AD ELEMENTARIA MATHEMATICAE

Ein mathematischer Gruß
an alle Freunde und Kollegen

von

Bruno Bosbach

Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,
nicht das Dasein, sondern das Hinkommen,
was den größten Genuß gewährt.

Carl Friedrich Gauß

Das Fragen, das Suchen und Finden also, die Wege und Methoden sind es hiernach, die Mathematik dem Mathematiker zur Erlebniswelt werden lassen.
Dennoch: Sie kennen den bedeutenden Beitrag zum Eins+Eins des 7-jährigen Fritz? Welch ein Erlebnis! gewiss, aber auch: Welch ein Ergebnis!! Vor allem aber: Welch ein Ereignis!!!

Mehrere Arbeitstitel haben während der Entstehung dieses Artikels einander abgelöst. „So schön kann Mathe sein!" war einer unter ihnen.

Diese Note versteht sich als ein Additum zu den ELEMENTARIA http://d-nb.info/1075746485 . Sie wendet sich an alle Praktiker, die für die Mathematik in den Lehrämtern der Stufen LI, LII, LIII als Fachleiter an den Studienseminaren bzw. Zentren für schulpraktische Lehrerausbildung oder auch als Fachlehrer an den Schulen Verantwortung tragen.

Völlig unabhängig voneinander werden vorgestellt:

Ein LI-Problem zum Studium des Eins+Eins, kreiert von Herrn Wittmann als Weihnachtsaufgabe 2015, man googele mathe 2000 +, ein Schnupperkurs zum Releaux-Dreieck und anderen Gleichdicken unter Berücksichtigung klassischer technischer Aspekte mit Hinweisen auf spannende Internet-Adressen als LII/LIII-Problem – und schließlich ein Propellersatz in geometrischer, komplexer, goniometrischer und technischer Sicht unter Einschluss von Dyna-Geo Animationen mit Blick auf LIII-Leistungs-Kurse

Hochschuldozenten werden leicht erkennen, wie diese Stoffe eingebracht werden könnten in ein Fach$\times$Didaktik verschränktes, stufenüberfreifendes, themen-gemischtes Proseminar für Lehramts- oder Bachelor-Aspiranten.

Jedes der drei Themen lädt ein zu einer Erweiterung oder Vertiefung.

Jedes der drei Themen dürfte sich eignen für eine Präsentation im Rahmen einer Abitur-Prüfung, etwa in Hessen, insofern jedes von ihnen nach entsprechender Aufbereitung eine Chance bietet, auch fachfremde Beisitzer über eine weite Strecke mitzunehmen, vor allem aber: ihnen eine faire Chance für faire Fragen zu bieten. Vielleicht eignen sich auch Teile dieser Note als Kern einer Facharbeit, wie sie in NRW in der Jahrgangsstufe Q1 geschrieben wird.

Schließlich bietet sich jedes der drei Themen an für einen Kurzlehrgang im Rahmen einer Abschluss-Arbeit zum 2. (Lehramts-) Staatsexamen.

Es gibt wesentliche Aufgaben der Schule aus pädagogischer Sicht, doch des Mathematikers Aufgabe sei – zumindest unter anderem auch – die Schulung des formalen wie des praktischen Denkens am Kulturgut Mathematik.

Das ist nicht ohne die Vertreter der Fachdidaktik zu leisten, insbesondere nicht ohne die Fachleiter der Studienseminare. Ihnen kommt bei jedweder didaktischen Ausrichtung eine Schlüsselstellung zu, ihre Unterstützung gilt es zu gewinnen, auf dass sie ihrerseits neben Neuem auch Alt-Bewährtes zulassen.

Insbesondere dürfte eine solche Einstellung zur Prägung und Stärkung der lokalen Fach-Mannschaft(en) positiv beitragen, vorausgesetzt Kollegen begreifen sich als Kollegen.

Zur Ermutigung aller – wodurch oder durch wen auch immer – verunsicherten „Frontpädagog(inn)en"[1)] hier das Credo eines Unbelehrbaren:

Inklusion für alle – auch für Talente !

Sicherlich könnten klassen-übergreifende MAGs zur Umsetzung dieses Credos einiges beisteuern, auch studienseminar-gebundene Fortbildungen für interessierte Kollegen, aber bitte „Sehr geehrter Herr Staat", hier geht's nicht um Butter, hier geht's um Bildung, und die kostet Zeit, Kraft und Geld !!! Wer zu lange seine schwarze Null bekluckt, darf sich nicht wundern, wenn rosa-rote Bildungs-Küken schlüpfen.

Auch diesmal muss der Autor Herrn Dr. Stefan Heilmann von der Universität zu Köln danken für sein kollegiales Lektieren.

Und danken möchte der Autor nicht minder Frau StD' Alice Schopp vom Albertus Magnus Gymnasium Bensberg dafür, dass sie sich die

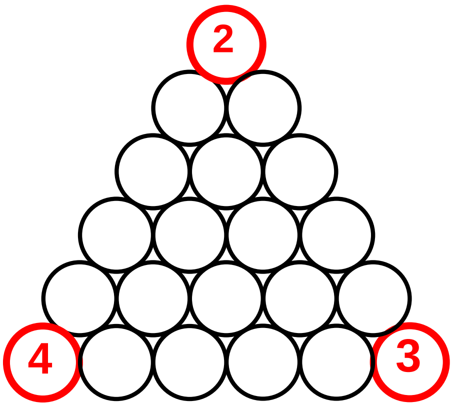
[1)] oder sollte man gar sagen *„Frontkämpfer/innen"*? Das wäre wohl ehrlicher, wenngleich Bildungs-Politiker das gewiss ganz anders sehen, gemäß dem Grundsatz: *„Unsere Lehrer schaffen das schon"*.

Zeit genommen und die Kraft aufgebracht hat, das hier zusammengestellte Konvolut – sie würde vielleicht sagen: den gesteckten Strauß – zu studieren und hilfreich zu kommentieren.

Kassel, im Februar 2016, B.B.

Mathe 2000 +

eine Aufgabe zum Eins+Eins
kreiert von Erich Chr. Wittmann
bearbeitet von Bruno Bosbach



Zur Grundaufgabe

PROBLEM. Von den 21 Zahlen 1,2,3,... werden die Zahlen 2,3,4 auf die Ecken des Mathe 2000+ Logos gelegt. Verteile die 18 anderen Zahlen so auf die restlichen Felder, dass die sechs Zahlen auf jeder Seite und die sechs inneren Zahlen jeweils die magische Summe 60 ergeben.

Zusatz: für welche Zahlen s können die 21 Zahlen so auf die 21 Felder verteilt werden, dass die Zahlen an den Seiten und die sechs inneren Zahlen jeweils die magische Summe s ergeben und zusätzlich die inneren Zahlen sechs *aufeinander folgende* Zahlen sind.

Ist es möglich, dass in diesem Falle auch die Zahlen in den Ecken *aufeinander folgende* Zahlen sind?

GRUNDIDEE zur GRUNDAUFGABE

Wir stocken 4,3,2 – mit $n \geq 5$ beginnend – auf nach dem Prinzip:

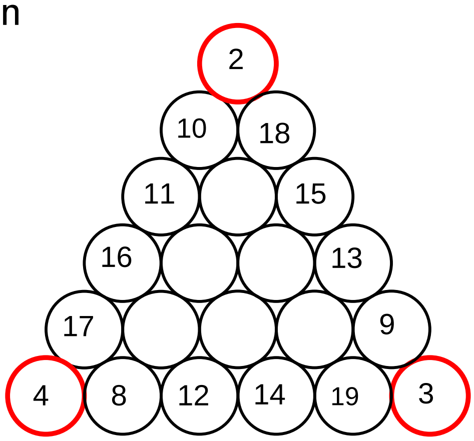
$$\begin{array}{lllll} 2, & n+2, & n+3, & n+8, & n+9 \\ 3, & n+1, & n+4, & n+7, & n+10 \\ 4, & n+0, & n+5, & n+6, & n+11 \end{array}$$

Dann liefert die erste Zeile den Summenwert $s_1 = 4n + 24$, die zweite Zeile den Summenwert $s_2 = 4n + 25$ und die dritte Zeile den Summenwert $s_3 = 4n + 26$. Das liefert für die Dreieck-Seiten die Werte $s_3 + 3 = 4n + 29$, $s_2 + 2 = 4n + 27$, $s_1 + 4 = 4n + 28$. Vertauschung von n+4 und n+5 bringt dann Gleichstand, die zusätzliche Wahl von n=8 die Lösung.

Eine Lösung der Grundaufgabe ist demzufolge

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{2}, 10, 11, 16, 17, [4] & = & 60 \\ \mathbf{3}, 9, 13, 15, 18, [2] & = & 60 \\ \mathbf{4}, 8, 12, 14, 19, [3] & = & 60 \\ 1, 5, 6, 7, 20, 21 & = & 60 \end{array}$$

also graphisch gesehen



Eine Lösung der Grundaufgabe

Andere Lösungen lassen sich durch Zahlentausch leicht ermitteln, man vertausche etwa 9,13 mit 8,14.

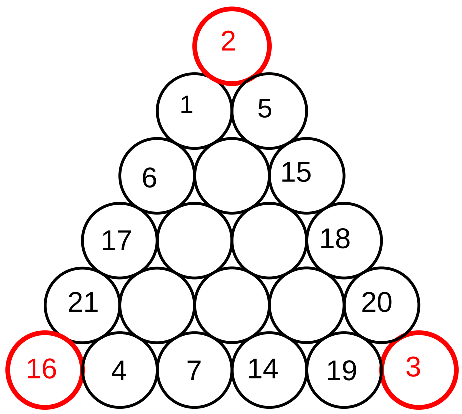
Zur Erweiterung bzw. Vertiefung. Wir beachten, dass als Summe von 6 aufeinander folgenden Zahlen sich zunächst 1+2+3+4+5+6=21 ergibt und folglich mit steigender Anfangszahl nacheinander die weiteren Summenzahlen 27,33,39,45,51,57,63,69,75,81,87,93,99,105,111 ergeben. Die im 2. Teil der Aufgabe gestellten Forderungen lassen exakt mit s=63 oder s=69 erfüllen.

DENN:

<u>Für die Zahl s=63</u> erhalten wir z.B. die Lösung:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{16}, 4, 7, 14, 19, [3] & = & 63 \\ \mathbf{3}, 5, 15, 18, 20, [2] & = & 63 \\ \mathbf{2}, 1, 6, 17, 21, [16] & = & 63 \\ 8, 9, 10, 11, 12, 13 & = & 63 \end{array}$$

also graphisch gesehen



Eine Vertiefung modulo s=63

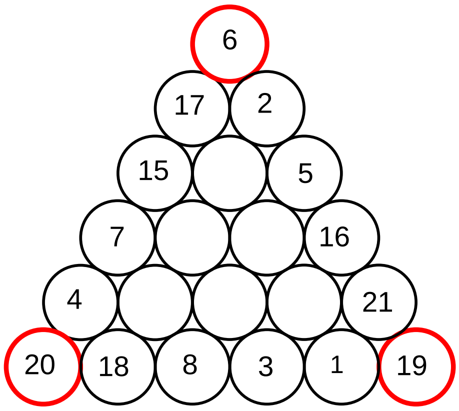
und weitere Lösungen durch Zahlentausch: man vertausche etwa 18,5 mit 17,6.

231-63=168 würde für den Fall, dass die Ecken mit drei aufeinander folgenden Zahlen besetzt wären, bedeuten, dass 168 zerlegt wäre in 57+56+55, die Eckzahlen also gleich 6,7,8 wären, 8 ist aber vergeben.

Für die Zahl s=69 erhalten wir z.B. die Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbf{19}, 1, 3, 8, 18, [20] &= 69 \\ \mathbf{20}, 4, 7, 15, 17, [6] &= 69 \\ \mathbf{6}, 2, 5, 16, 21, [19] &= 69 \\ 9, 10, 11, 12, 13, 14 &= 69 \end{aligned}$$

also graphisch gesehen



Eine Vertiefung modulo s=69

und weitere Lösungen durch Zahlentausch: man vertausche etwa 4,17 mit 16,5.

231-69=162 würde für den Fall, dass die Ecken mit drei aufeinander folgenden Zahlen besetzt wären, bedeuten, dass 162 zerlegt wäre in 55+54+53, die Eckzahlen also gleich 14,15,16 wären, 14 ist aber vergeben.

Weitere Lösungen gibt es nicht.

Denn ergäbe sich im Zentrum eine Summe $\leq$ 57, so wäre eine Zahl $\geq$ 174 auf drei 5-er-Summen zu verteilen, von denen mindestens eine schon die Zahl 57 überträfe.

Und ergäbe sich im Zentrum eine Summe $\geq$ 75, so wäre eine Zahl $\leq$ 156 auf drei 5-er-Summen zu verteilen, von denen mindestens eine $\leq$

52 wäre, sich also nicht aufstocken ließe auf mindestens 75.

Weihnachten 2015

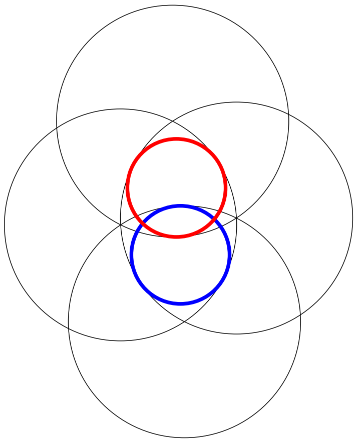
ZUSATZ: Alice Schopp startet „ihre Lösung" des Grundproblems ausgehend von einer Belegung der Innenfelder. Das regt an zu **EINS+EINS**-Ergänzungspielen für 6-Klässler, etwa: Der Lehrer wähle x $<$ 60, belege die Innenfelder mit einem

$$\{a_1, ..., a_6 \,|\, a_1 + a_2 + a_3 = x \;\&\; a_4 + a_5 + a_6 = 60 - x\}$$

und lasse diesen Ansatz testen mit Blick auf das Grundproblem.

Releaux-Dreiecke
und
andere Gleichdicke

von Bruno Bosbach



Begriffe

Unter einem Releaux-Dreieck versteht man ein gleichseitiges Bogendreieck, benannt nach dem deutschen Ingenieur Franz Releaux, der im 19. Jahrhundert wesentliche Beiträge zur Getriebelehre leistete.
Allergrößte Bedeutung fand das Releaux-Dreieck im 20. Jahrhundert in der Technik bei dem von Felix Wankel (1902-1988) entwickelten und nach ihm benannten Wankelmotor, bitte googeln, unbedingt googeln: Wankel Youtube.
Der Wankelmotor war bereits tot gesagt, doch inzwischen findet man im Internet, bitte erneut googeln:

„Wankelmotor: Der Kreiskolben rotiert wieder Der tot gesagte Wankelmotor feiert sein Comeback als leiser, leichter und vielseitig nutzbarer Antrieb. In Elektroautos soll er platzsparend die Reichweite verlängern."

Von Peter Münder

Ein Releaux-Dreieck lässt sich wie folgt gewinnen:
Gegeben sei das gleichseitige Dreieck ABC. Wir zeichnen die Kreise um A durch B (und C), um B durch C (und A) und um C durch A (und B). Dann ist der Durchschnitt der drei Kreise ein Releaux-Dreieck $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}(A, B, C)$ mit den Ecken A,B,C und der Peripherie $\mathfrak{p} = \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA}$.
Insbesondere sehen wir sofort, dass eine Schieblehre, wie auch immer man sie an $\mathfrak{g}(A, B, C)$ anlegt, stets den gleichen Wert misst. Diesen Sachverhalt erfasst man auch mit dem Terminus Gleichdick, d.h. das Releaux-Dreieck ist ein Gleichdick.

Einige Übungen

VORWEG: Wir sagen der Kreis $\mathfrak{k}$ umhülle das Releaux-Dreieck $\mathfrak{d}$, wenn alle drei Ecken von $\mathfrak{d}$ auf der Peripherie von $\mathfrak{k}$ liegen.
Wir sagen das Releaux-Dreieck $\mathfrak{d}$ umhülle den Kreis $\mathfrak{k}$, wenn der Kreis $\mathfrak{k}$ im Inneren von $\mathfrak{d}$ liegt und alle drei Bogenseiten von $\mathfrak{d}$ berührt.
Gegeben sei ein (punkt-symmetrisches) Tripel $\mathfrak{T}$ von drei einander paarweise berührenden Kreisen vom Radius r, vgl. Abbildung 1.
Dann sagen wir, das Releaux-Dreieck $\mathfrak{d}$ umhülle das Tripel $\mathfrak{T}$, wenn jeder der Kreise im Inneren von $\mathfrak{d}$ liegt und mindestens einen Bogen der Peripherie $\mathfrak{p}(\mathfrak{d})$ berührt.

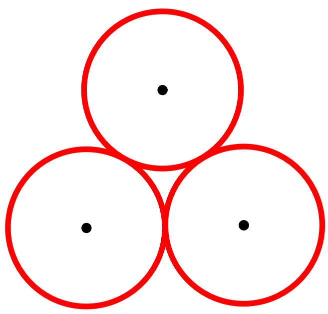


Abbildung 1: Ein punkt-symmetrisches Kreis-Tripel

0.0.1 AUFGABE. Gegeben sei ein Releaux-Dreieck $\mathfrak{d}$ der Dicke d. Man bestimme:

(a) den Umfang von $\mathfrak{d}$,
(b) den Inhalt von $\mathfrak{d}$, und
(c) den Schwerpunkt von $\mathfrak{d}$,

0.0.2 AUFGABE. Gegeben sei ein Kreis $\mathfrak{k}$. Man konstruiere

(a) ein Releaux-Dreieck, das von $\mathfrak{k}$ umhüllt wird.
(b) Man konstruiere ein $\mathfrak{k}$ umhüllendes Releaux-Dreieck.

0.0.3 AUFGABE. Offenbar gibt es i.w. zwei Versionen umhüllender Releaux-Dreiecke, vgl. die Abbildungen 2 und 3.

(a) Man konstruiere elementar-geometrisch das umhüllende Releaux-Dreieck gemäß Konstellation I.
(b) Man bestimme algebraisch das Verhältnis der (gemeinsamen) Durchmesser der Kreise zu dem Durchmesser des Releaux-Dreiecks.

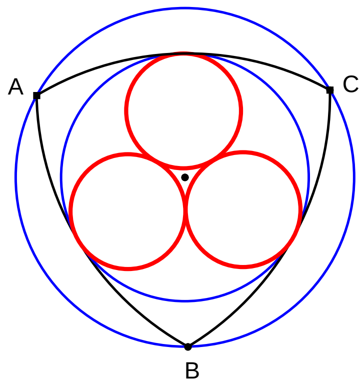


Abbildung 2: KONSTELLATION I

Lösungen

Zu (a). Wir gehen aus von einem Kreis $\mathfrak{k}$ und konstruieren zu $\mathfrak{k}$ das i.w. eindeutig bestimmte einbeschriebene Releaux-Dreieck $\mathfrak{d}$. Hiernach

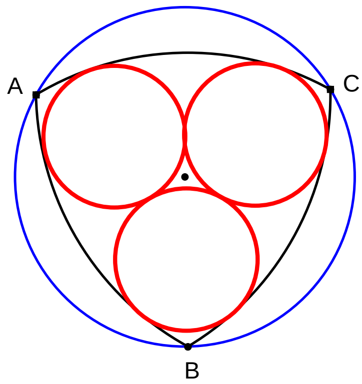


Abbildung 3: KONSTELLATION II

konstruieren wir zu $\mathfrak{d}$ den eindeutig einbeschriebenen Kreis $\mathfrak{k}_1$. Endlich beschreiben wir dem Kreis $\mathfrak{k}_1$ ein Kreistripel der gewünschten Art ein. Nach entsprechender Drehung entsteht so eine Konfiguration der gewünschten Art.
Schließlich können wir diese Konfiguration derart schieben, drehen, strecken, dass das Kreistripel in das Ausgangs-Kreistripel übergeht.

Zu (b). Wir betrachten Abb.4. Umhüllt das Releaux-Dreieck das Kreis-Tripel, so gilt $\overline{BG} = \overline{BH}$. Da wir lediglich am Verhältnis der Durchmesser interessiert sind, können wir ausgehen von $|BM| = 1$. Dann folgt

$$(1) \quad |AJ|^2 = |BJ| \cdot |JD| = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \rightsquigarrow |AJ| = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightsquigarrow |AB| = \sqrt{3}.$$

Nach den Gleichungen für das gleichseitige Dreieck gilt ferner

$$(2) \qquad \frac{s}{2} : h = 1 : \sqrt{3}.$$

Damit wäre dann im Falle der Berührung

$$(3) \qquad \sqrt{(|BM| + |ME|)^2 + |EF|^2} + |FG| = \sqrt{3}$$

bzw. mit

$$(4) \qquad |EF| := x, \ \text{also} \ |ME| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x$$

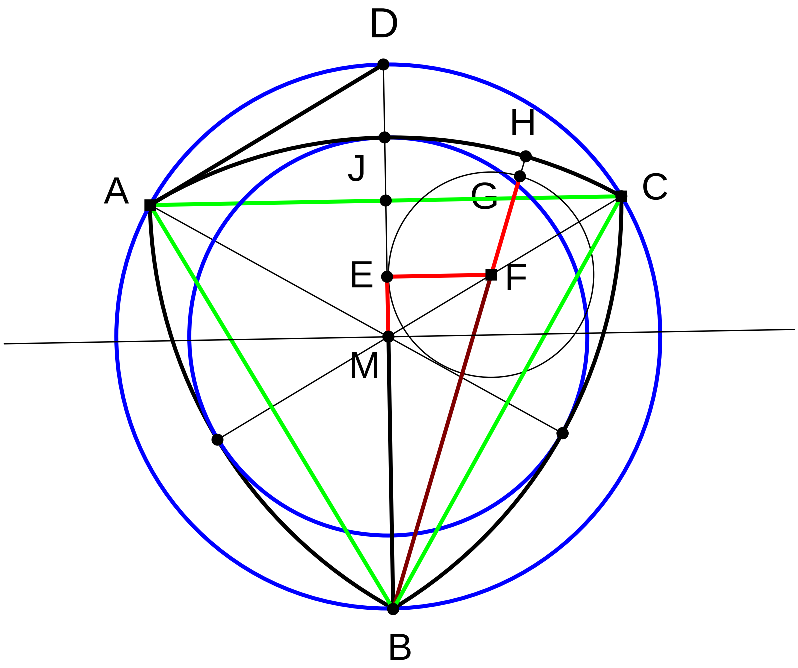


Abbildung 4: Zu KONSTELLATION II

die Äquivalenz

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot x\right)^2+x^2}+x \doteq \sqrt{3} \tag{5}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$1+\frac{1}{3}\cdot x^2+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot x+x^2 \doteq 3+x^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot x \tag{6}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}\cdot x^2+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot x \doteq 2-2\cdot\sqrt{3}\cdot x \tag{7}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x^2+2\sqrt{3}\cdot x \doteq 6-6\cdot\sqrt{3}\cdot x \tag{8}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x^2 + 8\sqrt{3} \cdot x - 6 \doteq 0. \tag{9}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = -4\sqrt{3} + \sqrt{16 \cdot 3 + 6} = 3\sqrt{6} - 4\sqrt{3}$$

erfüllt. Das liefert uns als das gesuchte Verhältnis

$$\frac{6 \cdot \sqrt{6} - 8 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{2} - 8\,.$$

HINWEIS. Mittels des Verhältnisses der Durchmesser sind wir natürlich insbesondere in der Lage zu einem vorgegebenem Kreis-Tripel der betrachteten Art das umhüllende 3-seitige Gleichdick zu konstruieren und umgekehrt zu einem vorgegebenem Gleichdick das einbeschriebene Kreistripel der betrachteten Art.
Und natürlich bieten sich weitere Vergleiche an.

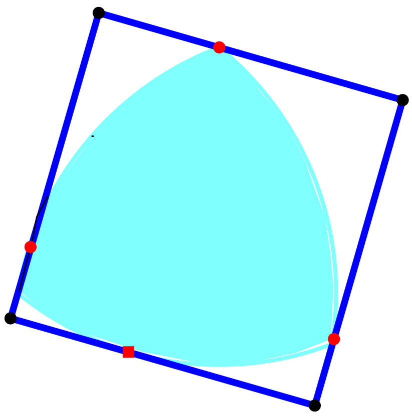


Abbildung 5: Zum Quadratbohrer

Schließlich: In der Apparate-Sammlung der früheren Ingenieurschule Kassel war ein funktionierender „Quadrat-Bohrer zu besichtigen, der auf dem Sachverhalt beruhte, dass jedes Quadrat bis auf seine Ecken von einem rotierenden Releaux-Dreieck „überstrichen" wird, vgl. Abbildung 5.
Die Idee: Man betrachte die beiden parallelen Seitenpaare als Schieblehren-Greifer.

Der erste Quadratbohrer wurde von Harry James Watt, einem englischer Ingenieur erfunden und im Jahr 1914 vorgestellt. Seit 1916 wird dieser Bohrer von der Watts Brother Werkzeugfabrik in Wilmerding in Pennsylvania/USA unter den Patentnummern 1241175, 1241176 und 12411177 produziert und vertrieben. Der Watt'sche Bohrer wird zunächst mit einer quadratischen Führungsplatte auf die zu bearbeitende Metalloberfläche gelegt, um diese anschließend anzubohren. Da es keinen Fixpunkt des Bohrers gibt, während sich der Bohrer durch das Metall „frisst", ist es notwendig, eine exzentrische Lagerung für den Bohrer zu konstruieren.
Quadratlochbohrer und Quadratlochstemmer sind auch heute noch hoch aktuell, bitte googeln, googeln, googeln.

0.0.4 AUFGABE. Man zeige, dass Räder mit releaux-dreieckigen Felgen allenfalls einen holprigen Schüttel-Lauf gewähren können.

Jedoch ist es natürlich möglich, ein Brett auf der konstanten Höhe d über zwei Stämme von releaux-dreieckigem Querschnitt der Dicke d zumindest theoretisch erschütterungsfrei zu rollen. Dies ist eine schon im Altertum praktizierte Technik: anders als Räder an Achsen halten entsprechende Rollen je nach Material und Bauart höchste Belastungen aus, wichtig etwa beim Umsetzen eines Gebäudes oder für den Transport von Findlingen. Man schiebt eine Plattform „über einige Rollen bis hin zu einer vorgelagerten weiteren Rolle usw. und transportiert die frei werdende Rolle „in Vorlage".
Als eine LIII-Aufgabe formulieren wir:

0.0.5 AUFGABE. (a) Wie groß ist in Abbildung 6 der Abstand des Eckpunktes A vom Schwerpunkt S.

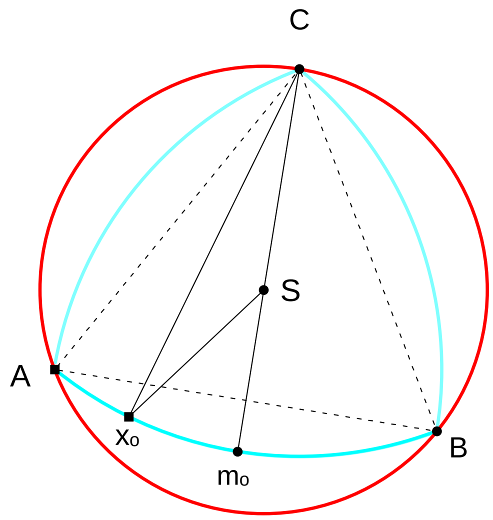


Abbildung 6: Releaux-Dreieck und Kreis

(b) Wie groß ist in Abbildung 6 der Abstand des Schwerpunktes S von dem Randpunkt x_0:
(c) Man bestätige den Abstand $|AS|$ mittels der Formel für $|x_0\,S|$.

In memoriam Rademacher/Toeplitz

Schon in den Elementaria wurde auf Rademacher-Toeplitz als einem Klassiker ausgewählter Kapitel elementarer Mathematik hingewiesen. Dort findet sich auch ein faszinierender 13-Seiten-Abschnitt über Gleichdicke. Noch heute ist ihr Buch antiquarisch, aber auch als Neuauflage in englischer Sprache erhältlich.
Hier soll an diese beiden Autoren erinnert werden. Beide mussten bittere Erfahrungen in dunklen Zeiten hinnehmen, beide waren, jeder auf seine Weise, auch Brückenbauer zwischen Schule und Universität, googeln – bitte – unbedingt googeln !!!

Wir geben hier einen Miniausschnitt aus einem 13-Seiten-Beitrag zu Gleichdicken in „Zahlen und Figuren", geeignet für jedwede LII-Vertretungs-Stunde. Der nachfolgende Satz stammt wohl schon von Steiner, faszinierend, mit wie wenig man wieviel machen kann.

Wir betrachten die Abbildung 7 und behaupten: die Figur ADBEC ist ein Gleichdick. Um den Leser teilhaben zu lassen, geben wir lediglich

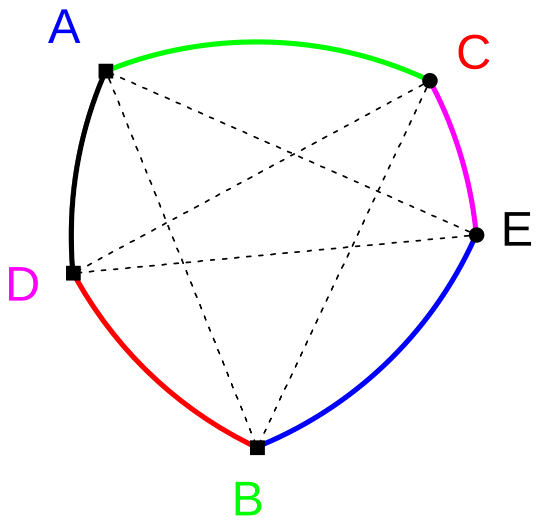


Abbildung 7: Zu Rademacher Toeplitz

als Beweis-Skizze die Buchstabenfolge: B-A-C-D Viel Spaß !

0.0.6 AUFGABE. Man konstruiere nach der soeben vorgestellten Methode ein 7-seitiges, allgemein ein n+1-seitiges Gleichdick.

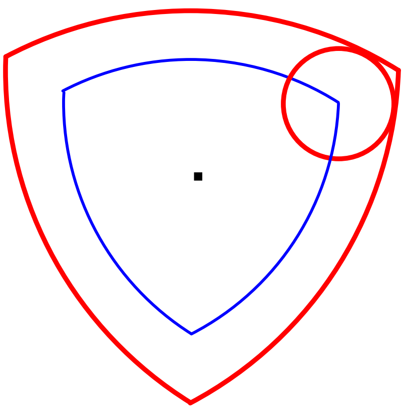


Abbildung 8: Zum Gleichdick ohne Ecken

Die bislang konstruierten Gleichdicke hatten alle Ecken, doch es gibt auch Gleichdicke ohne Ecken.
Ein Hinweis: „Umfahre" z.B. ein Releaux-Dreieck im Abstand r. Dann entsteht eine eckenfreies Releaux-Dreieck, siehe hierzu die Abbildung 8. Warum?

Und hier das Buch, reich an Perlen der Mathematik, eine potentielle

Vorlage für Proseminare, LK-Hausarbeiten und ABI-Präsentationen – zeitlos reizvoll:

H. Rademacher und O. Toeplitz: *Von Zahlen und Figuren,* Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1968

Als Internet-Alternativen, in denen sich viel Rademacher-Toeplitz wieder findet, seien – ohne Vollständigkeit anzustreben – erwähnt: die Beiträge „Gleichdick" bzw. „Wundersames, Mathematisches, Gleichdicke". Faszinierend das Design und die Kraft der laufenden Bilder, da haben es *black board and white chalk* nicht leicht, dennoch: vor allem Design waren *Kopf und Kreide.*

Kassel im Februar 2016

Ein Propeller-Satz

vorgestellt von

Bruno Bosbach

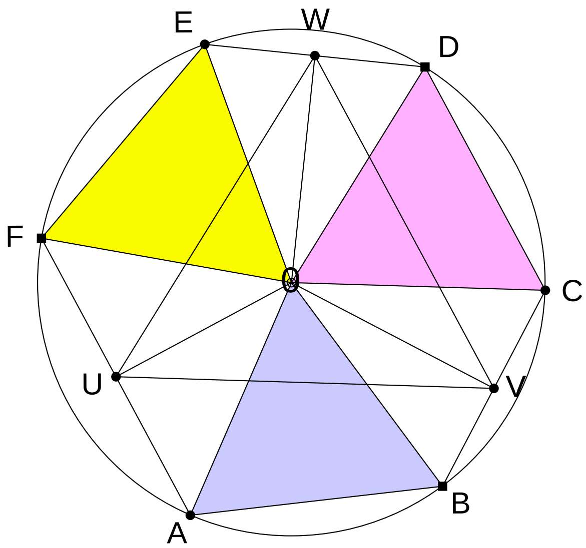


Abbildung 1: Zum Propellersatz - 1

Dieser Artikel wendet sich einerseits an Kollegen, die geneigt sind oder „gedrängt” werden, ein Bachelor- oder ein HR-Seminar anzubieten, und andererseits an L-III-Lehrer/innen und ihre Mathe-LK-Schüler/innen. Er könnte in NRW etwa Anregungen zu Jahresarbeiten geben oder auch in Hessen und einigen anderen Bundesländern anregen zu ABI-Präsentationen.

Aufgefrischt werden die Grundlagen der Kreis-Geometrie, Elemente der komplexen Ebene sowie das Ein×Eins der Goniometrie. Und ein wenig geworben wird für die Geometrie-Software Dyna-Geo. Angeregt wird darüber hinaus zu Praktischem.

Die Software Dyna-Geo, etwa 3.8, lässt sich auf Zeit gratis aus dem Netz herunter laden. Empfohlen sei die Nachbildung von Abbildung 2

und die Erstellung einer Animation mit dem Führungspunkt U. Das kostet natürlich ein wenig Einarbeitungszeit, doch dürfte sich der Aufwand lohnen.
Erprobt wurde dieser Weg erfolgreich von Dr. Stefan Heilmann.

„Unser" Propellersatz. Sei $\mathfrak{k}$ ein Kreis mit Mittelpunkt O und seien $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E}, \mathsf{F}$ Punkte auf diesem Kreis derart, dass die Dreiecke AOB, COD, EOF jeweils gleichseitig sind und einander nicht überlappen[1)], also die Winkel BOC, DOE, FOA einander zu zwei Rechten ergänzen. Dann spannen die Mittelpunkte U, V, W der Sehnen $\overline{\mathsf{AF}}$, $\overline{\mathsf{ED}}$, $\overline{\mathsf{CB}}$ ein gleichseitiges Dreieck auf.

Unsere allgemeine Beweis-Strategie wird sein, zu zeigen, dass o.B.d.A. $|\mathsf{WU}| = |\mathsf{WV}|$ erfüllt ist. Dann ergibt sich die behauptete Gleich-Seitigkeit aus der bewiesenen Gleich-Schenkligkeit, da wir etwa die Rollen von U und W vertauschen können.

1. Ein elementar-geometrischer Beweis

Wir operieren zunächst euklidisch:
Wir betrachten die Abbildung 2 unter der Annahme, dass die Dreiecke ABO, $\mathsf{A}_1\mathsf{B}_1\mathsf{O}$, CDO, EFO gleichseitig sind und W der Mittelpunkt zu $\overline{\mathsf{DE}}$ ist. Die Kreise um O durch A, um M_1 durch O, um M_2 durch O seien resp. bezeichnet mit $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$. Nach den Sätzen der Kreisgeometrie sind OU bzw. OV die Mittel-Senkrechten zu $\overline{\mathsf{FA}}$ bzw. $\overline{\mathsf{CB}}$, also U, V die Mittelpunkte zu $\overline{\mathsf{FA}}$ bzw. $\overline{\mathsf{CB}}$ und damit ΔUVW das zu A,B,C,D,E,F gehörende Dreieck unserer Betrachtung.
Es bleibt also o.B.d.A. zu zeigen: $\overline{\mathbf{WU}} \cong \overline{\mathbf{WV}}$.
Hierzu drehen wir das rote Dreieck $\mathsf{A}_1\mathsf{B}_1\mathsf{O}$ um O, so dass auf dem Kreis $\mathfrak{k}$ die Punkte A_1 nach A und B_1 nach B laufen. Dann gilt nach Voraus-

[1)]diese Einschränkung treffen wir aus methodischen Gründen

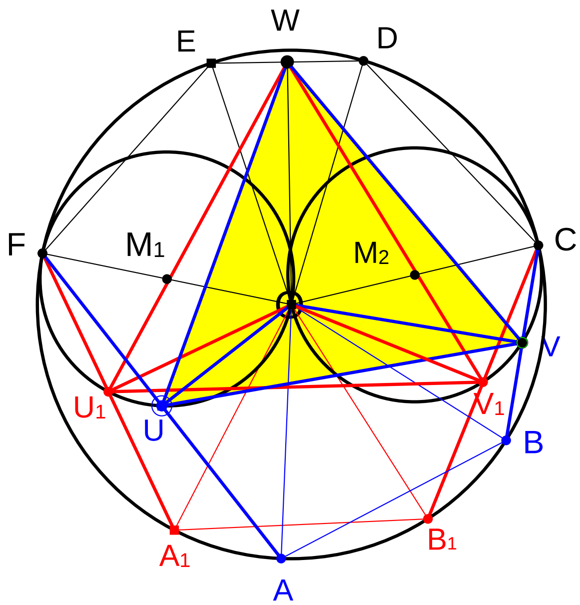


Abbildung 2: Zum Propellersatz - 1

setzung $\angle A_1FA \cong \angle B_1CB$ (sie sind Umfangs-Winkel über kongruenten Bögen von $\mathfrak{k}$), also auch $\angle U_1FU \cong \angle V_1CV$, also auch $\widehat{U_1U} \cong \widehat{V_1V}$ (sie sind kongruente Bögen auf den kongruenten Kreisen $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ und damit aus Gründen der Symmetrie (bzw. nach SWS) auch $\overline{\mathbf{WU}} \cong \overline{\mathbf{WV}}$. $\square$

2. Eine gelenkmechanischer „Aufweis”

Der Vorzug der hier vorgestellten geometrischen Lösung liegt darin, dass sie implizit einen Gelenkmechanismus ins Spiel bringt. Denn denken wir uns „das Ganze” als ein System der fixen Kreis-Schienen $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$, der Fix-Punkte U_1, V_1, D, W, E, F, O der Fix-Stangen $\overline{OA_1}, \overline{OB_1}$, $\overline{A_1B_1}$ sowie der in W fixierten Stangen (Strahlen) $\overrightarrow{WU}, \overrightarrow{WV}$, mit schienen-gebundenen Bahn-Punkten U,A,B,V, so legt jede Bewegung eines der halb-freien (Bahn-) Punkte die Bewegung der übrigen Bahn-Punkte eindeutig fest.

Das zeigt sich auch sehr schön bei der Betrachtung einer entsprechenden Dyna-Geo Animation. Die Graphik der Abbildung 2 ist abgestellt auf den Führungs-Punkt (blau) U'. Ein solcher DYNA-GEO-Entwurf sollte jedem/r Grundkurs-Teilnehmer/in zuzumuten sein.

Ein großer Gewinn dieser Betrachtung ist, dass die Animation zu Abbildung 2 optisch suggeriert: durchläuft U den Kreis $\mathfrak{k}_1$, so sind die korrespondierenden Dreiecke UVW auch im allgemeinen Fall stets gleichseitig - was auch zutrifft. Dies tritt besonders stark hervor, wenn man das Dreieck UVW farblich „vollständig" füllt. Damit bietet „unser Problem" insbesondere Technik-Freaks eine spannende Herausforderung – wie der Autor meint – nach dem Prinzip:

PROVING BY FITTING ... DO'N ES EN DING!

3. Ein komplexer Beweis

In diesem Abschnitt stellen wir einen Beweis in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ vor mit dem Einheitskreis als zugrunde gelegten Kreis und $\alpha := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$.
Wir setzen das Rechnen in $\mathbf{C}$ als bekannt voraus und halten fest:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad & \alpha \cdot \overline{\alpha} &= 1 \\
&(2) \qquad & \alpha + \overline{\alpha} &= 1 \\
&(3) \qquad & \alpha^3 &= -1 \\
&(4) \qquad & \alpha^2 &= -\overline{\alpha}
\end{aligned}$$

Hiernach betrachten wir die Abbildung 3. Hier gilt

$$z_1 = z\alpha, \quad z_2 = z\alpha s, \quad z_3 = z\alpha^2 s, \quad z_4 = \overline{z} \cdot \overline{\alpha}, \quad z_5 = \overline{z}.$$

Wir sind am Ziel, sobald wir $\overline{\mathsf{UW}} \cong \overline{\mathsf{VW}}$ bewiesen haben. Hierzu bezeichnen wir die zu den Ecken U,V,W gehörenden komplexen Zahlen

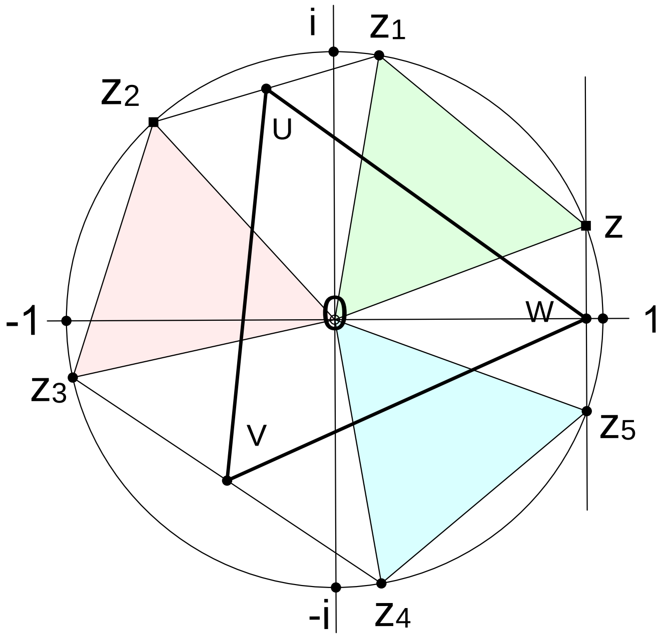


Abbildung 3: Zum Propellersatz - 1

mit u, v, w. Dann ist zu zeigen:

(5) $|u-w|^2 = (u-w)\cdot(\overline{u-w}) = (v-w)\cdot(\overline{v-w}) = |v-w|^2,$

also

(6) $$\frac{|z\alpha s + (z\alpha - z - \overline{z})|}{2} = \frac{|z\alpha^2 s + (\overline{z}\,\overline{\alpha} - z - \overline{z})|}{2}$$

bzw. hiermit gleichbedeutend

$$\begin{aligned} &(z\alpha s \; + \; (z\alpha - z - \overline{z})) \;\cdot (\overline{z}\,\overline{\alpha}\,\overline{s} \;\; + (\overline{z}\,\overline{\alpha} - \overline{z} - z)) \\ = \;\; &(z\alpha^2 s + (\overline{z}\,\overline{\alpha} - z - \overline{z})) \cdot (\overline{z}\,\overline{\alpha}^2\,\overline{s} + (z\,\alpha - \overline{z} - z)). \end{aligned}$$

Wir beachten nun, dass nach Klammer-Auflösung in den Faktoren alle Summanden auf dem Einheitskreis liegen, also gleich dem Inversen ihres Konjugierten sind, d. h. $c \cdot \overline{c} = 1$ erfüllen. Dann stellt sich die gewünschte Gleichheit geradeaus ein.

DENN: Zunächst sehen wir, dass es reicht zu zeigen:

$$\begin{aligned} &z\alpha s \cdot (\overline{z}\,\overline{\alpha} - \overline{z} - z) \; + \overline{z}\,\overline{\alpha}\,\overline{s} \cdot (z\alpha - z - \overline{z}) \\ = \;\; &z\alpha^2 s \cdot (z\alpha - z - \overline{z}) + \overline{z}\,\overline{\alpha}^2\,\overline{s} \cdot (\overline{z}\,\overline{\alpha} - z - \overline{z}), \end{aligned}$$

also, dass wir am Ziel sind, wenn wir zeigen können:

$$\begin{aligned} & s - \alpha s - z^2 \alpha s + \overline{s} - \overline{\alpha}\,\overline{s} - \overline{z}^2 \overline{\alpha}\,\overline{s} \\ = \; & -z^2 s - z^2 \alpha^2 s - \alpha^2 s - \overline{z}^2 \overline{s} - \overline{\alpha}^2 \overline{s} - \overline{z}^2 \overline{\alpha}^2 \overline{s} \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} & s - \alpha s - z^2 \alpha s + z^2 s + z^2 \alpha^2 s + \alpha^2 s \\ = \; & -\overline{z}^2 \overline{s} - \overline{\alpha}^2 \overline{s} - \overline{z}^2 \overline{\alpha}^2 \overline{s} - \overline{s} + \overline{\alpha}\,\overline{s} + \overline{z}^2 \overline{\alpha}\,\overline{s}. \end{aligned}$$

Hier liefern aber nach den Formeln (1) bis (4) beide Seiten den Wert 0, was der Leser leicht bestätigt. □

4. Ein goniometrischer Beweis

Hiernach beweisen wie die Behauptung alternativ mittels elementarer Goniometrie. Hierzu betrachten wir die Abbildung 4.

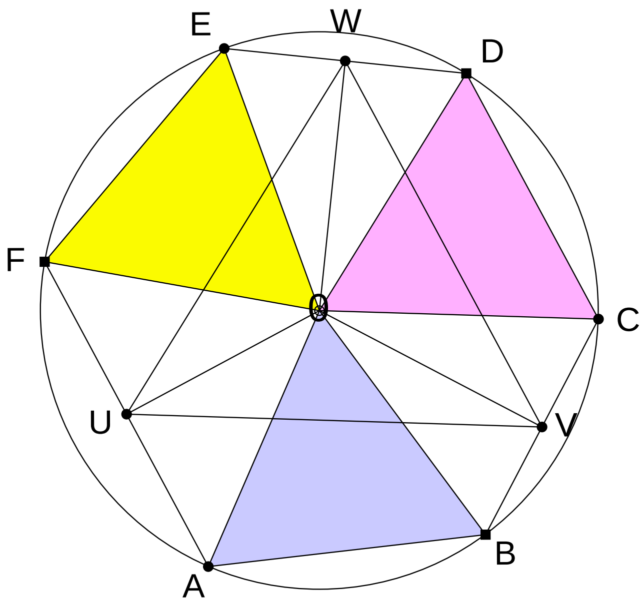


Abbildung 4: Zum Propellersatz - 2

Wir gehen aus von einem beliebigen Winkel $\underline{\omega}$ an der Spitze W und wählen zunächst die Mittelpunktswinkel <u>AOF</u> und <u>BOC</u> vom Maß $\underline{2\alpha}$ sowie den Mittelpunktswinkel <u>DOE</u> vom Maß 2γ. Dann haben wir $\gamma = 90 - 2\alpha$.

Zur Erinnerung: wir wollen zeigen |WU| = |WV|.
Nun gilt aber im Falle |OA| = 1 bei einer Zunahme von $\angle$FOA um 2ε :

(7) |OU| $= \cos(\alpha+\varepsilon)$ und |OV| $= \cos(\alpha-\varepsilon)$ und |OW| $= \cos(\gamma)$.

Wir sind also nach dem Kosinussatz am Ziel, wenn wir zeigen können:

$$\begin{aligned} & |\mathsf{WU}|^2 \\ = \ & \cos^2(\alpha+\varepsilon)+\cos^2\gamma-2(\cos(\alpha+\varepsilon)\cos\gamma)\cos(\alpha+60+\gamma+\varepsilon) \\ = \ & \cos^2(\alpha-\varepsilon)+\cos^2\gamma-2(\cos(\alpha-\varepsilon)\cos\gamma)\cos(\alpha+60+\gamma-\varepsilon) \\ = \ & |\mathsf{WV}|^2 \end{aligned}$$

Hierzu setzen wir

(8) $$\alpha+60+\gamma=\delta\,.$$

Damit ist dann zu beweisen – wir streichen schon hier auf beiden Seiten den Summanden $\cos^2\gamma$

(9) $$\begin{aligned} & \cos^2(\alpha+\varepsilon)\ -2\cdot\underline{\cos(\alpha+\varepsilon)\cdot\cos\gamma\cdot\cos(\delta+\varepsilon)} \\ = \ & \cos^2(\alpha-\varepsilon)\ -2\cdot\underline{\cos(\alpha-\varepsilon)\cdot\cos\gamma\cdot\cos(\delta-\varepsilon).} \end{aligned}$$

Es gilt aber

(10) $$\cos(\alpha+\varepsilon)=\cos\alpha\cos\varepsilon-\sin\alpha\sin\varepsilon$$

(11) und $$\cos(\alpha-\varepsilon)=\cos\alpha\cos\varepsilon+\sin\alpha\sin\varepsilon$$

also ist $\cos^2(\alpha+\varepsilon)$ gleich

$$\cos\alpha\cos\varepsilon\cos\alpha\cos\varepsilon-2\cdot\underline{\underline{\cos\alpha\cos\varepsilon\sin\alpha\sin\varepsilon}}+\sin\alpha\sin\varepsilon\sin\alpha\sin\varepsilon$$

und $\cos^2(\alpha-\varepsilon)$ gleich

$$\cos\alpha\cos\varepsilon\cos\alpha\cos\varepsilon+2\cdot\underline{\underline{\cos\alpha\cos\varepsilon\sin\alpha\sin\varepsilon}}+\sin\alpha\sin\varepsilon\sin\alpha\sin\varepsilon$$

so dass zu zeigen bleibt, beachte die Gleichungen (9),(**??**)

(12) $$-2\cdot\cos\alpha\cos\varepsilon\sin\alpha\sin\varepsilon-2\cdot\cos(\alpha+\varepsilon)\cdot\cos\gamma\cdot\cos(\delta+\varepsilon)$$

$$= +2 \cdot \cos\alpha \cos\varepsilon \sin\alpha \sin\varepsilon - 2\ \cdot \cos(\alpha - \varepsilon) \cdot \cos\gamma \cdot \cos(\delta - \varepsilon)$$

Wegen

$$2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = \sin(2\alpha) = \cos(90 - 2\alpha) = \cos\gamma$$

geht die Bedingung (12) nach beidseitiger Division durch $\cos\gamma$ aber über in

$$\begin{aligned} & -\cos\varepsilon\sin\varepsilon - 2 \cdot \cos(\alpha + \varepsilon) \cdot \cos(\delta + \varepsilon) \\ = \; & +\cos\varepsilon\sin\varepsilon - 2 \cdot \cos(\alpha - \varepsilon) \cdot \cos(\delta - \varepsilon). \end{aligned}$$

Hiernach fahren wir analog fort und überführen unser Problem in die Frage: Gilt

$$\begin{aligned} & -\cos\varepsilon\sin\varepsilon - 2(\cos\alpha\cos\varepsilon - \sin\alpha\sin\varepsilon)(\cos\delta\cos\varepsilon - \sin\delta\sin\varepsilon) \\ \stackrel{?}{=} \; & +\cos\varepsilon\sin\varepsilon - 2(\cos\alpha\cos\varepsilon + \sin\alpha\sin\varepsilon)(\cos\delta\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon), \end{aligned}$$

also nach <u>elementarer Umformung</u> zu der Frage: Gilt

$$\begin{aligned} & -\cos\varepsilon\sin\varepsilon + 2 \cdot (\cos\alpha\cos\varepsilon\sin\delta\sin\varepsilon + \sin\alpha\sin\varepsilon\cos\delta\cos\varepsilon) \\ \stackrel{?}{=} \; & +\cos\varepsilon\sin\varepsilon - 2 \cdot (\cos\alpha\cos\varepsilon\sin\delta\sin\varepsilon + \sin\alpha\sin\varepsilon\cos\delta\cos\varepsilon) \end{aligned}$$

was nach beidseitiger Division durch $\cos\varepsilon\sin\varepsilon$ zu der Frage führt:

$$\begin{aligned} & -1 + 2 \cdot (\cos\alpha\sin\delta + \sin\alpha\cos\delta) \\ \stackrel{?}{=} \; & +1 - 2 \cdot (\cos\alpha\sin\delta + \sin\alpha\cos\delta). \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (\cos\alpha\sin\delta + \sin\alpha\cos\delta) &= 2\sin(\alpha + \delta) \\ &= 2 \cdot \sin(90 + 60) \\ &= 2 \cdot \cos 60 \\ &= 2 \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Damit sind wir am Ziel. □

Silvester 2015