Disjunktheit dieser Zerlegung induziert die Disjunktheit der Zerlegung bezüglich $\Gamma_0(N)$.

Wir werden nachweisen, dass sich dieses Vertretersystem auf die Doppelnebenklasse bezüglich $\Gamma_0(N)$ übertragen lässt. Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0(N)$. Da die Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ in der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ enthalten ist, existiert ein $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ sowie ein

$$\beta \in \left\{ \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid S \bmod P \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & S \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \mid S, T \bmod P \right\}$$

mit

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \gamma_2 = g\beta.$$

Wir werden zeigen, dass g bereits in $\Gamma_0(N)$ enthalten ist. Multipliziert man zwei Matrizen aus $\mathrm{GL}_3(K_\infty)$, deren Einträge unterhalb der Diagonale durch N teilbar sind, so sind auch die Einträge des Produktes unterhalb der Diagonale modulo N zu Null kongruent. Damit besitzt die Matrix

$$g = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \gamma_2 \beta^{-1}$$

unterhalb der Diagonale nur durch N teilbare Elemente. Da g ein Element der $GL_3(\mathbb{F}_q[T])$ ist, liegt g somit in der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$.

Es bleibt nachzuweisen, dass jedes der Elemente aus

$$\left\{ \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid S \bmod P \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & S \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \mid S, T \bmod P \right\}$$

in

$$\Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \Gamma_0(N)$$

enthalten ist.

Dabei können die Einträge oberhalb der Diagonale durch Spaltenoperationen, d.h. durch Rechtsmultiplikation mit Elementen aus $\Gamma_0(N)$, eliminiert werden. Somit bleibt die Inklusion nur noch für die Diagonalmatrizen

$$\begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

zu untersuchen. Hierbei ist letztere trivialerweise in

$$\Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \Gamma_0(N)$$

enthalten. Für die übrigen beiden Matrizen werden wir die Teilerfremdheit der Polynome N und P und somit die Existenz zweier Polynome $a, b \in \mathbb{F}_q[T]$ mit

$$1 = aP + bN$$

nutzen. Mit dieser Wahl von a und b gilt

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ N & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -N & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & N & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}.$$

Wir sehen also, dass beide Matrizen in

$$\Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \Gamma_0(N)$$

enthalten sind. □

Nahezu analog lässt sich ein Vertretersystem der zu $T_{(1,P,P)}$ gehörenden Doppelnebenklasse ermitteln.

Lemma 6.16 *Seien N und P zwei normierte Polynome aus $\mathbb{F}_q[T]$. Weiter sei P irreduzibel sowie N und P teilerfremd. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \Gamma_0(N) \\ = & \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S \bmod P} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & S \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S, T \bmod P} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & S & T \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. Hecke-Operatoren

Beweis: Wie schon im Beweis des letzten Satzes betrachten wir zunächst die Doppelnebenklasse

$$\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]).$$

Aus der Irreduzibilität von P sowie dem Elementarteilersatz folgt

$$\begin{aligned} & \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \\ &= \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S \bmod P} \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & S \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S, T \bmod P} \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \begin{pmatrix} 1 & S & T \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog zum Beweis des letzten Satzes folgt hieraus

$$\begin{aligned} & \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \Gamma_0(N) \\ & \subseteq \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S \bmod P} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & S \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S, T \bmod P} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & S & T \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die umgekehrte Inklusion brauchen wir erneut lediglich die Diagonalmatrizen

$$\begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

zu überprüfen. Wie auch im Beweis des letzten Satzes ermöglicht die Teilerfremdheit der Polynome N und P und die daraus resultierende Existenz von Polynomen $a, b \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $aP + bN = 1$ ein Vertauschen der Einträge 1 und P auf der Diagonalen. \square

Die Kenntnisse der Vertretersystem der Doppelnebenklassen ermöglicht es uns, im folgenden Lemma nachzuweisen, dass die Operatoren $T_{(1,1,P)}$ und $T_{(1,P,P)}$ bezüglich des Petersson-Skalarproduktes zueinander adjungiert sind.

Lemma 6.17 *Sei $N \in \mathbb{F}_q[T]$ normiert und $P \in \mathbb{P}_N$. Dann gilt*

$$\widetilde{T_{(1,1,P)}} = T_{(1,P,P)}.$$

Beweis: Nach Satz 6.9 gilt für jeden Doppelnebenklassenoperator $T_{\Gamma\alpha\Gamma}$ die Gleichheit

$$\widetilde{T_{\Gamma\alpha\Gamma}} = T_{\Gamma\alpha^{-1}\Gamma},$$

wobei $\widetilde{T_{\Gamma\alpha\Gamma}}$ die Adjungierte von $T_{\Gamma\alpha\Gamma}$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ bezeichne. Für $P \in \mathbb{P}_N$ folgt daher

$$\widetilde{T_{(1,1,P)}} = T_{\Gamma_0(N)\alpha_1\Gamma_0(N)}$$

mit

$$\alpha_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$$

In Abschnitt 6.2 haben wir gezeigt, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{F}_q(T)^\times$ die Gleichheit

$$T_{\Gamma\alpha\Gamma} = T_{\Gamma\lambda\alpha\Gamma}$$

gilt. Wir erhalten somit

$$\widetilde{T}_{(1,1,P)} = T_{\Gamma_0(N)\hat{\alpha}_1\Gamma_0(N)}$$

mit

$$\hat{\alpha}_1 := P\alpha_1 = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da für jedes $\tilde{\alpha} \in \Gamma\alpha\Gamma$ die Gleichheit

$$T_{\Gamma\tilde{\alpha}\Gamma} = T_{\Gamma\alpha\Gamma}$$

gültig ist, folgt aus der in Lemma 6.16 gezeigten Inklusionen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)\hat{\alpha}_1\Gamma_0(N)$$

die Identität

$$\widetilde{T}_{(1,1,P)} = T_{(1,P,P)}.$$

□

Wie anfangs beschrieben, möchten wir die von der Operatoren $T_{(1,1,P)}$ und $T_{(1,P,P)}$ erzeugte \mathbb{C} -Algebra betrachten, wobei P alle Elemente von \mathbb{P}_N durchläuft.

Definition 6.18 Sei $N \in \mathbb{F}_q[T]$ ein normiertes Polynom. Die minimale \mathbb{C} -Unteralgebra H_N von $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma)$ mit

$$T_{(1,1,P)} \in H_N \text{ und } T_{(1,P,P)} \in H_N \text{ für alle } P \in \mathbb{P}_N$$

heißt Hecke-Algebra bezüglich N . Die Elemente von H_N nennen wir Hecke-Operatoren bezüglich N .

Aus der in Lemma 6.17 gezeigten Gleichheit

$$\widetilde{T}_{(1,1,P)} = T_{(1,P,P)}$$

folgt, dass die adjungierte Abbildung eines Hecke-Operators bezüglich des Petersson-Skalarproduktes wieder ein Hecke-Operator ist.

Mithilfe der in Lemma 6.15 bzw. 6.16 gewonnenen Erkenntnisse über die zu den erzeugenden Hecke-Operatoren $T_{(1,1,P)}$ bzw. $T_{(1,P,P)}$ gehörenden Doppelnebenklassen können wir die Kommutativität der Hecke-Algebra nachweisen.

Satz 6.19 Die Hecke-Algebra H_N ist kommutativ.

Beweis: Die Kommutativität muss lediglich für die Erzeuger nachgewiesen werden. Hierzu seien $P, \tilde{P} \in \mathbb{P}_N$ zwei irreduzible normierte zu N teilerfremde Polynome aus $\mathbb{F}_q[T]$. Es sind folgende Gleichheiten zu zeigen:

6. Hecke-Operatoren

$$(i) \quad T_{(1,1,P)} \circ T_{(1,1,\tilde{P})} = T_{(1,1,\tilde{P})} \circ T_{(1,1,P)},$$

$$(ii) \quad T_{(1,1,P)} \circ T_{(1,\tilde{P},\tilde{P})} = T_{(1,\tilde{P},\tilde{P})} \circ T_{(1,1,P)},$$

$$(iii) \quad T_{(1,P,P)} \circ T_{(1,\tilde{P},\tilde{P})} = T_{(1,\tilde{P},\tilde{P})} \circ T_{(1,P,P)}.$$

Dies kann durch einfaches Nachrechnen und Vergleichen geschehen. Hierbei wird bei verschiedenen Polynomen P und \tilde{P} die Teilerfremdheit dieser und die daraus resultierende Darstellung der 1 genutzt. □

Insgesamt haben wir in diesem Abschnitt eine kommutative \mathbb{C} -Algebra von Endomorphismen auf $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ definiert, welche für jeden solchen Endomorphismus ebenfalls die adjungierte Abbildung bezüglich des Petersson-Skalarproduktes enthält. Somit kommutiert insbesondere jeder Hecke-Operator $T \in H_N$ mit der Adjungierten \tilde{T} . Dieses Ergebnis wollen wir zum Abschluss des Kapitels herausstellen.

Korollar 6.20 *Jeder Hecke-Operator $T \in H_N$ ist normal bezüglich des Petersson-Skalarproduktes.*

7. Berechnung der Hecke-Operatoren

In diesem Kapitel möchten wir uns mit der praktischen Berechnung von Doppelnebenklassenoperatoren beschäftigen. Wir möchten zu einer Basis der Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ der geschlossenen Flächen die Abbildungsmatrix eines Doppelnebenklassenoperators $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}$ bestimmen.

Unser Ausgangspunkt wird hierbei jedoch nicht eine Basis von $\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}}$ sein, sondern eine Basis des Urbildes $\mathcal{U} := \Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}})$ unter der in Kapitel 4 eingeführten Abbildung

$$\Upsilon : \mathbb{Z}^{\mathcal{S}_{C_2}(\Gamma \setminus \mathcal{B})} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B}_n)}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} a_\lambda [s_\lambda] \mapsto \sum_{\lambda=1}^{\nu} a_\lambda \sum_{[s] \in \mathcal{F}_\Gamma^n([s_\lambda])} \varepsilon_s [s].$$

Hierbei bezeichne für $n := \max\{2, \deg(N)\}$ und einen Simplex $s_\lambda = g_\lambda C_2$ mit $g_\lambda \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ die Menge $\mathcal{F}_\Gamma^n([s_\lambda])$ die Fortsetzung

$$\mathcal{F}_\Gamma^n([s_\lambda]) = \mathcal{F}_\Gamma^n([g_\lambda C_2]) = \{[g_\lambda \omega] \mid \omega \in \mathcal{S}_2(\mathcal{W}_n)\}$$

der Größe n sowie ε_s den Wert

$$\varepsilon_s := \begin{cases} 1 & \exists j, k \in \mathbb{N}_0 : \text{Niveau}(s) = \{[j, k], [j, k+1], [j+1, k+1]\}, \\ -1 & \exists j, k \in \mathbb{N}_0 : \text{Niveau}(s) = \{[j, k], [j+1, k], [j+1, k+1]\}. \end{cases}$$

Ein Verfahren zur Bestimmung einer Basis des Urbildes \mathcal{U} haben wir in Kapitel 5 erklärt.

Das in diesem Kapitel beschriebene Verfahren zur Berechnung einer Abbildungsmatrix wurde für irreduzible Polynome $N \in \mathbb{F}_q[T]$ und Hecke-Operatoren $T_{(1,1,P)}^{\mathcal{G}}$ bzw. $T_{(1,P,P)}^{\mathcal{G}}$ im Computer-Algebra-System Mathematica umgesetzt. Daher bildet die programmtechnische Umsetzung einen Schwerpunkt dieses Kapitels. Die entsprechende Mathematica-Datei findet sich in der Anlage.

7.1 Ablauf des Verfahrens

In diesem Abschnitt möchten wir zunächst den groben Ablauf des Verfahrens angeben. Hierbei bezeichne T den Doppelnebenklassenoperator $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}$.

7. Berechnung der Hecke-Operatoren

Eingabe

- Basis (U_1, \dots, U_r) des Urbilds $\mathcal{U} = \Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}})$
- $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ mit $\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{l=1}^m \Gamma\beta_l$

Ablauf

- (1) Bestimmen von $G_{T,i} := T(\Upsilon(U_i))$
 - (1.1) Bestimmen von $G_i := \Upsilon(U_i)$
 - (1.2) Bestimmen von $G_{T,i} = T(G_i)$
- (2) Bestimmen von $U_{T,i} := \Upsilon^{-1}(G_{T,i})$
 - (2.1) Bestimmen des Niveaus der in $G_{T,i}$ auftretenden Simplizes
 - (2.2) Aufsummieren der Simplizes vom Niveau \mathcal{C}_2
- (3) Darstellen von $U_{T,i}$ als \mathbb{Z} -Linearkombination der Elemente U_1, \dots, U_r

Ausgabe

- Abbildungsmatrix $M_B^B(T)$ zur Basis $B = (\Upsilon(U_1), \dots, \Upsilon(U_r))$

Wir werden die einzelnen Schritte in den folgenden Abschnitten detailliert erklären und dabei sehen, dass das Verfahren terminiert.

7.2 Bestimmen von $T(\Upsilon(U_i))$

In Kapitel 5 haben wir erläutert, wie ausgehend von einem Vertretersystem der Menge $\Gamma \backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ algorithmisch eine Basis des Urbilds $\mathcal{U} = \Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^{\mathbb{Z}})$ berechnet werden kann. Die Elemente U_i der berechneten Basis (U_1, \dots, U_r) von \mathcal{U} liegen nach Durchlaufen des Algorithmus in der Form

$$\{ (\widetilde{g}_{i\lambda}, \widetilde{a}_{i\lambda}) \mid \lambda = 1, \dots, \nu_i \}$$

mit $\widetilde{g}_{i\lambda} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ sowie $\widetilde{a}_{i\lambda} \in \mathbb{Z}$ vor. Die Matrizen $\widetilde{g}_{i\lambda}$ repräsentieren die Simplizes $[\widetilde{g}_{i\lambda}\mathcal{C}_2]$, wobei gleiche 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2[\Gamma \backslash \mathcal{B}]$ durch gleiche Matrizen dargestellt werden. Ausgehend von dieser Darstellung möchten wir für jedes Element U_i die geschlossene Fläche $G_{T,i} = T(\Upsilon(U_i))$ ermitteln. Beginnen werden wir mit der Bestimmung der zur U_i gehörigen geschlossenen Fläche $G_i = \Upsilon(U_i)$.

7.2.1 Bestimmen von $\Upsilon(U_i)$

Für eine Anfangsfläche

$$U_i = \sum_{\lambda=1}^{\nu_i} \widetilde{a}_{i\lambda} [\widetilde{s}_{i\lambda}]$$

ist das Bild unter der Abbildung Υ die geschlossene Fläche

$$\Upsilon(U_i) = \sum_{\lambda=1}^{\nu_i} \widetilde{a}_{i\lambda} \sum_{[s] \in \mathcal{F}_\Gamma^n([\widetilde{s}_{i\lambda}])} \varepsilon_s [s].$$

Die Fortsetzung $\mathcal{F}_\Gamma^n([\widetilde{s}_{i\lambda}])$ eines Simplex $[\widetilde{s}_{i\lambda}] = [\widetilde{g}_{i\lambda} \mathcal{C}_2] \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ mit $\widetilde{g}_{i\lambda} \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ ist hierbei durch

$$\mathcal{F}_\Gamma^n([\widetilde{s}_{i\lambda}]) = \{[\widetilde{g}_{i\lambda} \omega] \mid \omega \in \mathcal{S}_2(\mathcal{W}_n)\}$$

gegeben.

Nach den Überlegungen aus Kapitel 1 kann jeder Simplex $\omega \in \mathcal{S}_2(\mathcal{W}_n)$ durch eine Matrix $g_\omega \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ repräsentiert werden. Um also aus der Anfangsfläche U_i gehörenden Liste

$$\{(\widetilde{g}_{i\lambda}, \widetilde{a}_{i\lambda}) \mid \lambda = 1, \dots, \nu_i\}$$

eine Darstellung von $\Upsilon(U_i)$ zu erhalten, bilden wir für jedes Tupel $(\widetilde{g}_{i\lambda}, \widetilde{a}_{i\lambda})$ die Menge

$$\{(\widetilde{g}_{i\lambda} g_\omega, \varepsilon_\omega \widetilde{a}_{i\lambda}) \mid \omega \in \mathcal{S}_2(\mathcal{W}_n)\}$$

und vereinigen diese Mengen anschließend. Hierbei bezeichnet g_ω eine Matrix aus $\text{GL}_3(K_\infty)$, die den Simplex $\omega \in \mathcal{W}_n$ repräsentiert.

Auf diese Weise haben wir die geschlossene Fläche $G_i = \Upsilon(U_i)$ ebenfalls durch eine Liste der Form

$$\{(g_{i\kappa}, a_{i\kappa}) \mid \kappa = 1, \dots, \mu_i\}$$

mit $a_{i\kappa} \in \mathbb{Z}$ dargestellt. Die Matrizen $g_{i\lambda}$ sind hierbei Elemente der $\text{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$ und repräsentieren 2-Simplizes $[s_{i\lambda}] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})$. Es ist dabei jedoch möglich, dass identische Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ durch unterschiedliche Matrizen dargestellt sind.

7.2.2 Bestimmen von $T(G_i)$

Ist

$$\Gamma \alpha \Gamma = \bigcup_{l=1}^m \Gamma \beta_l$$

mit $\beta_l \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q(T))$, so ist das Bild von

$$G_i = \sum_{\kappa=1}^{\mu_i} a_{i\kappa} [s_{i\kappa}]$$

7. Berechnung der Hecke-Operatoren

unter der Abbildung $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}$ die geschlossene Fläche

$$G_{T,i} = T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}(G_i) = \sum_{l=1}^m \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{i\kappa} [\beta_l s_{i\kappa}].$$

Ausgehend von der zuvor erstellten Liste

$$\{(g_{i\kappa}, a_{i\kappa}) \mid \kappa = 1, \dots, \mu_i\},$$

welche die geschlossene Fläche G_i repräsentiert, erhalten wir durch die Menge

$$\{(\beta_l g_{i\kappa}, a_{i\kappa}) \mid l = 1, \dots, m, \kappa = 1, \dots, \mu_i\}$$

eine Darstellung von $G_{T,i}$. Hierbei können jedoch erneut unterschiedliche Matrizen gleiche Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ repräsentieren.

7.3 Bestimmen von $U_{T,i}$

Da in den bisher gewonnenen Darstellungen der geschlossenen Flächen G_i sowie $G_{T,i}$ gleiche Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ durch unterschiedliche Matrizen repräsentiert werden können, lässt sich noch keine Darstellung von $G_{T,i}$ als \mathbb{Z} -Linearkombination der geschlossenen Flächen G_1, \dots, G_r ablesen.

Statt jedoch die Repräsentation der G_i und $G_{T,i}$ zu vereinheitlichen, werden wir im Folgenden die zu den geschlossenen Flächen $G_{T,i}$ gehörenden Urbilder $U_{T,i} = \Upsilon^{-1}(G_{T,i})$ bestimmen und für diese anschließend eine zur Basis (U_1, \dots, U_r) kompatible Darstellung ermitteln.

7.3.1 Bestimmen des Niveaus der in $G_{T,i}$ auftretenden Simplizes

Zum Bilden der Anfangsfläche $U_{T,i}$ müssen zunächst die in $G_{T,i}$ auftretenden 2-Simplizes vom Niveau \mathcal{C}_2 herausfiltern. Hierfür stellen wir den zur Matrix $\beta_l g_{i\kappa}$ gehörenden 2-Simplex $s_{li\kappa}$ aus $\mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ zunächst als Produkt

$$s_{li\kappa} = x_{li\kappa} \omega_{li\kappa}$$

mit $x_{li\kappa} \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ und $\omega_{li\kappa} = \text{Niveau}(s_{li\kappa}) \in \mathcal{W}$ dar. Anschließend speichern wir statt des Tupels $(\beta_l g_{i\kappa}, a_{i\kappa})$ das Tupel

$$(x_{li\kappa}, w_{li\kappa}, a_{i\kappa})$$

ab, wobei $w_{li\kappa} \in W \cup WQ$ mit

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\infty}^{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\infty}^{m_2} \end{pmatrix} \mid m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0, m_1 \leq m_2 \right\}$$

und

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die zum 2-Simplex $\omega_{li\kappa}$ gehörende Matrix aus $W \cup WQ$ bezeichne. Die zu $\omega_{li\kappa}$ gehörende Matrix aus $W \cup WQ$ ist hierbei eindeutig.

Zur Bestimmung der Matrizen $x_{li\kappa}$ und $w_{li\kappa}$ wird eine optimierte Version eines in [Mü] vorgestellten Algorithmus verwendet. Diese Version wird zum Abschluss des Kapitels in Abschnitt 7.5 im Detail erläutert.

7.3.2 Summation der Simplizes vom Niveau \mathcal{C}_2

Die im vorigen Unterabschnitt gewonnene Beschreibung von $G_{T,i}$ ermöglicht es uns, die Untermenge der Simplizes vom Niveau \mathcal{C}_2 zu ermitteln. Wir erhalten somit für $U_{T,i}$ eine Liste der Form

$$\{(x_{ij}, b_{ij}) \mid j = 1, \dots, r_i\},$$

wobei die Elemente $x_{ij} \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ vom Niveau \mathcal{C}_2 sowie $b_{ij} \in \mathbb{Z}$ die entsprechenden Koeffizienten repräsentieren. Es ist anzumerken, dass in dieser Darstellung weiterhin gleiche Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ durch verschiedene Matrizen beschrieben sein können.

Nach Aufbau des in Kapitel 5 erläuterten Algorithmus zur Bestimmung einer Basis der Gruppe \mathcal{U} sind die in den Anfangsflächen U_1, \dots, U_r auftretenden 2-Simplizes durch Matrizen der $\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ gegeben, wobei hier bereits gleiche Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \setminus \mathcal{B})$ durch gleiche Matrizen beschrieben werden. Um eine zur Basis (U_1, \dots, U_r) kompatible Darstellung von $U_{T,i}$ zu gewinnen, prüfen wir daher für jedes Element x_{ij} der Liste

$$\{(x_{ij}, b_{ij}) \mid j = 1, \dots, r_i\},$$

ob $x_{ij}\mathcal{C}_2$ zu einem in der Anfangsfläche U_1, \dots, U_r auftauchenden Simplex äquivalent ist und ersetzen gegebenenfalls das Element x_{ij} durch den Vertreter aus $\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ des entsprechenden 2-Simplex.

Zur Überprüfung der Äquivalenz zweier Simplizes $x_1\mathcal{C}_2$ und $x_2\mathcal{C}_2$ mit $x_1, x_2 \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ unter Operation der Kongruenzuntergruppe Γ nutzen wir erneut Satz 1.21, nach welchem genau dann $[x_1\mathcal{C}_2] = [x_2\mathcal{C}_2]$ gilt, wenn ein $g \in \text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\mathcal{C}_2)$ mit $x_2gx_1^{-1} \in \Gamma$ existiert. Da die Gruppe $\text{Fix}_{\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])}(\mathcal{C}_2)$ endlich ist, kann die Äquivalenz in endlicher Zeit entschieden werden.

Da $U_{T,i}$ das Urbild einer geschlossenen Fläche ist, ist $U_{T,i}$ eine \mathbb{Z} -Linearkombination der Anfangsflächen U_1, \dots, U_r . Daher müssen sich die Koeffizienten derjenigen Simplizes, welche keinem der in U_1, \dots, U_r auftretenden 2-Simplizes gleichen, jeweils zu Null aufsummieren. Diese Simplizes bedürfen daher keiner weiteren Beachtung und können somit samt ihrer Koeffizienten aus der Liste entfernt werden.

7. Berechnung der Hecke-Operatoren

Indem wir für die restlichen Elemente die Koeffizienten gleicher Simplizes addieren, erhalten wir eine Liste

$$\{(\widetilde{x}_{ik}, c_{ik}) \mid k = 1, \dots, l_i\},$$

in welcher für festes i zu jedem Simplex aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ höchstens ein \widetilde{x}_{ik} gehört.

7.4 Bestimmen der Abbildungsmatrix

Mithilfe der im vorigen Abschnitt gewonnenen Beschreibung von $U_{T,i}$ können wir eine Darstellung

$$U_{T,i} = \sum_{j=1}^r d_{ij} U_j$$

von $U_{T,i}$ als \mathbb{Z} -Linearkombination von U_1, \dots, U_r ermitteln. Aufgrund der \mathbb{Z} -Linearität von Υ folgt

$$G_{T,i} = \sum_{j=1}^r d_{ij} \Upsilon(U_j) = \sum_{j=1}^r d_{ij} G_j.$$

Indem wir dieses Verfahren für alle Basiselemente U_1, \dots, U_m durchführen, erhalten wir eine Abbildungsmatrix von $T_{\Gamma\alpha\Gamma}^{\mathcal{G}}$ zur Basis (G_1, \dots, G_r) .

Wir möchten an dieser Stelle das Beispiel aus Kapitel 5 fortführen.

Beispiel 7.1 Sei $q = 2, N = T^2 + T + 1$ und $\Gamma = \Gamma_0(N)$. Für die in Beispiel 5.5 bestimmte Basis B von $\mathcal{G}_{\Gamma}^{\mathbb{Z}}$ erhalten mit dem in diesem Kapitel beschriebenen Verfahren für $P = T \in \mathbb{F}_q[T]$ die Abbildungsmatrizen

$$M_B^B(T_{(1,1,P)}^{\mathcal{G}}) = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } M_B^B(T_{(1,P,P)}^{\mathcal{G}}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.5 Bestimmen von Vertreter und Niveau

Wie zuvor erwähnt, möchten wir zum Abschluss des Kapitels erklären, wie wir für einen Simplex $s \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ algorithmisch ein $x \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ sowie ein $\omega \in \mathcal{W}$ mit

$$s = x\omega$$

bestimmen. Bei den hier vorgestellten Algorithmen handelt es sich um Verfahren aus der Arbeit „Zu Bruhat-Tits-Gebäuden der $\mathrm{GL}(3)$ über Funktionenkörpern“ [Mü], welches zum Teil weiter optimiert wurden.

In Satz 1.12 haben wir gesehen, dass jedem 2-Simplex $s \in \mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ eindeutig eine Nebenklasse von $\mathrm{GL}_3(K_{\infty}) / \langle R \rangle IK_{\infty}$ mit

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pi_{\infty} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$I = \left\{ M \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) \mid M \equiv \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \pmod{\pi_\infty} \right\}$$

zugeordnet werden kann. Unser Ziel ist es zunächst für einen durch eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_3(K_\infty)$ gegebenen 2-Simplex s einen kanonischen Vertreter A_V der Nebenklasse $A\langle R \rangle IK_\infty$ zu bestimmen.

Hierzu betrachten wir einen Satz aus der zuvor erwähnten Arbeit [Mü], in welcher ein vollständiges Vertretersystem der Menge $\mathrm{GL}_3(K_\infty)/\langle R \rangle IK_\infty^\times$ angegeben wird. Wir werden den Beweis an dieser Stelle nicht komplett wiederholen, sondern uns auf die algorithmische Bestimmung des kanonischen Vertreters beschränken.

Für die Darstellung des Vertretersystems erinnern wir an dieser Stelle an eine weitere Notation. Für ein Element $\alpha = \sum_{i=r}^{\infty} a_i \pi_\infty^i$ mit $a_i = 0$ für fast alle $i \geq r$ ist der Wert $d_{\pi_\infty}(\alpha)$ durch

$$d_{\pi_\infty}(\alpha) = \max \{i \mid a_i \neq 0\}$$

definiert.

Satz 7.2 Sei

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, d_{\pi_\infty}(\alpha) < m_1, d_{\pi_\infty}(\beta) < m_1, d_{\pi_\infty}(\gamma) < m_2 \right\}.$$

Dann ist

$$V \cup VQ$$

ein vollständiges Vertretersystem der $\mathrm{GL}_3(K_\infty)/\langle R \rangle IK_\infty^\times$.

Beweis: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(K_\infty)$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $v_\infty(i) < v_\infty(g), v_\infty(h)$ gilt. Anderenfalls kann dies durch Multiplikation mit R bzw. R^2 erreicht werden. Durch

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{g}{i} & -\frac{h}{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & i^{-1} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: A_1$$

erhalten wir eine zu A unter der Operation der $\langle R \rangle IK_\infty^\times$ äquivalente Matrix, in welcher die vorderen beiden Einträge der dritten Zeile gleich Null sind. An dieser Stelle müssen wir eine Fallunterscheidung bezüglich der Relation von $v_\infty(d_1)$ und $v_\infty(e_1)$ durchführen.

1. Fall: $v_\infty(d_1) > v_\infty(e_1)$

In diesem Fall können wir das Element d_1 durch Operation der Standard-Iwahorigruppe I eliminieren. Wir erhalten durch

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{d_1}{e_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & e_2 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: A_2$$

7. Berechnung der Hecke-Operatoren

eine zu A äquivalente Matrix in oberer Dreiecksgestalt.

2. Fall: $v_\infty(d_1) \leq v_\infty(e_1)$

Ist die Bewertung des Eintrages d_1 kleiner-gleich der Bewertung des Eintrages e_1 , so können wir den Eintrag e_1 durch

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{e_1}{d_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} & \hat{c} \\ \hat{d} & 0 & \hat{f} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} := \hat{A}$$

eliminieren und erhalten eine zu A äquivalente Matrix, welche noch nicht obere Dreiecksgestalt besitzt. Da ein Spaltentausch nicht durch Elemente der Gruppe I realisierbar ist, operieren wir mit der Matrix Q^{-1} . Multiplizieren wir \hat{A} von links mit Q^{-1} , so erhalten wir

$$\hat{A}Q^{-1} = \hat{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi_\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty \hat{b} & \hat{a} & \hat{c} \\ 0 & \hat{d} & \hat{f} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & e_2 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: A_2.$$

Wir erhalten somit in beiden Fällen eine obere Dreiecksmatrix. Es ist jedoch anzumerken, dass die im 2. Fall erhaltene Matrix unter der Operation der Gruppe $\langle R \rangle IK_\infty$ nicht zu A äquivalent ist.

Die Einträge a_2 und e_2 besitzen Darstellungen der Form $a_2 = \pi_\infty^{m_1} u_{a_2}$ und $e_2 = \pi_\infty^{m_2} u_{e_2}$ mit $m_1 := v_\infty(a_2)$ und $m_2 := v_\infty(e_2)$ sowie $u_{a_2}, u_{e_2} \in \mathcal{O}_\infty^\times$. Diese Darstellung ermöglicht es uns, eine zu A_2 äquivalente Matrix anzugeben, deren Diagonaleinträge nur aus Potenzen von π_∞ bestehen:

$$A_2 \begin{pmatrix} u_{a_2}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & u_{e_2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: A'$$

Das Element γ lässt sich als

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \pi_\infty^{m_2}$$

mit $d_{\pi_\infty}(\gamma_0) < m_2$ schreiben. Dies ermöglicht es uns den Eintrag γ bezüglich $\pi_\infty^{m_2}$ durch die Multiplikation

$$A' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \gamma_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: A''$$

zu reduzieren. Die Elemente α und β besitzen ebenfalls Darstellungen der Form

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \pi_\infty^{m_1} \alpha_1, \\ \beta &= \beta_0 + \pi_\infty^{m_2} \beta_1 \end{aligned}$$

mit $d_{\pi_\infty}(\alpha_0), d_{\pi_\infty}(\beta_0) < m_1$. Wie zuvor können wir die Einträge α und β bezüglich $\pi_\infty^{m_1}$ durch

$$A'' \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \gamma_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \tilde{A}$$

reduzieren.

Die bisherige Argumentation liefert ein $i \in \{0, 1, 2\}$ sowie eine Matrix $g_1 \in IK_\infty^\times$ mit $AR^i g_1 \in V$ bzw. zwei Matrizen $g_2, g_3 \in IK_\infty^\times$ mit $AR^i g_2 Q^{-1} g_3 \in V$.

Da wir an den Nebenklassen bezüglich der Operation der Gruppe $\langle R \rangle IK_\infty$ interessiert sind, werden wir im nächsten Schritt die Existenz einer Matrix \tilde{g}_3 mit $Q^{-1} g_3 = \tilde{g}_3 Q^{-1}$ nachweisen. Hierzu bestimmen wir für eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} & \hat{c} \\ \hat{d} & \hat{e} & \hat{f} \\ \hat{g} & \hat{h} & \hat{i} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(K_\infty)$$

Kriterien für die Existenz einer Matrix $\tilde{B} \in I$ mit $Q^{-1} B = \tilde{B} Q^{-1}$.

Die Gleichheit $Q^{-1} B = \tilde{B} Q^{-1}$ ist äquivalent zur Gleichheit

$$\tilde{B} = Q^{-1} B Q = \begin{pmatrix} \hat{e} & \pi_\infty^{-1} \hat{d} & \hat{f} \\ \pi_\infty \hat{b} & \hat{a} & \pi_\infty \hat{c} \\ \hat{h} & \pi_\infty^{-1} \hat{g} & \hat{i} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix \tilde{B} liegt genau dann in I , wenn die Bedingungen

$$(i) \hat{a}, \hat{b}, \hat{e}, \hat{f}, \hat{i} \in \mathcal{O}_\infty, \quad (ii) v_\infty(\hat{d}), v_\infty(\hat{h}) \geq 1, \quad (iii) v_\infty(\hat{g}) > 1, \quad (iv) v_\infty(\hat{c}) \geq -1$$

sowie

$$(v) \det(\tilde{B}) = \det(Q^{-1} B Q) = \det(B) \in \mathcal{O}_\infty^\times$$

erfüllt sind.

Betrachten wir die im zuvor erklärten Algorithmus aufgeführten Matrizen, deren Produkt die Matrix g_3 ergibt, so sehen wir, dass jede dieser Matrizen g' diese Kriterien erfüllt und somit eine Matrix $\tilde{g}' \in I$ mit $Q^{-1} g' = \tilde{g}' Q^{-1}$ existiert. Das Produkt dieser Matrizen liefert ein Element \tilde{g}_3^{-1} mit $Q^{-1} g_3 = \tilde{g}_3 Q^{-1}$. Somit erhalten wir

$$AR^i g_2 Q^{-1} g_3 = AR^i g_2 \tilde{g}_3 Q^{-1} \in V$$

und daher

$$AR^i g_2 \tilde{g}_3 \in VQ.$$

Wir können somit für jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_3(K_\infty)$ eine unter der Operation der $\langle R \rangle IK_\infty^\times$ äquivalente Matrix aus $V \cup VQ$ bestimmen. Für den Nachweis der Nicht-Äquivalenz der Elemente aus $V \cup VQ$ unter $\langle R \rangle IK_\infty^\times$ verweisen wir auf [Mü]. □

Ausgehend von diesem Vertretersystem lässt sich ein Vertretersystem der

$$\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \setminus \mathrm{GL}_3(K_\infty) / \langle R \rangle IK_\infty^\times$$

bestimmen. Auch hier werden wir im Beweis lediglich die algorithmische Bestimmung der Nebenklasse behandeln.

7. Berechnung der Hecke-Operatoren

Satz 7.3 Sei

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_2} \end{pmatrix} \mid m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0, m_1 \leq m_2 \right\}.$$

Dann ist

$$W \cup WQ$$

ein vollständiges Vertretersystem der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T]) \backslash \mathrm{GL}_3(K_\infty) / \langle R \rangle \mathrm{IK}_\infty^\times$.

Beweis Sei $B \in V$. Wir werden zunächst die Existenz von Matrizen $g_1, g_2 \in \mathrm{IK}_\infty^\times$ nachweisen, für welche $g_1 B g_2$ eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge aus π_∞ -Potenzen besteht.

Bevor wir die hierzu benötigten Schritte im Detail beschreiben, geben wir zunächst einen Überblick des Ablaufes. Sei

$$B = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Im ersten Abschnitt reduzieren wir den Exponenten m_2 soweit, bis die Relation $m_2 \leq \max\{1, v_\infty(\gamma)\}$ erfüllt ist. Dies ermöglicht es uns, den Eintrag γ durch Zeilen- und Spaltenoperationen zu eliminieren. Insgesamt liefert der 1. Abschnitt eine zu A äquivalente Matrix $B^{(1)}$ mit

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1^{(1)}} & \alpha^{(1)} & \beta^{(1)} \\ 0 & \pi_\infty^{m_2^{(1)}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $m_1^{(1)}, m_2^{(1)} \in \mathbb{Z}$. Im Verlauf des 2. Abschnittes wird solange $m_1^{(1)}$ schrittweise reduziert, bis $m_1^{(1)}$ die Relation $m_1^{(1)} \leq \min\{1, m_2^{(1)}\}$ erfüllt. Diese Relation ermöglicht die Eliminierung der Elemente $\alpha^{(1)}$ und $\beta^{(1)}$. Wir erhalten somit im 2. Abschnitt eine zu $B^{(1)}$ äquivalente Matrix

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1^{(2)}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2^{(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $m_1^{(2)}, m_2^{(2)} \in \mathbb{Z}$.

Bevor wir den Algorithmus im Detail beschreiben, fügen wir noch einen kurzen Abschnitt zur Notation ein.

Aufgrund des Aufbaus des Algorithmus durch Schleifen werden wir aus Gründen der Übersichtlichkeit die Elemente $\alpha, \beta, \gamma, m_1$ sowie m_2 als Variablen behandeln.

Da K_∞ ein lokaler Körper ist, lässt sich jedes Element $x \in K_\infty^\times$ als Produkt $x = \pi_\infty^{v_\infty(x)} u$

mit $u \in \mathcal{O}_\infty^\times$ schreiben. Den zu einem Element $x \in K_\infty^\times$ gehörenden Faktor $u \in \mathcal{O}_\infty^\times$ bezeichnen wir innerhalb des Beweises mit u_x .

Weiter bezeichne das Symbol \sim die Äquivalenz zweier Matrizen bzw. zweier Produkte von Matrizen unter der linksseitigen Operation der $\text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ und der rechtsseitigen Operation der IK_∞^\times .

Im Folgenden erklären wir detailliert den Algorithmus.

1. Abschnitt

Sei

$$B = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Inhalt dieses Abschnittes ist die Bestimmung einer zu B äquivalenten Matrix der Form

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1^{(1)}} & \alpha^{(1)} & \beta^{(1)} \\ 0 & \pi_\infty^{m_2^{(1)}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $m_1^{(1)}, m_2^{(1)} \in \mathbb{Z}$.

Reduktion von γ

Ziel dieses Schrittes ist es, das Element γ durch ein Element γ_0 mit positiver Bewertung und $d_{\pi_\infty}(\gamma_0) < m_2$ zu ersetzen. Hierzu verwenden wir die Darstellung

$$\gamma = P_\gamma + \gamma_0 + \pi_\infty^{m_2} \gamma_1$$

mit $P_\gamma \in \mathbb{F}_q[T], 0 < v_\infty(\gamma_0), d_{\pi_\infty}(\gamma_0) < m_2$ sowie $0 \leq v_\infty(\gamma_1)$. Die Summanden P_γ und $\pi_\infty^{m_2} \gamma_1$ können durch folgende Operationen entfernt werden:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & P_\gamma + \gamma_0 + \pi_\infty^{m_2} \gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -P_\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta - \alpha \gamma_1 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & P_\gamma + \gamma_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta - \alpha \gamma_1 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \gamma_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=: \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \gamma_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Relation $d_{\pi_\infty}(\gamma_0) < m_2$ gewährleistet, dass, sobald $m_2 \leq \max\{1, v_\infty(\gamma)\}$ ist, die Gleichheit $\gamma_0 = 0$ gilt und somit γ vollständig durch Zeilen- und Spaltenoperationen eliminiert werden kann.

7. Berechnung der Hecke-Operatoren

Reduktion von m_2

Wie zuvor erwähnt, möchten wir in diesem Abschnitt m_2 reduzieren, um so durch wiederholte Anwendung die Relation $m_2 \leq \max\{1, v_\infty(\gamma)\}$ zu erreichen. Die Reduktion erfolgt durch folgende Operationen:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \gamma_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \gamma_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\pi_\infty^{m_2} \gamma_0^{-1} & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha - \pi_\infty^{m_2} \beta \gamma_0^{-1} & \beta \\ 0 & 0 & \gamma_0 \\ 0 & -\pi_\infty^{m_2} \gamma_0^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0^{-1} \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} \gamma_0^{-1} & \alpha \gamma_0^{-1} - \pi_\infty^{m_2} \beta \gamma_0^{-2} & \beta \gamma_0^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\pi_\infty^{m_2} \gamma_0^{-2} & \gamma_0^{-1} \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} \gamma_0^{-1} & \alpha \gamma_0^{-1} - \pi_\infty^{m_2} \beta \gamma_0^{-2} & \beta \gamma_0^{-1} \\ 0 & -\pi_\infty^{m_2} \gamma_0^{-2} & \gamma_0^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\gamma_0^{-1}}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -u_{\gamma_0^{-1}}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1 - v_\infty(\gamma_0)} & -\pi_\infty^{-v_\infty(\gamma_0)} \alpha u_{\gamma_0^{-1}}^{-1} + \pi_\infty^{m_2 - 2v_\infty(\gamma_0)} \beta & \beta \gamma_0^{-1} \\ 0 & \pi_\infty^{m_2 - 2v_\infty(\gamma_0)} & \gamma_0^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&=: \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Der Eintrag γ kann anschließend erneut wie zuvor beschrieben abgeändert werden. Da m_2 in jedem Schritt echt reduziert wird, wird in endlich vielen Schritten die Relation $m_2 \leq \max\{1, v_\infty(\gamma)\}$ erreicht.

2. Abschnitt

Ziel des Abschnittes ist es, eine zu $B^{(1)}$ äquivalente Matrix

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1^{(2)}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2^{(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $m_1^{(2)}, m_2^{(2)} \in \mathbb{Z}$ zu bestimmen.

Reduktion von α und β

Zunächst möchten wir die Elemente α und β durch Elemente α_0 und β_0 mit $m_2 < v_\infty(\alpha_0)$ und $0 < v_\infty(\beta_0)$ sowie $d_{\pi_\infty}(\alpha_0), d_{\pi_\infty}(\beta_0) < m_1$ ersetzen. Hierzu nutzen wir Darstellungen der Form

$$\alpha = \alpha_{-1} + \alpha_0 + \pi_\infty^{m_1} \alpha_1$$

7.5 Bestimmen von Vertreter und Niveau

mit $d_{\pi_\infty}(\alpha_{-1}) \leq m_2, m_2 < v_\infty(\alpha_0), d_{\pi_\infty}(\alpha_0) < m_1$ und $0 \leq v_\infty(\alpha_1)$ sowie

$$\beta = P_\beta + \beta_0 + \pi_\infty^{m_1} \beta_1$$

mit $P_\beta \in \mathbb{F}_q[T], 0 < v_\infty(\beta_0), d_{\pi_\infty}(\beta_0) < m_1$ und $0 \leq v_\infty(\beta_1)$. Die Reduktion erfolgt durch folgende Schritte:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha_{-1} + \alpha_0 + \pi_\infty^{m_1} \alpha_1 & P_\beta + \beta_0 + \pi_\infty^{m_1} \beta_1 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -\pi_\infty^{-m_2} \alpha_{-1} & -P_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha_{-1} + \alpha_0 & P_\beta + \beta_0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie zuvor können wir aus den geforderten Relationen für α_0 und β_0 im Fall $m_1 \leq \min\{1, m_2\}$ die Gleichheit $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ folgern. Im umgesetzten Algorithmus wurde zusätzlich berücksichtigt, dass, falls in der vorangegangenen Bestimmung des Vertreters in V die Matrix Q^{-1} verwendet wurde, innerhalb des Algorithmus zur Bestimmung des Vertreters in W Matrizen der Form

$$C = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} & \hat{c} \\ \hat{d} & \hat{e} & \hat{f} \\ \hat{g} & \hat{h} & \hat{i} \end{pmatrix}$$

mit $\hat{a}, \hat{b}, \hat{e}, \hat{f}, \hat{i} \in \mathcal{O}_\infty, v_\infty(\hat{d}), v_\infty(\hat{h}) \geq 1, v_\infty(\hat{g}) > 1, v_\infty(\hat{c}) \geq -1$ und $\det(C) \in \mathcal{O}_\infty^\times$ verwendet werden können. Dies ermöglicht es uns, β sogar durch einen Vertreter mit $d_{\pi_\infty}(\beta_0) < m_1 - 1$ zu ersetzen.

Reduktion von m_1

Wie im Abschnitt zur Reduktion von α und β erläutert, möchten wir die Relation $m_1 \leq \min\{1, m_2\}$ erreichen, um so eine vollständige Elimination von α und β zu ermöglichen. Für die Reduktion müssen wir ausgehend von der Relation von α und β eine Fallunterscheidung durchführen.

1. Fall: $0 < v_\infty(\beta_0) < v_\infty(\alpha_0)$

In diesem Fall erfolgt die Reduktion durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\pi_\infty^{m_1} \beta_0^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ -\pi_\infty^{m_1} \beta_0^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_0^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. Berechnung der Hecke-Operatoren

$$\begin{aligned}
& \sim \begin{pmatrix} 0 & \alpha_0 \beta_0^{-1} & 1 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} \beta_0^{-1} & 0 \\ -\pi_\infty^{m_1} \beta_0^{-2} & 0 & \beta_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_0 \beta_0^{-1} & 1 \end{pmatrix} \\
& \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} \beta_0^{-1} & 0 \\ -\pi_\infty^{m_1} \beta_0^{-2} & -\alpha_0 \beta_0^{-2} & \beta_0^{-1} \end{pmatrix} \\
& \sim \begin{pmatrix} -\pi_\infty^{m_1} \beta_0^{-2} & -\alpha_0 \beta_0^{-2} & \beta_0^{-1} \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} \beta_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_{\beta_0^{-1}}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & u_{\beta_0^{-1}}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1 - 2v_\infty(\beta_0)} & -\pi_\infty^{-v_\infty(\beta_0)} \alpha_0 \beta_0^{-1} & \beta_0^{-1} \\ 0 & \pi_\infty^{m_2 - v_\infty(\beta_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& =: \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da die Bewertung von β_0 positiv ist, wird m_1 durch diese Schritte echt reduziert. Weiter folgt aus der Positivität der Bewertung von β_0 , dass durch die Reduktion die Differenz $m_1 - m_2$ echt verringert wird.

2. Fall: $m_2 < v_\infty(\alpha_0) \leq v_\infty(\beta_0)$

Zur Reduktion werden folgende Schritte verwendet:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\pi_\infty^{m_1} \alpha_0^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \sim \begin{pmatrix} 0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ -\pi_\infty^{m_1+m_2} \alpha_0^{-1} & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_0^{-1} \beta_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_0 & 0 \\ -\pi_\infty^{m_1+m_2} \alpha_0^{-1} & \pi_\infty^{m_2} & -\pi_\infty^{m_2} \alpha_0^{-1} \beta_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \sim \begin{pmatrix} -\pi_\infty^{m_1+m_2} \alpha_0^{-1} & \pi_\infty^{m_2} & -\pi_\infty^{m_2} \alpha_0^{-1} \beta_0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_{\alpha_0^{-1}}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & u_{\alpha_0^{-1}}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1+m_2-v_\infty(\alpha_0)} & \pi_\infty^{m_2} u_{\alpha_0^{-1}}^{-1} & -\pi_\infty^{m_2} \alpha_0^{-1} \beta_0 \\ 0 & \pi_\infty^{v_\infty(\alpha_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& =: \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \alpha & \beta \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

7.5 Bestimmen von Vertreter und Niveau

Die Relation $m_2 < v_\infty(\alpha_0)$ zeigt, dass durch diese Schritte zum einen die Bewertung von m_1 und zum anderen die Differenz $m_1 - m_2$ echt verringert wird.

Wie zuvor erklärt verringern sich in beiden Fällen sowohl m_1 als auch die Differenz $m_1 - m_2$, so dass in endlich vielen Schritten die Relation $m_1 \leq \min\{1, m_2\}$ erreicht wird.

Die bisherigen Schritte liefern zusammen mit dem Beweis von Satz 7.2 für eine beliebige Matrix $A \in \text{GL}_3(K_\infty)$ somit Matrizen $g_1 \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$, $g_2, g_3 \in IK_\infty^\times$ sowie $i_1 \in \{0, 1, 2\}$ und $j_1 \in \{0, 1\}$ mit

$$g_1 A R^{i_1} g_2 Q^{-j_1} g_3 = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Durch Zeilentausch, Multiplikation mit einer geeigneten π_∞ -Potenz sowie der Operation der Matrizen Q^{-1} und R können wir diese in eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq m_1 \leq m_2$ umwandeln. Wir erhalten somit eine Matrix $\tilde{g}_1 \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ sowie $i_2 \in \{0, 1, 2\}$ und $j_2 \in \{0, 1\}$ mit

$$\tilde{g}_1 A R^{i_1} g_2 Q^{-j_1} g_3 R^{i_2} Q^{-j_2} \in W.$$

Unser Ziel ist es, nachzuweisen, dass Matrizen $g \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ und $\tilde{g} \in \langle R \rangle IK_\infty^\times$ mit

$$g A \tilde{g} \in W \cup WQ$$

existieren.

Betrachten wir die Matrix g_3 , welche ein Produkt der im bisherigen Beweis verwendeten Matrizen ist, so können wir nach den Überlegungen des Beweises zum vorherigen Satz die Existenz einer Matrix $\tilde{g}_3 \in IK_\infty^\times$ mit

$$g_1 A R^{i_1} g_2 \tilde{g}_3 Q^{-j_1} R^{i_2} Q^{-j_2} \in W$$

voraussetzen. Die Matrix R kommutiert mit allen Elemente der Gruppe IK_∞^\times . Daher erhalten wir mittels der Relationen

$$Q^{-1} R = R^2 Q^{-1} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$Q^{-1} R^2 = R Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty \end{pmatrix}$$

7. Berechnung der Hecke-Operatoren

durch eventuellen Zeilentausch sowie Multiplikation einer geeigneten π_∞ -Potenz Matrizen $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ und $\tilde{g} \in \langle R \rangle IK_\infty^\times$ mit

$$gA\tilde{g} \in W \cup WQ.$$

Wir haben somit gezeigt, wie zu jedem Element $A \in \mathrm{GL}_3(K_\infty)$ algorithmisch ein kanonischer Vertreter aus $W \cup WQ$ unter der linksseitigen Operation der $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ sowie der rechtsseitigen Operation der Gruppe $\langle R \rangle IK_\infty^\times$ bestimmt werden kann.

Für den Nachweis der Nicht-Äquivalenz der Elemente aus $W \cup WQ$ verweisen wir erneut auf die Arbeit [Mü].

□

A. Beispiele

In diesem Abschnitt werden für verschiedene Werte q sowie verschiedene irreduzible Polynome $N \in \mathbb{F}_q[T]$ weitere Beispiele für Hecke-Operatoren angeben. Diese wurden in Mathematica 8 mittels der in Kapitel 5 und 7 vorgestellten Verfahren bestimmt.

Basis von \mathcal{U}

Im vierten Kapitel wurde die Abbildung Υ eingeführt, welche \mathbb{Z} -Linearkombinationen von 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ vom Niveau \mathcal{C}_2 zu \mathbb{Z} -Linearkombinationen von 2-Simplizes aus $\mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B}_n)$ fortsetzt. Hierbei bezeichnet \mathcal{B}_n das Bruhat-Tits-Gebäude der Größe $n := \max\{2, \deg(N)\}$. Nach Konstruktion der Abbildung Υ ist die Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{Z}$ der geschlossenen Flächen über \mathbb{Z} im Bild von Υ enthalten. Zu jedem Wert q und jedem Polynom N wird daher eine Basis $B_{\mathcal{U}} = \{U_1, \dots, U_r\}$ des Urbildes von $\mathcal{U} = \Upsilon^{-1}(\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{Z})$ angegeben.

Für eine Matrix $g \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ bezeichnet hierbei $[g]$ den 2-Simplex $[\Theta_2(g)] \in \mathcal{S}_2(\Gamma \backslash \mathcal{B})$, wobei $\Theta_2(g)$ der zur Matrix g gehörende 2-Simplex aus $\mathcal{S}_2(\mathcal{B})$ sei.

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,1,P)})$ bzw. $M_B^B(T_{(1,P,P)})$ von Hecke-Operatoren erster bzw. zweiter Art

Durch Fortsetzung der Basis $B_{\mathcal{U}}$ mittels der Abbildung Υ erhalten wir eine Basis $B_{\mathcal{G}}$ der Gruppe $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{Z}$ der geschlossenen Flächen über \mathbb{Z} . Das Abbild $B = \{\varphi_1, \dots, \varphi_r\} := \rho^{-1}(B_{\mathcal{G}})$ der Basis $B_{\mathcal{G}}$ unter dem im dritten Kapitel hergeleiteten Isomorphismus ρ^{-1} zwischen $\mathcal{G}_\Gamma^\mathbb{C}$ und $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ ist eine Basis des Raums $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ der Γ -invarianten ungeordneten harmonischen 2-Koketten mit endlichem Träger modulo Γ . Bezüglich dieser Basis werden zu verschiedenen zu N teilerfremden Polynomen P die Abbildungsmatrizen der Hecke-Operatoren $T_{(1,1,P)}$ bzw. $T_{(1,P,P)}$ erster bzw. zweiter Art aufgeführt.

Zur Berechnung der Abbildungsmatrizen der Hecke-Operatoren erster bzw. zweiter Art genügt jedoch die Kenntnis der Basis $B_{\mathcal{G}}$. So wurde im sechsten Kapitel nachgewiesen, dass für jedes zu N teilerfremde irreduzible Polynom N die Gleichheiten $M_B^B(T_{(1,1,P)}) = M_{B_{\mathcal{G}}}^{B_{\mathcal{G}}}(T_{(1,1,P)}^{\mathcal{G}})$ und $M_B^B(T_{(1,P,P)}) = M_{B_{\mathcal{G}}}^{B_{\mathcal{G}}}(T_{(1,P,P)}^{\mathcal{G}})$ gelten.

Zusätzlich zu den Abbildungsmatrizen wird jeweils das zugehörige charakteristische Polynom angegeben. Dieses ist hierbei in seine irreduziblen Faktoren über \mathbb{Q} zerlegt.

Zerlegung in invariante Unterräume über \mathbb{Q}

Wir möchten weiter über \mathbb{Q} die Zerlegung von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$ in unter der Hecke-Algebra invariante Unterräume betrachten. Dabei folgen wir dem unter anderem aus [Tr] bekannten Vorgehen.

A. Beispiele

Hierfür betrachten wir zunächst einen festen Hecke-Operator T_1 und dessen charakteristisches Polynom χ .

Ist χ_i ein Linearfaktor von χ mit Vielfachheit 1 und λ_i der zugehörige Eigenwert, so ist jeder Eigenvektor von T_1 zu λ_i auch Eigenvektor zu jedem anderen Hecke-Operator. Denn: Ist $T_2 \in H_N$ ein beliebiger Hecke-Operator und v_i ein Eigenvektor von T_1 zum Eigenwert λ_i , so gilt aufgrund der Kommutativität der Hecke-Algebra

$$T_1 \circ T_2(v_i) = T_2 \circ T_1(v_i) = T_2(\lambda_i v_i) = \lambda_i T_2(v_i).$$

Somit ist $T_2(v_i)$ ebenfalls ein Eigenvektor von T_1 zum Eigenwert λ_i . Aus der Eindimensionalität des Eigenraumes von λ_i zu T_1 folgt die Existenz eines $\tilde{\lambda}_i \in \mathbb{C}$ mit $T_2(v_i) = \tilde{\lambda}_i v_i$.

Ist χ_i ein Faktor höheren Grades mit Vielfachheit 1 und V_i der zugehörige unter T_1 invariante unzerlegbare Unterraum von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^\Gamma$, so ist V_i unter allen Hecke-Operatoren invariant.

Denn: Sei $T_2 \in H_N$. Aus der Irreduzibilität von χ_i über \mathbb{Q} ergibt sich die Separabilität des Faktors χ_i . Somit zerfällt χ_i über \mathbb{C} in verschiedene Linearfaktoren. Da χ_i nach Voraussetzung Vielfachheit 1 besitzt, existiert mindestens ein Linearfaktor, welcher in der Faktorisierung des charakteristischen Polynoms über \mathbb{C} nur einmal auftaucht. Ist λ_i der zu einem solchen Linearfaktor zugehörige Eigenwert mit Eigenraum E_i , so gilt $E_i \subseteq V_i \otimes \mathbb{C}$ und nach voriger Argumentation ebenfalls $E_i \subseteq T_2(V_i \otimes \mathbb{C})$. Somit ist der Schnitt von V_i und $T_2(V_i)$ nicht trivial. Aus der Vertauschbarkeit der Hecke-Operatoren folgt weiter

$$T_1 \circ T_2(V_i) = T_2 \circ T_1(V_i) \subseteq T_2(V_i)$$

und somit die Invarianz von $T_2(V_i)$ unter T_1 . Folglich ist der Schnitt $V_i \cap T_2(V_i)$ T_1 -invariant. Da V_i als unzerlegbar vorausgesetzt wurde, folgt $V_i \cap T_2(V_i) = V_i$ und somit $T_2(V_i) = V_i$.

Durch Betrachtung genügend vieler Hecke-Operatoren und ihres charakteristischen Polynoms gelingt es, für jedes betrachtete Paar (q, N) eine Zerlegung von $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ in unter der Hecke-Algebra invariante Räume anzugeben.

A.1 Beispiele für $q = 2$

A.1.1 $N = T^2 + T + 1$

Basis von \mathcal{U} :

$$\begin{aligned}
 B_{\mathcal{U}} &= \{U_1, U_2\} \\
 &:= \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \right. \\
 &\quad \left. \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+1 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,1,P)})$ von Hecke-Operatoren erster Art:

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^2 + X + 4$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^2 + X + 4$
$T^3 + T + 1$	$\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$X^2 + 4X + 19$
$T^3 + T^2 + 1$	$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$X^2 + 4X + 19$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,P,P)})$ von Hecke-Operatoren zweiter Art:

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^2 + X + 4$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^2 + X + 4$
$T^3 + T + 1$	$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$X^2 + 4X + 19$
$T^3 + T^2 + 1$	$\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$X^2 + 4X + 19$

Zerlegung in invariante Unterräume über \mathbb{Q} :

$\mathcal{H}_l(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ ist über \mathbb{Q} nicht weiter in invariante Unterräume zerlegbar.

A. Beispiele

A.2 Beispiele für $q = 3$

A.2.1 $N = T^2 + 1$

Basis von \mathcal{U}

$$\begin{aligned}
 B_{\mathcal{U}} &= \{U_1, U_2, U_3\} \\
 &:= \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+2 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ T+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \right. \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+2 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & T+1 & 1 \end{pmatrix} \right], \\
 &\quad \left. \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+2 & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+2 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,1,P)})$ von Hecke-Operatoren erster Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(X - 3)^2(X + 3)$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 \\ -3 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$(X^2 + 4X + 19)(X - 1)$
$T + 2$	$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -7 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(X^2 + 4X + 19)(X - 1)$
$T^2 + T + 2$	$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 14 \\ -6 & -5 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$(X^2 - 2X + 61)(X + 5)$
$T^2 + 2T + 2$	$\begin{pmatrix} -3 & -6 & -20 \\ 6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$(X^2 - 2X + 61)(X + 5)$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,P,P)})$ von Hecke-Operatoren zweiter Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(X - 3)^2(X + 3)$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -7 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(X^2 + 4X + 19)(X - 1)$
$T + 2$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 \\ -3 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$(X^2 + 4X + 19)(X - 1)$
$T^2 + T + 2$	$\begin{pmatrix} -3 & -6 & -20 \\ 6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$(X^2 - 2X + 61)(X + 5)$
$T^2 + 2T + 2$	$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 14 \\ -6 & -5 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$(X^2 - 2X + 61)(X + 5)$

Zerlegung in invariante Unterräume über \mathbb{Q} :

$$\mathcal{H}_l(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)} = \langle \varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3 \rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle \varphi_1, 3\varphi_2 + \varphi_3 \rangle_{\mathbb{C}}$$

A. Beispiele

A.2.2 $N = T^2 + T + 2$

Basis von \mathcal{U}

$$\begin{aligned}
 B_{\mathcal{U}} &= \{U_1, U_2, U_3\} \\
 &:= \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+2 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2T & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \right. \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+2 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ T+2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \\
 &\quad \left. \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+2 & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+2 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,1,P)})$ von Hecke-Operatoren erster Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -6 \\ 3 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$(X^2 + 4X + 19)(X - 1)$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(X^2 + 4X + 19)(X - 1)$
$T + 2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(X - 3)^2(X + 3)$
$T^2 + 1$	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -6 & -3 & -20 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$(X^2 - 2X + 61)(X + 5)$
$T^2 + 2T + 2$	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -6 & -3 & -30 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$(X^2 - 2X + 61)(X + 5)$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,P,P)})$ von Hecke-Operatoren zweiter Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(X^2 + 4X + 19)(X - 1)$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -6 \\ 3 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$(X^2 + 4X + 19)(X - 1)$
$T + 2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(X - 3)^2(X + 3)$
$T^2 + 1$	$\begin{pmatrix} -5 & -6 & 6 \\ 8 & 5 & 14 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$	$(X^2 - 2X + 61)(X + 5)$
$T^2 + 2T + 2$	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -6 & -3 & -20 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$(X^2 - 2X + 61)(X + 5)$

Zerlegung in invariante Unterräume über \mathbb{Q} :

$$\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)} = \langle -3\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle \varphi_2, 3\varphi_1 + \varphi_3 \rangle_{\mathbb{C}}$$

A. Beispiele

A.2.3 $N = T^2 + 2T + 2$

Basis von \mathcal{U}

$$\begin{aligned}
 B_{\mathcal{U}} &= \{U_1, U_2, U_3\} \\
 &:= \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+2 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ T+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \right. \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+2 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ T+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \\
 &\quad \left. \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T+2 & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+2 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,1,P)})$ von Hecke-Operatoren erster Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(X^2 + 4X + 19)(X - 1)$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$(X - 3)^2(X + 3)$
$T + 2$	$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(X^2 + 4X + 19)(X - 1)$
$T^2 + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -14 \\ -8 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$	$(X^2 - 2X + 61)(X + 5)$
$T^2 + T + 2$	$\begin{pmatrix} -3 & -8 & 6 \\ 6 & 3 & -14 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$X^2 - 2X + 61)(X + 5)$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,P,P)})$ von Hecke-Operatoren zweiter Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(X^2 + 4X + 19)(X - 1)$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$(X - 3)^2(X + 3)$
$T + 2$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(X^2 + 4X + 19)(X - 1)$
$T^2 + 1$	$\begin{pmatrix} -3 & -8 & 6 \\ 6 & 3 & 14 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$(X^2 - 2X + 61)(X + 5)$
$T^2 + T + 2$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -14 \\ -8 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$	$(X^2 - 2X + 61)(X + 5)$

Zerlegung in invariante Unterräume über \mathbb{Q} :

$$\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)} = \langle \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle -4\varphi_1 + \varphi_3, -\varphi_1 + \varphi_2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

A. Beispiele

A.3 Beispiele für $q = 4$

Der Körper \mathbb{F}_4 wird im folgenden durch die Elemente $\{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$ repräsentiert, wobei α eine Nullstelle des über \mathbb{F}_2 irreduziblen Polynoms $X^2 + 1$ bezeichne.

A.3.1 $N = T^2 + T + \alpha$

Basis von \mathcal{U}

$$\begin{aligned}
 B_{\mathcal{U}} &= \{U_1, U_2, U_3, U_4\} \\
 &:= \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \right. \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & T+\alpha+1 & 1 \end{pmatrix} \right], \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha T+T+1 & 1 \end{pmatrix} \right], \\
 &\quad \left. \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+\alpha+1 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,1,P)})$ von Hecke-Operatoren erster Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & -6 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 15 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -6 \\ 2 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -5 & -8 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,P,P)})$ von Hecke-Operatoren zweiter Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 15 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & -6 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha$	$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & -6 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha + 1$	$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & -6 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$

Zerlegung in invariante Unterräume über \mathbb{Q} :

$\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ ist über \mathbb{Q} nicht weiter in invariante Unterräume zerlegbar.

A. Beispiele

A.3.2 $N = T^2 + T + \alpha + 1$

Basis von \mathcal{U}

$$\begin{aligned}
 B_{\mathcal{U}} &= \{U_1, U_2, U_3, U_4\} \\
 &:= \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\alpha+1)T & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \right. \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & T+\alpha+1 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
 &\quad \left. \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & T+\alpha+1 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,1,P)})$ von Hecke-Operatoren erster Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -6 \\ 2 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -5 & -8 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 15 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha + 1$	$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & -6 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,P,P)})$ von Hecke-Operatoren zweiter Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -5 & -8 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -6 \\ 2 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 15 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha + 1$	$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & -6 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$

Zerlegung in invariante Unterräume über \mathbb{Q} :

$\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ ist über \mathbb{Q} nicht weiter in invariante Unterräume zerlegbar.

A. Beispiele

A.3.3 $N = T^2 + \alpha T + 1$

Basis von \mathcal{U}

$$\begin{aligned}
 B_{\mathcal{U}} &= \{U_1, U_2, U_3, U_4\} \\
 &:= \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha T & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \right. \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha T & 1 \end{pmatrix} \right], \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha T + \alpha + 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \\
 &\quad \left. \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & T + \alpha + 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,1,P)})$ von Hecke-Operatoren erster Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha$	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -5 & -8 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 15 \\ 3 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,P,P)})$ von Hecke-Operatoren zweiter Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -5 & -8 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 15 \\ 3 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$

Zerlegung in invariante Unterräume über \mathbb{Q} :

$\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ ist über \mathbb{Q} nicht weiter in invariante Unterräume zerlegbar.

A. Beispiele

A.3.4 $N = T^2 + \alpha T + \alpha$

Basis von \mathcal{U}

$$\begin{aligned}
 B_{\mathcal{U}} &= \{U_1, U_2, U_3, U_4\} \\
 &:= \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha T & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \right. \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha T + \alpha & 1 \end{pmatrix} \right], \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha T + 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
 &\quad \left. \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & T + \alpha + 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,1,P)})$ von Hecke-Operatoren erster Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 15 \\ 3 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha + 1$	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -5 & -8 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,P,P)})$ von Hecke-Operatoren zweiter Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 15 \\ 3 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -5 & -8 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$

Zerlegung in invariante Unterräume über \mathbb{Q} :

$\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ ist über \mathbb{Q} nicht weiter in invariante Unterräume zerlegbar.

A. Beispiele

A.3.5 $N = T^2 + (\alpha + 1)T + 1$

Basis von \mathcal{U}

$$\begin{aligned}
 B_{\mathcal{U}} &= \{U_1, U_2, U_3, U_4\} \\
 &:= \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha T & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \right. \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha T & 1 \end{pmatrix} \right], \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha T+1 & 1 \end{pmatrix} \right], \\
 &\quad \left. \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & T+\alpha+1 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,1,P)})$ von Hecke-Operatoren erster Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 17 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha$	$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 15 \\ -3 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,P,P)})$ von Hecke-Operatoren zweiter Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 15 \\ -3 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 17 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$

Zerlegung in invariante Unterräume über \mathbb{Q} :

$\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ ist über \mathbb{Q} nicht weiter in invariante Unterräume zerlegbar.

A. Beispiele

A.3.6 $N = T^2 + (\alpha + 1)T + \alpha + 1$

Basis von \mathcal{U}

$$\begin{aligned}
 B_{\mathcal{U}} &= \{U_1, U_2, U_3, U_4\} \\
 &:= \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha T+\alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \right. \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha T+\alpha+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha T+\alpha & 1 \end{pmatrix} \right], \\
 &\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T+\alpha+1 & T & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & T+\alpha+1 & 1 \end{pmatrix} \right]
 \end{aligned}$$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,1,P)})$ von Hecke-Operatoren erster Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 15 \\ 5 & 1 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ -2 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 2 & 2 & 0 & 17 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha + 1$	$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 & -6 \\ -2 & -2 & 0 & 15 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$

Abbildungsmatrizen $M_B^B(T_{(1,P,P)})$ von Hecke-Operatoren zweiter Art

Polynom P	Abbildungsmatrix	charakteristisches Polynom
T	$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 & -6 \\ -2 & -2 & 0 & 15 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 2 & 2 & 0 & 17 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ -2 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$
$T + \alpha + 1$	$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 15 \\ 5 & 1 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + 11X^2 - 69X + 171$

Zerlegung in invariante Unterräume über \mathbb{Q} :

$\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{\Gamma_0(N)}$ ist über \mathbb{Q} nicht weiter in invariante Unterräume zerlegbar.

Literaturverzeichnis

- [Am] Y. Amrane, *Automorphic representations and harmonic cochains for GL_{n+1}* , arXiv:1005.2539v1[math.RT] (2010)
- [BCDT] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor, *On the modularity of elliptic curves over \mathbb{Q} : wild 3-adic exercises*, J. Amer. Math. Soc., 14(4), 843-939 (2001)
- [Bu] R. Butenuth, *Ein Algorithmus zum Berechnen von Hecke-Operatoren auf Drinfeldschen Modulformen*, Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik, Universität Duisburg-Essen (2007)
- [Cr] J. Cremona, *Algorithms for Modular Elliptic Curves*, Cambridge University Press, Cambridge (1992)
- [DS] F. Diamond, J. Shurman *A First Course in Modular Forms*, Graduate Texts in Mathematics 228, Springer-Verlag, New York (2005)
- [Ge] E.-U. Gekeler, *Automorphe Formen über $\mathbb{F}_q(T)$ mit kleinem Führer*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 55, 111-146 (1985)
- [Geb] M. Gebhardt, *Operation arithmetischer Untergruppen von $GL(3)$ auf Bruhat-Tits-Gebäuden*, Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik, Universität des Saarlands, Saarbrücken (1996)
- [Gel] S. Gelbart, *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Mathematics Studies 83, Princeton University Press (1975)
- [GR] E.-U. Gekeler, M. Reversat, *Jacobians of Drinfeld Modular Curves*, J. Reine Angew. Math. 317, 16-39 (1980)
- [KW] M. Kang, W. Winnie Li, *Zeta functions of complexes arising from $PGL(3)$* , Adv. Math. 25, 46-103 (2014)
- [Ma] Y. Manin, *Parabolic Points and Zeta-functions of Modular Curves*, Math. USSR-Izv.6, 19-64 (1972)
- [Mü] J. Müller, *Zu Bruhat-Tits-Gebäuden der $GL(3)$ über Funktionenkörpern*, Diplomarbeit, Universität Kassel, Kassel (2010)

Literaturverzeichnis

- [Sh] E. de Shalit, *Residues on buildings, and de-Rham cohomology of p -adic symmetric domains*, Duke Math J., 106, 123-192 (2000)
- [Te] J. Teitelbaum, *Modular Symbols for $\mathbb{F}_q(T)$* , Duke Math. J., 68, 271-295 (1992)
- [Tr] M. Traulsen, *Modulsymbole für Funktionenkörper*, Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik, Universität Essen (1997)