Harmonische Funktionen auf dem Bruhat-Tits-Gebäude der PGL_3 über Funktionenkörpern

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

vorgelegt im Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
der Universität Kassel

von Anna Christina Böttcher

Kassel, November 2015

Erstgutachter
Prof. Dr. Hans-Georg Rück
Universität Kassel

Zweitgutachter
Dr. habil. Sebastian Petersen
Universität Kassel

Tag der Disputation
09. März 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit harmonischen Koketten auf dem Bruhat-Tits-Gebäude zur GL_3 über dem rationalen Funktionenkörper $\mathbb{F}_q(T)$ mit dem Ziel, Ergebnisse aus der klassischen Theorie der Modulformen auf diese Funktionen zu übertragen.

Klassische Modulformen und Übertragung auf den Funktionenkörperfall
Die klassische Theorie der Modulformen wurde im 19. Jahrhundert begründet und im 20. Jahrhundert weiterentwickelt. Insbesondere lieferte sie einen wesentlichen Beitrag zum Beweis des letzten Satzes von Fermat, dessen Ausgangspunkt der von Frey ([Fre]) vermutete und von Ribet ([Ri]) bewiesene Zusammenhang zur inzwischen ebenfalls bewiesenen ([BCDT]) Taniyama-Shimura-Weil-Vermutung war.

Die folgende Einführung in die klassische Theorie der Modulformen ist an [KK], [Bu] und insbesondere im Abschnitt zu Hecke-Operatoren und Petersson-Skalarprodukt an [Kn] angelehnt. Der Übergang zur adelischen Formulierung ist inhaltlich aus [Ku] entnommen.

Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene. Die Gruppe $GL_2(\mathbb{R})^+$ der (2×2)-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ und positiver Determinante operiert transitiv auf $\mathbb{H}$ mittels Möbiustransformationen, d. h. für $\tau \in \mathbb{C}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})^+$ ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Zu $N \in \mathbb{N}$ definiert man die Hauptkongruenzgruppe

$$\Gamma(N) := \left\{ M \in SL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N \right\}$$

und nennt jede Untergruppe $\Lambda \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$, die eine Hauptkongruenzgruppe enthält, Kongruenzuntergruppe. Insbesondere ist also auch $SL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma(1)$ eine Kongruenzuntergruppe. Eine Funktion $f \colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt Modulform vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ zur Kongruenzuntergruppe $\Lambda \subseteq \Gamma(N)$, falls sie holomorph auf $\mathbb{H}$ ist, für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Lambda$ und alle $\tau \in \mathbb{H}$ der Bedingung

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau \right) = (c\tau + d)^k f(\tau) \tag{1}$$

genügt und holomorph in den Spitzen ist. Als Spitzen bezeichnet man hierbei die Äquivalenzklassen von $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ unter der mittels

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} i\infty := \begin{cases} i\infty, & \text{falls } c = 0, \\ \frac{a}{c}, & \text{falls } c \neq 0 \end{cases}$$

fortgesetzten Aktion von Λ und nennt f holomorph in den Spitzen, falls für jede Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ die Funktion $(c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ bei $i\infty$ holomorph ist. Dies ist gleichbedeutend dazu, daß es zu jedem solchen M eine Reihenentwicklung

$$(c\tau + d)^{-k} f(M\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(M)} e^{2\pi i n\tau/N}$$

gibt, die für jedes $\varepsilon > 0$ auf $\{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(\tau) > \varepsilon\}$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Ist zusätzlich $\alpha_0^{(M)} = 0$, so sagt man, f verschwinde in der Spitze $M(i\infty)$, und eine Modulform, die in allen Spitzen verschwindet, heißt Spitzenform.
Wenn die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in Λ liegt, erhält man aus Gleichung (1), daß $f(\tau) = (-1)^k f(\tau)$. In diesem Fall muß also jede Modulform von ungeradem Gewicht gleich 0 sein.

Auf dem Raum $S_k(\Lambda)$ der Spitzenformen vom Gewicht k zur Kongruenzuntergruppe Λ kann man sogenannte Hecke-Operatoren definieren. Dies soll im Folgenden am in der Literatur gut untersuchten Beispiel der Hecke-Untergruppe

$$\Lambda = \Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

erläutert werden. Für $n \in \mathbb{N}$ sei dazu

$$M(n, N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ \operatorname{ggT}(a, N) = 1,\ c \equiv 0 \bmod N,\ ad - bc = n \right\}$$

und $\left\{ \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \right\}_{i \in I}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen von Λ in $M(n, N)$, so daß also

$$M(n, N) = \dot{\bigcup_{i \in I}} \Lambda \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}.$$

Dann ist der Hecke-Operator $T_k(n)$ definiert durch

$$T_k(n) f(\tau) = n^{k-1} \sum_i f\left(\frac{a_i\tau + b_i}{c_i\tau + d_i}\right) (c_i\tau + d_i)^{-k}$$

für alle $f \in S_k(\Lambda)$ und $\tau \in \mathbb{H}$, und $T_k(n)f$ liegt ebenfalls in $S_k(\Lambda)$. Die Hecke-Operatoren erfüllen die Eigenschaften

i) $T_k(p^r)T_k(p) = T_k(p^{r+1}) + p^{k-1}T_k(p^{r-1})$ für alle primen p mit $p \nmid N$ und alle $r \in \mathbb{N}$,

ii) $T_k(p^r) = (T_k(p))^r$ für alle primen p mit $p \mid N$ und alle $r \in \mathbb{N}$,

iii) $T_k(m)T_k(n) = T_k(mn)$ für alle teilerfremden m und n.

Die Hecke-Operatoren sind somit kommutativ.

Sei R_N ein Fundamentalbereich für $\Gamma_0(N)$ in $\mathbb{H}$, dann ist durch

$$\langle f, h \rangle := \int_{R_N} f(x + iy)\overline{h(x + iy)} y^k \frac{dxdy}{y^2}$$

ein Skalarprodukt, genannt Petersson-Skalarprodukt, auf $S_k(\Lambda)$ gegeben, und es läßt sich zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(n,N) = 1$ die Hecke-Operatoren $T_k(n)$ bezüglich dieses Skalarproduktes selbstadjungiert sind. Da die Hecke-Operatoren kommutieren, zerlegt sich $S_k(\Lambda)$ in eine orthogonale Summe von simultanen Eigenformen für diese $T_k(n)$. In jedem Eigenraum gibt es eine Funktion $f(\tau) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j e^{2\pi i j\tau}$ mit $c_1 \neq 0$, die Eigenform für alle $T_k(n)$ ist. Man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß f normiert ist, d. h. daß $c_1 = 1$ gilt. Dann ist c_n gleich dem Eigenwert von f unter $T_k(n)$, die Fourierkoeffizienten von f genügen den Gleichungen

i) $c_{p^r} c_p = c_{p^{r+1}} + p^{k-1} c_{p^{r-1}}$ für alle primen p mit $p \nmid N$ und alle $r \in \mathbb{N}$,

ii) $c_{p^r} = (c_p)^r$ für alle primen p mit $p \mid N$ und alle $r \in \mathbb{N}$,

iii) $c_m c_n = c_{mn}$ für alle teilerfremden m und n,

und die zugehörige L-Funktion $L(s,f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ besitzt eine Eulerproduktentwicklung

$$L(s,f) = \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \mid N}} \frac{1}{1 - c_p p^{-s}} \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \nmid N}} \frac{1}{1 - c_p p^{-s} + p^{k-1-2s}},$$

die für $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$ konvergiert. Die so entstehenden L-Reihen sind unter anderem deswegen von Interesse, weil vermutet wird, daß sie identisch sind mit L-Reihen, die in anderen mathematischen Kontexten definiert sind; dies ist ein Teil des sogenannten Langlands-Programms. Beispielsweise besagt die bereits erwähnte und im Jahr 2001 bewiesene Vermutung von Taniyama-Shimura-Weil, daß zu jeder über $\mathbb{Q}$ definierten elliptischen Kurve eine Modulform existiert, so daß die L-Reihen der elliptischen Kurve und der Modulform übereinstimmen.

Setzt man $\Lambda = SL_2(\mathbb{Z})$ und $\Gamma_\infty := \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \Lambda$, so ist für gerades $k \geq 4$ und $n \in \mathbb{N}$ die sogenannte Poincaré-Reihe $P_{k,n}(\tau) = \sum\limits_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Lambda} (c\tau + d)^{-k} e^{2\pi i n M\tau}$ wohldefiniert, absolut gleichmäßig konvergent in jedem Vertikalstreifen in $\mathbb{H}$ und eine Spitzenform vom Gewicht k zur Kongruenzuntergruppe Λ. Für jede Spitzenform $f \in S_k(\Lambda)$ mit $f(\tau) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j e^{2\pi i j\tau}$ gilt $\frac{(4\pi n)^{k-1}}{(k-2)!} \langle f, P_{k,n} \rangle = \alpha_n$ ([KK]), woraus insbesondere folgt, daß $\{P_{k,n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Erzeugendensystem von $S_k(\Lambda)$ ist, denn liegt f im orthogonalen Komplement des Erzeugnisses der $P_{k,n}$, so folgt $\alpha_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher ist f selber 0. Auch für andere Kongruenzuntergruppen ist es möglich, auf diese Weise ein Erzeugendensystem zu konstruieren ([P1], [P2], [P3]).

Die Gruppe $GL_2(\mathbb{R})^+$ operiert transitiv auf $\mathbb{H}$, und der Stabilisator der imaginären Einheit i ist gleich $SO_2(\mathbb{R})\mathbb{R}^*$. Somit steht $\mathbb{H}$ vermöge

$$GL_2(\mathbb{R})^+/SO_2(\mathbb{R})\mathbb{R}^* \to \mathbb{H}, \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} SO_2(\mathbb{R})\mathbb{R}^* \mapsto \frac{ai+b}{ci+d}$$

in Bijektion zu $GL_2(\mathbb{R})^+/SO_2(\mathbb{R})\mathbb{R}^*$, weshalb man jedem $f \in S_k(\Lambda)$ mittels

$$\tilde{\phi}_f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := (ad-bc)^{k/2} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} i\right)$$

eine Funktion auf $\Lambda\backslash GL_2(\mathbb{R})^+/SO_2(\mathbb{R})\mathbb{R}^*$ zuordnen kann. Sei nun $\mathbb{A}$ der zu $\mathbb{Q}$ gehörige Adelring und $\mathbb{Q}_p$ die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich der Stelle p. Weiter sei $\mathbb{P}$ die Menge der nichtarchimedischen Stellen und $\mathbb{Z}_p$ der Ganzheitsring von $\mathbb{Q}_p$ für $p \in \mathbb{P}$. Zu Λ gibt es eine Gruppe $L \subseteq \prod\limits_{p\in\mathbb{P}} GL_2(\mathbb{Z}_p)$, so daß $\Lambda = GL_2(\mathbb{Q}) \cap GL_2(\mathbb{R})^+L$ ist, betrachtet als Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})^+$ mittels Projektion auf die archimedische Stelle. Aus dem starken Approximationssatz folgt, daß $GL_2(\mathbb{A}) = GL_2(\mathbb{Q})GL_2(\mathbb{R})^+L$ ist. Hiermit ist es möglich, eine Funktion ϕ_f auf $GL_2(\mathbb{A})$ zu definieren, indem man $g \in \mathbb{A}$ als $\gamma g_\infty l$ mit $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$, $g_\infty \in GL_2(\mathbb{R})^+$, $l \in L$ schreibt und $\phi_f(g) = \tilde{\phi}_f(g_\infty)(ci+d)^{-k}$ setzt. Dies ist wohldefiniert. Die Zuordnung $f \mapsto \phi_f$ liefert einen Isomorphismus zwischen $S_k(\Lambda)$ und einem Raum von Funktionen ϕ auf $GL_2(\mathbb{A})$, welche neben gewissen weiteren Eigenschaften, die die archimedische Stelle betreffen und mit dem Gewicht k verknüpft sind, insbesondere

$$\phi(\gamma g l a) = \phi(g) \text{ für alle } \gamma \in GL_2(\mathbb{Q}),\ g \in GL_2(\mathbb{A}),\ l \in L,\ a \in \mathbb{A}^*,$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \phi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right) dx = 0 \text{ für alle } g \in GL_2(\mathbb{A})$$

erfüllen. Die zweite Bedingung ist hierbei das adelische Äquivalent zum Verschwinden in den Spitzen. Die adelische Formulierung, die alle Stellen parallel betrachtet, erlaubt es, das Konzept der klassischen Modulformen zu generalisieren und auf andere Körper zu übertragen. Insbesondere ermöglicht sie durch die Abkehr von der Fokussierung auf die archimedische Stelle von $\mathbb{Q}$ eine Formulierung der Theorie für Funktionenkörper.

Sei beispielsweise $\mathbb{F}_q[T]$ der Polynomring über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ in der Variablen T, $K := \mathbb{F}_q(T) = \mathrm{Quot}(\mathbb{F}_q[T])$ der rationale Funktionenkörper, $N \in \mathbb{F}_q[T]$ ein Polynom und $\mathbb{A}_K$ der Adelring von K. Für eine Stelle $\mathfrak{p}$ von K sei $K_\mathfrak{p}$ die Vervollständigung von K bei $\mathfrak{p}$ mit Ganzheitsring $O_\mathfrak{p}$ und Ortsuniformisierender $\pi_\mathfrak{p}$, dabei sei ∞ die zu $\frac{1}{T}$ korrespondierende Stelle. Es sei weiter eine Untergruppe $L_0 := \prod\limits_{\mathfrak{p} \text{ Stelle von } K} L_{0,\mathfrak{p}}$ definiert durch $L_{0,\mathfrak{p}} := GL_2(O_\mathfrak{p})$, falls $\pi_\mathfrak{p} \nmid N$ und $\mathfrak{p} \neq \infty$, und $L_{0,\mathfrak{p}} := \left\{ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in GL_2(O_\mathfrak{p}) \,\middle|\, c \equiv 0 \bmod \pi_\mathfrak{p} \right\}$ für $\pi_\mathfrak{p} \mid N$ oder $\mathfrak{p} = \infty$, dann ist nach [We] eine Spitzenform $\phi\colon GL_2(\mathbb{A}_K) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften

i) $\phi(\gamma g l z) = \phi(g)$ für alle $\gamma \in GL_2(K)$, $g \in GL_2(\mathbb{A}_K)$, $l \in L_0$, $z \in \mathbb{A}^*$,

ii) $\displaystyle\int\limits_{K\backslash\mathbb{A}_K} \phi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right) dx = 0$ für alle $g \in GL_2(\mathbb{A}_K)$.

Man kann nun den umgekehrten Weg beschreiten und aus der adelischen eine lokale Formulierung ableiten, denn aus dem starken Approximationssatz erhält man in diesem Fall $GL_2(\mathbb{A}_K) = GL_2(K)GL_2(K_\infty)L_0$, und mit $\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{F}_q[T]) \,\middle|\, c \equiv 0 \bmod N \right\}$ und $\Gamma_\infty := L_{0,\infty}$ gilt $GL_2(K)\backslash GL_2(\mathbb{A}_K)/L_0\mathbb{A}_K^* \cong \Gamma_0(N)\backslash GL_2(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$, d. h. macht man die Adelisierung durch Projektion auf $GL_2(K_\infty)$ rückgängig, so erhält man unter $\Gamma_0(N)$ linksinvariante komplexwertige Funktionen auf $GL_2(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$, den gerichteten Kanten des Bruhat-Tits-Baumes $\mathcal{T}$ zur GL_2 über K_∞. Ein Spezialfall hiervon sind die in [Rü] betrachteten harmonischen Koketten. Hierbei handelt es sich um Funktionen $f\colon GL_2(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \to \mathbb{C}$, die für alle $X \in GL_2(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ den Harmonizitätsbedingungen

$$f\left(X\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\infty & 0 \end{pmatrix}\right) = -f(X) \tag{2}$$

und

$$\sum_{\beta \in GL_2(O_\infty)/\Gamma_\infty} f(X\beta) = 0 \tag{3}$$

genügen, linksinvariant unter $\Gamma_0(N)$ sind und modulo $\Gamma_0(N)$ endlichen Träger besitzen, was bedeutet, daß f auf fast allen Matrizen aus $\Gamma_0(N)\backslash GL_2(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ den Wert 0 annimmt. Gleichung (2) besagt, daß sich der Funktionswert beim Umdrehen einer Kante um den Faktor -1 ändert, und (3), daß die Summe der Funktionswerte über alle Kanten, die in einen Knoten hineinlaufen, 0 ergibt. Es läßt sich zeigen, daß diese Funktionen eindeutig durch ihre Werte auf

$$\mathcal{T}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(K_\infty) \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\, u \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty \right\}$$

bestimmt sind und mit einem gewissen additiven Charakter $\psi_\infty\colon K_\infty \to \mathbb{C}^*$ eine Fourierentwicklung

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q[T]} f^*(\pi_\infty^m, \lambda)\psi_\infty(\lambda u)$$

besitzen, bei der sich alle Fourierkoeffizienten auf solche der Gestalt $f^*(\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2}, \lambda)$ zurückführen lassen. Das Verschwinden des nullten Fourierkoeffizienten bei den klassischen Spitzenformen findet hier seine Entsprechung in $f^*(\pi_\infty^m, 0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Weiterhin lassen sich auf dem Raum dieser Funktionen Hecke-Operatoren und ein Skalarprodukt analog zum Petersson-Skalarprodukt definieren.

In der Arbeit [Rü] werden in Analogie zum klassischen Fall für $0 \neq \mu \in \mathbb{F}_q[T]$ Poincaré-Reihen P_μ auf $\mathcal{T}$ konstruiert, welche selber harmonische Koketten sind und für jede harmonische Kokette f die Gleichung $\langle f, P_\mu\rangle = \frac{4}{q-1} f^*(\pi_\infty^{\deg(\mu)+2}, \mu)$ erfüllen. Wie im klassischen Fall folgt, daß diese Poincaré-Reihen den gesamten Raum der harmonischen Koketten erzeugen, denn für eine Funktion g im orthogonalen Komplement des Erzeugnisses der P_μ folgt hier $g^*(\pi_\infty^{\deg(\mu)+2}, \mu) = 0$ für alle $\mu \neq 0$, und nach dem oben Erwähnten verschwinden damit alle Fourierkoeffizienten von g. Zur Konstruktion der P_μ werden zunächst gewisse elementare Funktionen g_μ definiert, die den Harmonizitätsbedingungen genügen und linksinvariant unter $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_q[T] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind. Die Idee ist es nun, hieraus $\Gamma_0^{(1)}(N)$-invariante Funktionen zu gewinnen, indem über ein Vertretersystem von $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_q[T] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\backslash \Gamma_0^{(1)}(N)$ summiert wird, d. h., rein formal, $P_\mu(X) = \sum_{A \in \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{F}_q[T] \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \backslash \Gamma_0^{(1)}(N)} g_\mu(AX)$ zu definieren. Allerdings stellt sich die Frage nach der Konvergenz dieser Reihe. Um diesem Problem zu begegnen, werden die g_μ zu $g_{\mu,s}$ mit $s \in \mathbb{C}$ abgewandelt, so daß $\lim_{s\to 1} g_{\mu,s} = g_\mu$ gilt, und $P_{\mu,s}(X) := \sum_{A \in \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{F}_q[T] \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \backslash \Gamma_0^{(1)}(N)} g_{\mu,s}(AX)$ gesetzt.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird nun gezeigt, daß die $P_{\mu,s}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut konvergieren, daß der Grenzwert $\lim_{s\to 1} P_{\mu,s} =: P_\mu$ existiert und daß die P_μ harmonische Koketten sind. Es schließen sich die Beweise der bereits erwähnten Formel für $\langle f, P_\mu\rangle$ an sowie daß es sich bei der Gesamtheit der P_μ um ein Erzeugendensystem des Raumes der harmonischen Koketten handelt.

Problemstellung dieser Arbeit
Das Ziel dieser Arbeit war es, die Ergebnisse aus [Rü] von $GL_2(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ auf den GL_3-Fall zu übertragen. Die hierfür in Frage kommenden Funktionen sind harmonische Koketten auf den gerichteten 2-Simplizes des Bruhat-Tits-Gebäudes zur GL_3 über K_∞, welche man mit $GL_3(K_\infty)/\Gamma K_\infty^*$ identifizieren kann. Dieses Gebäude ist das höherdimensionale Äquivalent des Bruhat-Tits-Baumes und wurde bereits unter anderem von [Ge] untersucht; eine Definition der harmonischen Koketten auf den gerichteten 2-Simplizes des Gebäudes findet sich in [Sh]. Es war nun zunächst notwendig nachzuweisen, daß auch diese Funktionen eine Fourierentwicklung besitzen. Anschließend sollten analog zum Vorgehen in [Rü] Poincaré-Reihen konstruiert und ihr Petersson-Skalarprodukt mit harmonischen Koketten ausgewertet werden.

Aufbau und Ergebnisse der Arbeit
Vorab sei angemerkt, daß es sich hierbei um einen groben Überblick handelt; insbesondere werden nicht alle Bezeichnungen erklärt. Details sind in den entsprechenden Kapiteln der Arbeit zu finden.

Zu Beginn des ersten Kapitels werden zunächst die wichtigsten Tatsachen das Bruhat-Tits-Gebäude $\mathcal{T}$ zur GL_3 über K_∞ betreffend zusammengestellt. Ein wesentliches Ergebnis ist, daß sich die Menge der orientierten 2-Simplizes von $\mathcal{T}$ mit $GL_3(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ identifizieren läßt und daß es in jeder Nebenklasse einen Vertreter gibt, der bis auf Spaltenvertauschungen von der Form $\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $u, v, w \in K_\infty$ ist. Jede auf $\mathcal{T}$ definierte Funktion läßt sich demnach als Funktion auf $GL_3(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ interpretieren. Damit kann im Anschluß die Definition sogenannter harmonischer Koketten, die in [Sh] in der Sprache der Simplizialkomplexe formuliert ist, auf Funktionen $f\colon GL_3(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \to \mathbb{C}$ übertragen werden. Es stellt sich dabei heraus, daß diese Funktionen dadurch charakterisiert sind, daß sie invariant unter Rechtsmultiplikation des Argumentes mit $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pi_\infty & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind und die drei Summationsbedingungen

$$
\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 0, \qquad (4)\\
f\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi_\infty & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 0,\\
f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi_\infty & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

erfüllen, die daraus resultieren, daß sich die Summe über die Funktionswerte aller 2-Simplizes, die eine gemeinsame Kante besitzen, zu 0 aufaddieren muß. Insgesamt läßt sich daraus ableiten, daß es genügt, das Verhalten von f auf Argumenten der Form $\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu untersuchen. Zuletzt wird als technische Vorbereitung für spätere Rechnungen ein Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen von

$$\Gamma_\Delta := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; x, y, z \in \mathbb{F}_q[T] \right\}$$

in

$$\Gamma_0^{(1)}(N) := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in G(\mathbb{F}_q[T]) \middle| \; d, g, h \equiv 0 \bmod N, \, \det(M) = 1 \right\}$$

berechnet. Es stellt sich heraus, daß die Äquivalenzklasse von $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(1)}(N)$ modulo Γ_Δ einerseits unabhängig von der obersten Zeile ist, andererseits aber alle Matrizen derselben Äquivalenzklasse dieselbe unterste Zeile besitzen. Bei fester unterster Zeile $\begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}$ kann man die Einträge der zweiten Zeile $\begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von g, h, i sowie von zwei teilerfremden Polynomen $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q[T]$ mittels

$$\begin{pmatrix} \beta y_0 + B\alpha \frac{g}{\mathfrak{a}} & \beta x_0 + B\alpha \frac{h}{\mathfrak{a}} & -\alpha A \end{pmatrix}$$

beschreiben, wobei $A, B, \mathfrak{a}, x_0, y_0 \in \mathbb{F}_q[T]$ Polynome sind, die nur von g, h und i abhängen.

Kapitel 2 ist der Untersuchung allgemeiner Eigenschaften $\Gamma_0(N)$-invarianter harmonischer Koketten $GL_3(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \to \mathbb{C}$ gewidmet. Dabei werden zunächst solche Koketten, die modulo $\Gamma_0(N)$ endlichen Träger besitzen, betrachtet. Wie bereits erwähnt, ist eine harmonische Kokette bereits durch ihre Werte auf Matrizen der Form $\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eindeutig bestimmt. Es wird gezeigt, daß man für den Träger solcher Funktionen Schranken für m und n in Abhängigkeit vom Grad von N angeben kann. Genauer gesagt wird bewiesen, daß

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \text{ für } m \leq 1, \, n \leq -m - 6\deg(N) + 4 \text{ oder } n \geq 2m + 3\deg(N) - 2.$$

Der Beweis dieser Aussage benutzt unter anderem die als eigenständiges Resultat interessante Aussage, welche sich durch explizite Angabe eines entsprechenden Reduktionsalgorithmus ergibt, daß ein vollständiges Repräsentantensystem für $GL_3(\mathbb{F}_q[T])\backslash GL_3(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ gegeben ist durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; m, n \in \mathbb{N} \text{ und } m > n \geq 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; m, n \in \mathbb{N} \text{ und } m \geq n \geq 1 \right\}.$$

Jede Γ_Δ-invariante Funktion $f\colon GL_3(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \to \mathbb{C}$ kann bei festem $M = \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}$ als Funktion auf der kompakten abelschen Gruppe $(K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^2$ aufgefaßt werden, indem man

$$f_M\colon (K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^2 \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

setzt. Basierend hierauf und nach Zusammenstellung einiger grundlegender Tatsachen zur Fourieranalysis auf kompakten abelschen Gruppen wird nachgewiesen, daß f in Abhängigkeit von M und einem additiven Charakter ψ_∞ in eine Fourierreihe

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda v + \mu w)$$

entwickelt werden kann, und daß sich die Fourierkoeffizienten als endliche Summen über Funktionswerte von f ausdrücken lassen. Die vorher bereitgestellten Ergebnisse über den Träger von f lassen sich daher dazu benutzen, um das Verschwinden gewisser Fourierkoeffizienten $f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)$ in Abhängigkeit vom Grad von N zu charakterisieren: Es gilt

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = 0 \text{ für alle } m \leq 1,\ n \leq -m-6\deg(N)+4 \text{ oder } n \geq 2m+3\deg(N)-2.$$

Im Anschluß an diese Überlegungen wird bewiesen, daß sich die Harmonizität einer $\Gamma_0(N)$-invarianten Funktion f über Eigenschaften ihrer Fourierkoeffizienten ausdrücken läßt, nämlich mittels

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = \begin{cases} q^2 f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right), & \text{falls } v_\infty\left((\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right) \geq 2,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases} \tag{F1}$$

und

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = \begin{cases} q\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right), & \text{falls } v_\infty(\lambda\pi_\infty^m) \geq 2,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases} \tag{F2}$$

Aufgrund der Invarianz von f unter $\Gamma_0(N)$ erfüllen die Fourierkoeffizienten außerdem

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu-\gamma\lambda\right) \text{ für alle } \gamma\in\mathbb{F}_q[T]. \tag{IV}$$

Umgekehrt ist es möglich, aus einer Familie $(f^*_{M,\lambda,\mu})_{M,\lambda,\mu} \in \mathbb{C}$ gegebener Koeffizienten, die den Eigenschaften (**F1**), (**F2**) sowie (**IV**) genügen, durch Summation über $\lambda,\ \mu \in \mathbb{F}_q[T]$ und geeignete Fortsetzung auf Matrizen der Form $\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^m & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ eine harmonische Γ_Δ-invariante Funktion zu konstruieren.

Dies wird in Kapitel 3 dazu benutzt, zunächst zwei Γ_Δ-invariante harmonische Koketten $F_{(\lambda,\mu)}$ und $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}$ zu definieren. Beispielsweise ist $F_{(\lambda,\mu)}$ gegeben durch

$$F_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) := \sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]} f_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix}1 & \gamma & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

$$F_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^{m-1} & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) := -\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^{m-1} & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \pi_\infty & 0 & \varepsilon\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

wobei

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right):=\begin{cases}q^{-2m}, & \text{falls } v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

$$f_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right):=f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w).$$

Wie in [Rü] ist das Ziel, aus diesen Funktionen durch Summation über $\Gamma_\Delta\backslash\Gamma_0(N)$ Funktionen zu generieren, die unter der ganzen Gruppe $\Gamma_0(N)$ invariant sind, weshalb in Imitation der Vorgehensweise zunächst konvergenzerzeugende Faktoren hinzugefügt und damit für $s\in\mathbb{C}$ Funktionen $F_{(\lambda,\mu),s}$ und $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ definiert werden. Z. B. ist $F_{(\lambda,\mu),s}$ definiert durch

$$f_s^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right):=\begin{cases}q^{-2ms}, & \text{falls } v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

$$f_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right):=f_s^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w),$$

$$F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right):=\sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]}f_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}1 & \gamma & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

und

$$F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^{m-1} & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right):=-\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^{m-1} & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \pi_\infty & 0 & \varepsilon\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Für $s=1$ erhält man aus $F_{(\lambda,\mu),s}$ bzw. $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ die ursprünglichen Funktionen $F_{(\lambda,\mu)}$ und $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}$ zurück. Durch Summation über diese modifizierten Funktionen werden die Reihen

$$\mathcal{F}_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right):=\sum_{A\in\Gamma_\Delta\backslash\Gamma_0^{(1)}(N)}F_{(\lambda,\mu),s}\left(A\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

und

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right):=\sum_{A\in\Gamma_\Delta\backslash\Gamma_0^{(1)}(N)}G_{a,\lambda,\mu,s}\left(A\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

mit $s\in\mathbb{C}$ definiert. Es folgt der Nachweis, daß diese für hinreichend großen Realteil von s absolut konvergieren und quasi-harmonisch sind, d. h. im Falle der Konvergenz bei $s=1$ harmonische Funktionen darstellen. Beispielsweise genügt $\mathcal{F}_{(\lambda,\mu),s}$ einer Bedingung

$$\mathcal{F}_{(\lambda,\mu),s}(X)+\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}\mathcal{F}_{(\lambda,\mu),s}(XX_\varepsilon)=(1-q^{2-2s})\cdot\left[\sum_{A|AX\in S}F_{(\lambda,\mu),s}(AX)+\right.$$

$$\left.\sum_{A|AX\in SR^2}F_{(\lambda,\mu),s}(AX)+\sum_{A|AX\in SQ}F_{(\lambda,\mu),s}(AXQM)+\sum_{A|AX\in SQR}F_{(\lambda,\mu),s}(AXQM)\right],$$

welche im Grenzfall $s \to 1$ in die Harmonizitätsbedingung (4) übergeht.

In Kapitel 4 wird das Petersson-Skalarprodukt auf dem Raum der harmonischen Koketten definiert und untersucht, welche Rückschlüsse man über das Skalarprodukt einer harmonischen Kokette mit einer der Funktionen $\mathscr{F}_{(\lambda,\mu),1}$ und $\mathscr{Q}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,1}$ auf ihre Fourierkoeffizienten ziehen kann. Es zeigt sich hierbei, daß für jede harmonische $\Gamma_0^{(1)}(N)$-invariante Kokette f das Skalarprodukt $\langle f, \mathscr{F}_{(\lambda,\mu),1}\rangle := \lim\limits_{s\to 1}\langle f, \mathscr{F}_{(\lambda,\mu),s}\rangle$ unabhängig von der Konvergenz von $\lim\limits_{s\to 1} \mathscr{F}_{(\lambda,\mu),s}$ existiert und im Wesentlichen eine Summe über die Fourierkoeffizienten $f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & -\frac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)$ ist.

Den Abschluß der Arbeit bildet die Betrachtung von Hecke-Operatoren, die adelisch eingeführt und auf die ∞-Komponente $GL_3(K_\infty)$ projiziert werden. Anschließend werden die Fourierkoeffizienten der Hecke-Transformierten von Funktionen $\Gamma_0(N)\backslash GL_3(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \to \mathbb{C}$ berechnet.

Es stellte sich im Verlaufe der Bearbeitung heraus, daß der Übergang von GL_2 zu GL_3 die Berechnungen erheblich verkomplizierte, so daß die im Vorfeld gesteckten Ziele nicht alle erreicht werden konnten; insbesondere die Konvergenz der explizit konstruierten Reihen $\mathscr{F}_{(\lambda,\mu),s}$ und $\mathscr{Q}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ bei $s = 1$ konnte nicht abschließend behandelt werden, jedoch konnte gezeigt werden, daß im Falle der Konvergenz die Funktionen $\mathscr{F}_{(\lambda,\mu),1}$ und $\mathscr{Q}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,1}$ harmonisch sind. Weiterhin konnte gezeigt werden, daß für jede harmonische Kokette f der Grenzwert $\lim_{s\to 1}\langle f, \mathscr{F}_{(\lambda,\mu),s}\rangle$ existiert und eine endliche Summe gewisser Fourierkoeffizienten von f ist. Außerdem ist es gelungen, den Träger harmonischer Koketten im Falle von dessen Endlichkeit genauer zu beschreiben.

Danksagung
Ich danke Prof. Dr. Hans-Georg Rück für die Betreuung dieser Arbeit, viele erhellende Gespräche und seine Geduld.
Weiterhin bedanke ich mich bei Björn Fehling, der einen großen Teil des Manuskriptes Korrektur gelesen hat.
Zudem danke ich Dörthe Janssen und Thomas Lange für ihre stete Diskussionsbereitschaft und ihre fachliche sowie persönliche Unterstützung.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Grundlegende Notationen

In dieser Arbeit seien mit $\mathbb{N} := \{z \in \mathbb{Z} \mid z > 0\}$ die natürlichen Zahlen exklusive der 0 bezeichnet. Soll die 0 mit eingeschlossen sein, wird die Notation $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ benutzt.

Es sei p eine Primzahl, $q = p^n$ für eine natürliche Zahl n und $\mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit q Elementen. Weiter sei $\mathbb{F}_q[T]$ der Polynomring über $\mathbb{F}_q$ in der Variablen T und $\deg(f)$ der Grad eines Polynoms $f \in \mathbb{F}_q[T]$, wobei $\deg(0) = -\infty$ und die üblichen Konventionen für das Rechnen mit ∞ gelten sollen. Sei

$$K := \mathbb{F}_q(T)$$

der Quotientenkörper von $\mathbb{F}_q[T]$. Auf K ist durch

$$v_\infty\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\},\ v_\infty\left(\frac{f}{g}\right) = \begin{cases} \deg(g) - \deg(f), & \text{falls } f \in \mathbb{F}_q[T],\ g \in \mathbb{F}_q[T] \setminus \{0\}, \\ \infty, & \text{falls } f = 0,\ g \in \mathbb{F}_q[T] \setminus \{0\} \end{cases}$$

eine Bewertung gegeben und durch

$$|\cdot|_\infty : K \to \mathbb{R}_0^+,\ \left|\frac{f}{g}\right|_\infty = \begin{cases} q^{-v_\infty(f/g)}, & \text{falls } f \in \mathbb{F}_q[T],\ g \in \mathbb{F}_q[T] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{falls } f = 0,\ g \in \mathbb{F}_q[T] \setminus \{0\} \end{cases}$$

ein (notwendigerweise nichtarchimedischer) Betrag, bezüglich dessen man K vervollständigen kann. Setzt man

$$\pi_\infty := \frac{1}{T},$$

so ist die resultierende Komplettierung der Laurentreihenring

$$K_\infty := K\left((\pi_\infty)\right).$$

Der zu v_∞ korrespondierende Bewertungsring ist der Potenzreihenring

$$O_\infty := \mathbb{F}_q[[\pi_\infty]]$$

mit maximalem Ideal $\pi_\infty O_\infty$, so daß π_∞ eine normierte Ortsuniformisierende ist.
Für $m \in \mathbb{Z}$, $a_m, a_{m+1}, \ldots \in \mathbb{F}_q$ mit $a_m \neq 0$ und $k_\infty = \sum\limits_{i=m}^{\infty} a_i \pi_\infty^i \in K_\infty$ gilt $v_\infty(k_\infty) = m$;

insbesondere ist $v_\infty(\varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*$.

Für einen Ring $\mathfrak{R}$ sei

$$G(\mathfrak{R}) := GL_3(\mathfrak{R})$$

die Gruppe der invertierbaren 3×3-Matrizen mit Einträgen in $\mathfrak{R}$. Im Rahmen dieser Arbeit werden dabei besonders die Ringe $\mathbb{F}_q[T]$, K_∞ und O_∞ eine Rolle spielen.
Für die im nächsten Abschnitt folgende Beschreibung des Bruhat-Tits-Gebäudes werden die Matrizen

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pi_\infty & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Q := \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_\infty)$$

sowie drei Untergruppen von $G(O_\infty)$ benötigt, nämlich die sogenannte erste Standard-Parahorigruppe

$$P_1 := \{g = (g_{ij}) \in G(O_\infty) \mid g_{31}, g_{32} \in \pi_\infty O_\infty\},$$

die sogenannte zweite Standard-Parahorigruppe

$$P_2 := \{g = (g_{ij}) \in G(O_\infty) \mid g_{21}, g_{31} \in \pi_\infty O_\infty\}$$

und die sogenannte Standard-Iwahorigruppe

$$\Gamma_\infty := \{g = (g_{ij}) \in G(O_\infty) \mid g_{ij} \in \pi_\infty O_\infty \text{ für alle } 1 \le j < i \le 3\}.$$

Die Matrizen

$$X_\varepsilon := \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; Z_\varepsilon := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi_\infty & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_\infty) \quad (\varepsilon \in \mathbb{F}_q)$$

werden bei der Beschreibung der Harmonizität von Funktionen eine Rolle spielen. Bei der späteren Betrachtung von Fourierentwicklungen wird sich die Untergruppe

$$\Gamma_\Delta := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; x, y, z \in \mathbb{F}_q[T] \right\} \subset G(\mathbb{F}_q[T])$$

als nützlich erweisen.
Im weiteren Verlauf der Arbeit sei

$$N \in \mathbb{F}_q[T] \setminus \{0\}$$

ein Polynom, zu dem die Untergruppen

$$\begin{aligned} \Gamma_0(N) &:= \{g = (g_{ij}) \in G(\mathbb{F}_q[T]) \mid g_{ij} \equiv 0 \bmod N \text{ für alle } 1 \le j < i \le 3\} \subseteq G(\mathbb{F}_q[T]), \\ \Gamma_0^{(1)}(N) &:= \{g \in \Gamma_0(N) \mid \det(g) = 1\} \subset G(\mathbb{F}_q[T]) \end{aligned}$$

definiert seien.

1.2 Das Bruhat-Tits-Gebäude

Die folgende Charakterisierung des Bruhat-Tits-Gebäudes lehnt sich an die Darstellung in [Sh] und [Ge] an.
Es sei V ein dreidimensionaler K_∞-Vektorraum. Ein O_∞-Modul $L = b_1O_\infty + b_2O_\infty + b_3O_\infty$ heißt ein Gitter in V, wenn (b_1, b_2, b_3) eine Vektorraumbasis von V bildet. Zwei V-Gitter L, L' heißen äquivalent, wenn es ein $\lambda \in K_\infty^*$ gibt mit $L = \lambda L'$. Die Äquivalenzklasse von L werde mit $[L]$ bezeichnet.
Das Bruhat-Tits-Gebäude $\mathcal{T}$ zu G über K_∞ ist ein Simplizialkomplex, dessen Ecken aus den Gitterklassen $[L]$ der Gitter L in V bestehen. Die t-Simplizes $\mathcal{T}_t$, $0 \leq t \leq 2$, bestehen aus $(t+1)$-Tupeln

$$\{[L_0], [L_1], \ldots, [L_t]\}, \text{ wobei } L_0 \supsetneq L_1 \supsetneq \ldots \supsetneq L_t \supsetneq \pi_\infty L_0.$$

Aufgrund des Elementarteilersatzes kann man für jeden 2-Simplex $s = \{[L_0], [L_1], [L_2]\}$ eine Basis (b_1, b_2, b_3) von L_0 so wählen, daß

$$L_0 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle_{O_\infty}, \; L_1 = \langle b_1, b_2, \pi_\infty b_3 \rangle_{O_\infty}, \; L_2 = \langle b_1, \pi_\infty b_2, \pi_\infty b_3 \rangle_{O_\infty}.$$

Ist $t \leq l$ und gilt $\tau \subseteq \sigma$ für $\tau \in \mathcal{T}_t$, $\sigma \in \mathcal{T}_l$, so nennt man τ eine Seite von σ und schreibt $\tau \leq \sigma$.
Gilt $L_0 \supsetneq L_1 \supsetneq L_2 \supsetneq \ldots \supsetneq L_t \supsetneq \pi_\infty L_0$, so ist auch $L_1 \supsetneq L_2 \supsetneq \ldots \supsetneq L_t \supsetneq \pi_\infty L_0 \supsetneq \pi_\infty L_1$. Möchte man einen Anfangspunkt $[L_0]$ des t-Simplex $\{[L_0], [L_1], \ldots, [L_t]\}$ auszeichnen, schreibt man daher $\sigma = ([L_0], [L_1], \ldots, [L_t])$ als geordnetes $(t+1)$-Tupel und nennt σ einen gerichteten t-Simplex. Es sei $\hat{\mathcal{T}}_t$ die Menge der gerichteten t-Simplizes.
Sei nun eine geordnete Basis (e_1, e_2, e_3) von V fest gewählt, dann seien

$$C_{00} = [\langle e_1, e_2, e_3 \rangle_{O_\infty}], \; C_{01} = [\langle e_1, e_2, \pi_\infty e_3 \rangle_{O_\infty}], \; C_{02} = [\langle e_1, \pi_\infty e_2, \pi_\infty e_3 \rangle_{O_\infty}]$$

die Standardknoten oder Standardecken,

$$C_{10} = \{C_{00}, C_{01}\}, \, C_{11} = \{C_{01}, C_{02}\}, \, C_{12} = \{C_{02}, C_{00}\}$$

die Standardkanten und

$$C_2 = \{C_{00}, C_{01}, C_{02}\}$$

der Standard-2-Simplex.
Die durch $g[L] = [gL]$ gegebene Operation von $GL(V)$ auf $\mathcal{T}_0$ erhält die Inklusion von Gittern und läßt sich daher durch

$$g([L_0], [L_1], \ldots, [L_t]) = ([gL_0], [gL_1], \ldots, [gL_t])$$

auf ganz $\mathcal{T}$ fortsetzen. Die Gruppe $GL(V)$ operiert jeweils transitiv auf den Knoten, Kanten und 2-Simplizes von $\mathcal{T}$.
Man kann nun (e_1, e_2, e_3) mit der Standardbasis des K_∞^3 identifizieren und somit auch $GL(V)$ mit $G(K_\infty)$, d. h. insbesondere jede geordnete Basis (b_1, b_2, b_3) von V mit der zugehörigen Basiswechselmatrix. Im Folgenden wird daher zwischen einer geordneten Basis und ihrer zugehörigen Matrix nicht unterschieden.
Wegen der Transitivität der Operation von $GL(V)$ auf $\mathcal{T}_t$, $t = 0, 1, 2$, gilt:

- Zu jedem Knoten $[L] \in \mathcal{T}_0$ gibt es ein $g \in G(K_\infty)$, so daß $gC_{00} = [L]$, und der Stabilisator von C_{00} in $G(K_\infty)$ ist $G(O_\infty)K_\infty^*$. Identifiziert man $[L]$ mit g, so erhält man folglich eine 1-zu-1-Korrespondenz

$$\mathcal{T}_0 \longleftrightarrow G(K_\infty)/G(O_\infty)K_\infty^*.$$

- Zu jeder Kante $k = \{[L_0], [L_1]\} \in \mathcal{T}_1$ gibt es ein $g \in G(K_\infty)$, so daß $gC_{10} = k$, und der Stabilisator von C_{10} in $G(K_\infty)$ ist $P_1 K_\infty^*$. Identifiziert man k mit g, so erhält man folglich eine 1-zu-1-Korrespondenz
$$\mathcal{T}_1 \longleftrightarrow G(K_\infty)/P_1 K_\infty^*.$$
Für die Menge der *gerichteten* Kanten $\hat{\mathcal{T}}_1$ gibt es keine solche Beschreibung, da es keine Matrix in $G(K_\infty)$ gibt, welche die Endpunkte einer Kante vertauscht.

- Sei $\hat{C}_2 = (C_{00}, C_{01}, C_{02}) \in \hat{\mathcal{T}}_2$ der geordnete Standard-2-Simplex, dann gibt es zu jedem geordneten 2-Simplex $\hat{s} = ([L_0], [L_1], [L_2]) \in \hat{\mathcal{T}}_2$ ein $g \in G(K_\infty)$, so daß $g\hat{C}_2 = \hat{s}$, und der Stabilisator von $\hat{C}_2$ in $G(K_\infty)$ ist $\Gamma_\infty K_\infty^*$. Identifiziert man $\hat{s}$ mit g, so erhält man folglich eine 1-zu-1-Korrespondenz
$$\hat{\mathcal{T}}_2 \longleftrightarrow G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*.$$
Der Stabilisator des ungeordneten 2-Simplex C_2 ist $\Gamma_\infty \langle R \rangle K_\infty^*$, so daß
$$\mathcal{T}_2 \longleftrightarrow G(K_\infty)/\Gamma_\infty \langle R \rangle K_\infty^*.$$

Es sollen nun Vertreter für die ungerichteten Kanten und die gerichteten sowie ungerichteten 2-Simplizes von $\mathcal{T}$ angegeben werden. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird immer wieder auf die im folgenden Satz angegebenen Mengen als kanonische Vertreter zurückgegriffen werden.

Satz 1.2.1 *Sei*
$$S := \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\, m, n \in \mathbb{Z},\ u, v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty,\ w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty \right\},$$
dann gilt
$$\begin{aligned} &G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* = \\ &\quad S\,\Gamma_\infty K_\infty^* \ \dot\cup\ SQ\,\Gamma_\infty K_\infty^* \ \dot\cup\ SQR^2\,\Gamma_\infty K_\infty^* \ \dot\cup\ SR^2\,\Gamma_\infty K_\infty^* \ \dot\cup\ SQR\,\Gamma_\infty K_\infty^* \ \dot\cup\ SR\,\Gamma_\infty K_\infty^*. \end{aligned}$$
Bezeichnet man für eine Menge $M \subseteq G(K_\infty)$ mit $\mathcal{V}_M$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $M\,\Gamma_\infty K_\infty^*$, so gilt
$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_S &= S, \\
\mathcal{V}_{SQ} &= \left\{ \begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\, m, n \in \mathbb{Z}, u \in K_\infty/\pi_\infty^{m+1} O_\infty, v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty, w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty \right\}, \\
\mathcal{V}_{SQR^2} &= \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & v & u \\ 0 & w & \pi_\infty^n \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \middle|\, m, n \in \mathbb{Z}, u, v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty, w \in K_\infty/\pi_\infty^{n+1} O_\infty \right\}, \\
\mathcal{V}_{SR^2} &= \left\{ \begin{pmatrix} u & v & \pi_\infty^m \\ \pi_\infty^n & w & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \middle|\, m, n \in \mathbb{Z}, u, v \in K_\infty/\pi_\infty^{m+1} O_\infty, w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty \right\}, \\
\mathcal{V}_{SQR} &= \left\{ \begin{pmatrix} v & u & \pi_\infty^m \\ w & \pi_\infty^n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle|\, m, n \in \mathbb{Z}, u, v \in K_\infty/\pi_\infty^{m+1} O_\infty, w \in K_\infty/\pi_\infty^{n+1} O_\infty \right\}, \\
\mathcal{V}_{SR} &= \left\{ \begin{pmatrix} v & \pi_\infty^m & u \\ w & 0 & \pi_\infty^n \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle|\, m, n \in \mathbb{Z}, v \in K_\infty/\pi_\infty^{m+1} O_\infty, u \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty, w \in K_\infty/\pi_\infty^{n+1} O_\infty \right\},
\end{aligned}$$

und

$$\mathcal{V}_S \mathbin{\dot\cup} \mathcal{V}_{SQ} \mathbin{\dot\cup} \mathcal{V}_{SQR^2} \mathbin{\dot\cup} \mathcal{V}_{SR^2} \mathbin{\dot\cup} \mathcal{V}_{SQR} \mathbin{\dot\cup} \mathcal{V}_{SR}$$

ist ein vollständiges Repräsentantensystem von $G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$.

Beweis Sei $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in G(K_\infty)$.

1. Falls $v_\infty(i) < v_\infty(g)$, $v_\infty(i) < v_\infty(h)$ und $v_\infty(ei - fh) < v_\infty(di - fg)$, liegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{g}{i} & -\frac{h}{i} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{di-fg}{ei-fh} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in Γ_∞, so daß

$$M \equiv M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{g}{i} & -\frac{h}{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{di-fg}{ei-fh} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\det(M)}{ei-fh} & \frac{bi-ch}{i} & c \\ 0 & \frac{ei-fh}{i} & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Da $v_\infty(i) < v_\infty(g)$ insbesondere $i \neq 0$ bedingt, kann man die erhaltene Matrix durch i dividieren und erhält $\begin{pmatrix} \frac{\det(M)}{i(ei-fh)} & \frac{bi-ch}{i^2} & \frac{c}{i} \\ 0 & \frac{ei-fh}{i^2} & \frac{f}{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Rechtsmultiplikation mit $\begin{pmatrix} \frac{i(ei-fh)}{\det(M)} \pi_\infty^{v_\infty(\det(M)) - v_\infty(i(ei-fh))} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i^2}{ei-fh} \pi_\infty^{v_\infty(ei-fh) - 2v_\infty(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$ ergibt schließlich $\begin{pmatrix} \pi_\infty^{v_\infty(\det(M)) - v_\infty(i(ei-fh))} & \frac{bi-ch}{ei-fh} \pi_\infty^{v_\infty(ei-fh) - 2v_\infty(i)} & \frac{c}{i} \\ 0 & \pi_\infty^{v_\infty(ei-fh) - 2v_\infty(i)} & \frac{f}{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Da man diese Matrix noch durch Rechtsmultiplikation mit $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$ abändern kann, ist M zu genau einer der Matrizen aus $\mathcal{V}_S$ äquivalent.

2. Falls $v_\infty(i) < v_\infty(g)$, $v_\infty(i) < v_\infty(h)$ und $v_\infty(di - fg) \leq v_\infty(ei - fh)$, gilt

$$M \equiv M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{g}{i} & -\frac{h}{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{ei-fh}{di-fg} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} i^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{ai-cg}{i^2} & \frac{\det(M)}{i(fg-di)} & \frac{c}{i} \\ \frac{di-fg}{i^2} & 0 & \frac{f}{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und nach Normierung von $\frac{di-fg}{i^2}$ und $\frac{\det(M)}{i(fg-di)}$ sowie gegebenenfalls Abänderung um eine Matrix aus Γ_∞ wie im vorherigen Fall sieht man, daß M äquivalent zu einer Matrix aus $\mathcal{V}_{SQ}$ ist.

3. Falls $v_\infty(h) < v_\infty(g)$, $v_\infty(h) \leq v_\infty(i)$ und $v_\infty(ei - fh) < v_\infty(dh - eg)$, ist

$$M \equiv M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{g}{h} & 1 & -\frac{i}{h} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{dh-eg}{fh-ei} & 0 & 1 \end{pmatrix} h^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\det(M)}{h(ei-fh)} & \frac{b}{h} & \frac{ch-bi}{h^2} \\ 0 & \frac{e}{h} & \frac{fh-ei}{h^2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und daher M äquivalent zu einer Matrix aus $\mathcal{V}_{SQR^2}$.

4. Falls $v_\infty(h) < v_\infty(g)$, $v_\infty(h) \leq v_\infty(i)$ und $v_\infty(dh-eg) \leq v_\infty(ei-fh)$, ist
$$M \equiv M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{g}{h} & 1 & -\frac{i}{h} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{fh-ei}{dh-eg} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} h^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{ah-bg}{h^2} & \frac{b}{h} & \frac{\det(M)}{h(dh-eg)} \\ \frac{dh-eg}{h^2} & \frac{e}{h} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Somit ist M äquivalent zu einer Matrix aus $\mathcal{V}_{SR^2}$.

5. Falls $v_\infty(g) \leq v_\infty(h)$, $v_\infty(g) \leq v_\infty(i)$ und $v_\infty(dh-eg) \leq v_\infty(di-fg)$, erhält man
$$M \equiv M \begin{pmatrix} 1 & -\frac{h}{g} & -\frac{i}{g} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{fg-di}{eg-dh} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{g} & \frac{bg-ah}{g^2} & \frac{\det(M)}{g(dh-eg)} \\ \frac{d}{g} & \frac{eg-dh}{g^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
und folglich ist M äquivalent zu einer Matrix aus $\mathcal{V}_{SQR}$.

6. Falls $v_\infty(g) \leq v_\infty(h)$, $v_\infty(g) \leq v_\infty(i)$ und $v_\infty(di-fg) < v_\infty(dh-eg)$, ergibt sich
$$M \equiv M \begin{pmatrix} 1 & -\frac{h}{g} & -\frac{i}{g} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{eg-dh}{fg-di} & 1 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{g} & \frac{\det(M)}{g(fg-di)} & \frac{cg-ai}{g^2} \\ \frac{d}{g} & 0 & \frac{fg-di}{g^2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
weshalb M zu einer Matrix aus $\mathcal{V}_{SR}$ äquivalent ist.

Da die Fälle disjunkt sind und alle Möglichkeiten auftauchen, ergibt sich die Aussage des Satzes. □

Die Matrix R läßt unorientierte 2-Simplizes fest, vertauscht bei den orientierten 2-Simplizes aber zyklisch die Anfangspunkte. Wegen $R^3 = \pi_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P_1$ folgt:

Satz 1.2.2 *Mit den Bezeichnungen aus Satz 1.2.1 gilt: Durch* $\mathcal{V}_S \,\dot\cup\, \mathcal{V}_{SQ}$ *ist ein vollständiges Repräsentantensystem von* $G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ *gegeben. Als Repräsentantensystem für* $G(K_\infty)/P_1K_\infty^*$ *erhält man* $\mathcal{V}_S \,\dot\cup\, \mathcal{V}_{SQR^2} \,\dot\cup\, \mathcal{V}_{SR^2}$.

Zusammenfassend ergibt sich:

- Zu jeder ungerichteten Kante aus $\mathcal{T}$ gibt es eine Matrix aus $S \,\dot\cup\, SQR^2 \,\dot\cup\, SR^2$.
- Zu jedem gerichteten 2-Simplex aus $\mathcal{T}$ gibt es eine Matrix aus $S \,\dot\cup\, SQ \,\dot\cup\, SQR^2 \,\dot\cup\, SR^2 \,\dot\cup\, SQR \,\dot\cup\, SR$.
- Zu jedem ungerichteten 2-Simplex aus $\mathcal{T}$ gibt es eine Matrix aus $S \,\dot\cup\, SQ$.

Geht man zu den in Satz 1.2.1 gegebenen vollständigen Repräsentantensystemen über, so können die entsprechenden Objekte jeweils eindeutig mit einer Matrix aus $G(K_\infty)$ identifiziert werden.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird oft der Fall auftreten, daß eine Matrix

$$X = \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$$

von links mit einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

multipliziert wird und das Resultat

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\pi_\infty^m & au + b\pi_\infty^n & av + bw + c \\ d\pi_\infty^m & du + e\pi_\infty^n & dv + ew + f \\ g\pi_\infty^m & gu + h\pi_\infty^n & gv + hw + i \end{pmatrix} =: D$$

auf Standardform modulo $\Gamma_\infty K_\infty^*$ gebracht werden soll. Daher wird eine Charakterisierung der hierbei auftretenden Fälle an dieser Stelle noch einmal explizit festgehalten.

Satz 1.2.3 *Seien A, D und X wie vor und D_{ij} die Determinante der Matrix, die aus D durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht. Es bezeichne „$\equiv$“ Äquivalenz in $G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$, dann gilt:*

1. *Für*

   - $v_\infty(gv + hw + i) < v_\infty(g\pi_\infty^m)$,
   - $v_\infty(gv + hw + i) < v_\infty(gu + h\pi_\infty^n)$,
   - $v_\infty(D_{11}) < v_\infty(D_{12})$

   erhält man

$$\begin{pmatrix} a\pi_\infty^m & au + b\pi_\infty^n & av + bw + c \\ d\pi_\infty^m & du + e\pi_\infty^n & dv + ew + f \\ g\pi_\infty^m & gu + h\pi_\infty^n & gv + hw + i \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+n-v_\infty(D_{11})-v_\infty(gv+hw+i)} & \frac{D_{21}}{D_{11}} \cdot \pi_\infty^{v_\infty(D_{11})-2v_\infty(gv+hw+i)} & \frac{av+bw+c}{gv+hw+i} \\ 0 & \pi_\infty^{v_\infty(D_{11})-2v_\infty(gv+hw+i)} & \frac{dv+ew+f}{gv+hw+i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Für*

   - $v_\infty(g\pi_\infty^m) \leq v_\infty(gu + h\pi_\infty^n)$,
   - $v_\infty(g\pi_\infty^m) \leq v_\infty(gv + hw + i)$,
   - $v_\infty(D_{12}) < v_\infty(D_{13})$

   erhält man

$$\begin{pmatrix} a\pi_\infty^m & au + b\pi_\infty^n & av + bw + c \\ d\pi_\infty^m & du + e\pi_\infty^n & dv + ew + f \\ g\pi_\infty^m & gu + h\pi_\infty^n & gv + hw + i \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{g} & \pi_\infty^{n-v_\infty(D_{12})+\deg(g)} & \frac{D_{22}}{D_{12}} \cdot \pi_\infty^{-2m+v_\infty(D_{12})+2\deg(g)} \\ \frac{d}{g} & 0 & \pi_\infty^{-2m+v_\infty(D_{12})+2\deg(g)} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{n-v_\infty(D_{12})+\deg(g)+1} & \frac{D_{22}}{D_{12}} \cdot \pi_\infty^{-2m+v_\infty(D_{12})+2\deg(g)+1} & \frac{a}{g} \\ 0 & \pi_\infty^{-2m+v_\infty(D_{12})+2\deg(g)+1} & \frac{d}{g} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R.$$

3. *Für*

   - $v_\infty(gu + h\pi_\infty^n) < v_\infty(g\pi_\infty^m)$,
   - $v_\infty(gu + h\pi_\infty^n) \leq v_\infty(gv + hw + i)$,
   - $v_\infty(D_{13}) \leq v_\infty(D_{11})$

   erhält man

$$\begin{pmatrix} a\pi_\infty^m & au + b\pi_\infty^n & av + bw + c \\ d\pi_\infty^m & du + e\pi_\infty^n & dv + ew + f \\ g\pi_\infty^m & gu + h\pi_\infty^n & gv + hw + i \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} \frac{D_{23}}{D_{13}} \cdot \pi_\infty^{v_\infty(D_{13})-2v_\infty(gu+h\pi_\infty^n)} & \frac{au+b\pi_\infty^n}{gu+h\pi_\infty^n} & \pi_\infty^{m+n-v_\infty(D_{13})-v_\infty(gu+h\pi_\infty^n)} \\ \pi_\infty^{v_\infty(D_{13})-2v_\infty(gu+h\pi_\infty^n)} & \frac{du+e\pi_\infty^n}{gu+h\pi_\infty^n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+n-v_\infty(D_{13})-v_\infty(gu+h\pi_\infty^n)+1} & \frac{D_{23}}{D_{13}} \cdot \pi_\infty^{v_\infty(D_{13})-2v_\infty(gu+h\pi_\infty^n)} & \frac{au+b\pi_\infty^n}{gu+h\pi_\infty^n} \\ 0 & \pi_\infty^{v_\infty(D_{13})-2v_\infty(gu+h\pi_\infty^n)} & \frac{du+e\pi_\infty^n}{gu+h\pi_\infty^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R^2.$$

4. *Für*

   - $v_\infty(gv + hw + i) < v_\infty(g\pi_\infty^m)$,
   - $v_\infty(gv + hw + i) < v_\infty(gu + h\pi_\infty^n)$,
   - $v_\infty(D_{12}) \leq v_\infty(D_{11})$

   erhält man

$$\begin{pmatrix} a\pi_\infty^m & au + b\pi_\infty^n & av + bw + c \\ d\pi_\infty^m & du + e\pi_\infty^n & dv + ew + f \\ g\pi_\infty^m & gu + h\pi_\infty^n & gv + hw + i \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} \frac{D_{22}}{D_{12}} \cdot \pi_\infty^{v_\infty(D_{12})-2v_\infty(gv+hw+i)} & \pi_\infty^{n+m-v_\infty(D_{12})-v_\infty(gv+hw+i)} & \frac{av+bw+c}{gv+hw+i} \\ \pi_\infty^{v_\infty(D_{12})-2v_\infty(gv+hw+i)} & 0 & \frac{dv+ew+f}{gv+hw+i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{n+m-v_\infty(D_{12})-v_\infty(gv+hw+i)+1} & \frac{D_{22}}{D_{12}} \cdot \pi_\infty^{v_\infty(D_{12})-2v_\infty(gv+hw+i)} & \frac{av+bw+c}{gv+hw+i} \\ 0 & \pi_\infty^{v_\infty(D_{12})-2v_\infty(gv+hw+i)} & \frac{dv+ew+f}{gv+hw+i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q.$$

5. *Für*

   - $v_\infty(g\pi_\infty^m) \leq v_\infty(gu + h\pi_\infty^n)$,
   - $v_\infty(g\pi_\infty^m) \leq v_\infty(gv + hw + i)$,
   - $v_\infty(D_{13}) \leq v_\infty(D_{12})$

erhält man

$$\begin{pmatrix} a\pi_\infty^m & au+b\pi_\infty^n & av+bw+c \\ d\pi_\infty^m & du+e\pi_\infty^n & dv+ew+f \\ g\pi_\infty^m & gu+h\pi_\infty^n & gv+hw+i \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{g} & \frac{D_{23}}{D_{13}} \cdot \pi_\infty^{-2m+v_\infty(D_{13})+2\deg(g)} & \pi_\infty^{n-v_\infty(D_{13})+\deg(g)} \\ \frac{d}{g} & \pi_\infty^{-2m+v_\infty(D_{13})+2\deg(g)} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{n-v_\infty(D_{13})+\deg(g)+2} & \frac{D_{23}}{D_{13}} \cdot \pi_\infty^{-2m+v_\infty(D_{13})+2\deg(g)+1} & \frac{a}{g} \\ 0 & \pi_\infty^{-2m+v_\infty(D_{13})+2\deg(g)+1} & \frac{d}{g} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} QR.$$

6. *Für*

- $v_\infty(gu+h\pi_\infty^n) < v_\infty(g\pi_\infty^m)$,
- $v_\infty(gu+h\pi_\infty^n) \leq v_\infty(gv+hw+i)$,
- $v_\infty(D_{11}) < v_\infty(D_{13})$

erhält man

$$\begin{pmatrix} a\pi_\infty^m & au+b\pi_\infty^n & av+bw+c \\ d\pi_\infty^m & du+e\pi_\infty^n & dv+ew+f \\ g\pi_\infty^m & gu+h\pi_\infty^n & gv+hw+i \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+n-v_\infty(D_{11})-v_\infty(gu+h\pi_\infty^n)} & \frac{au+b\pi_\infty^n}{gu+h\pi_\infty^n} & \frac{D_{21}}{D_{11}} \cdot \pi_\infty^{v_\infty(D_{11})-2v_\infty(gu+h\pi_\infty^n)} \\ 0 & \frac{du+e\pi_\infty^n}{gu+h\pi_\infty^n} & \pi_\infty^{v_\infty(D_{11})-2v_\infty(gu+h\pi_\infty^n)} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+n-v_\infty(D_{11})-v_\infty(gu+h\pi_\infty^n)+1} & \frac{D_{21}}{D_{11}} \cdot \pi_\infty^{v_\infty(D_{11})-2v_\infty(gu+h\pi_\infty^n)+1} & \frac{au+b\pi_\infty^n}{gu+h\pi_\infty^n} \\ 0 & \pi_\infty^{v_\infty(D_{11})-2v_\infty(gu+h\pi_\infty^n)+1} & \frac{du+e\pi_\infty^n}{gu+h\pi_\infty^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} QR^2.$$

Beweis Man erhält die angegebenen Resultate durch Rechnungen analog zum Beweis von Satz 1.2.1. □

1.3 Harmonische Koketten

Die folgende Definition ist in Analogie zu [Sh], S. 15. Dort wird sie für allgemeines $t \in \mathbb{N}$ getroffen, der hier interessante Fall ist der Spezialfall $t = 2$.

Definition 1.3.1 *Eine Abbildung $\varphi \colon \hat{\mathcal{T}}_2 \to \mathbb{C}$ heißt harmonische Kokette, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:*

($\mathcal{A}$) *Sei $([L_0],[L_1],[L_2]) \in \hat{\mathcal{T}}_2$, dann gilt $\varphi(([L_0],[L_1],[L_2])) = \varphi(([L_1],[L_2],[L_0]))$.*

($\mathcal{B}$) *Sei $\sigma = ([L_0],[L_1]) \in \hat{\mathcal{T}}_1$ und sei*

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\sigma) = \{\sigma' \in \hat{\mathcal{T}}_2 \mid \sigma \leq \sigma',\ \sigma \text{ und } \sigma' \text{ haben denselben Anfangspunkt }\},$$

dann ist

$$\sum_{\sigma' \in \mathfrak{B}} \varphi(\sigma') = 0.$$

Es soll nun untersucht werden, welche äquivalenten Bedingungen sich ergeben, wenn man die unter Benutzung der 1-zu-1-Korrespondenz $\hat{\mathcal{T}}_2 \leftrightarrow G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ zu φ korrespondierende Funktion $f\colon G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \to \mathbb{C}$ betrachtet.

Aus Bedingung $(\mathcal{A})$ folgt unmittelbar, daß φ invariant ist unter zyklischer Vertauschung der Anfangspunkte eines 2-Simplex und man daher φ als Funktion auf den unorientierten 2-Simplizes $\mathcal{T}_2$ anstatt auf $\hat{\mathcal{T}}_2$ ansehen kann.
Ist $g \in G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ die zum orientierten 2-Simplex $([L_0],[L_1],[L_2])$ korrespondierende Matrix, so korrespondiert gR zu $([L_1],[L_2],[L_0])$, d. h. Rechtsmultiplikation mit R entspricht dem zyklischen Vertauschen der Anfangspunkte des zugehörigen 2-Simplex. Somit ist f invariant unter Rechtsmultiplikation des Arguments mit R und kann als Funktion $f\colon G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^* \to \mathbb{C}$ angesehen werden.

Damit reduziert sich die Bedingung $(\mathcal{B})$ auf

$(\mathcal{B}')$ Sei $\sigma = \{[L_0],[L_1]\} \in \mathcal{T}_1$ und sei $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'(\sigma) = \{\sigma' \in \mathcal{T}_2 \mid \sigma \leq \sigma'\ \}$, dann ist

$$\sum_{\sigma' \in \mathfrak{B}'} \varphi(\sigma') = 0,$$

d. h. die Summe der Funktionswerte aller 2-Simplizes, die eine gemeinsame Kante besitzen, muß 0 sein.
Betrachtet man f anstelle von φ, wie kann man dann die Bedingung $(\mathcal{B}')$ ausdrücken?
Sei dazu $\sigma = \{[L_0],[L_1]\} \in \mathcal{T}_1$ eine Kante, dann findet man Vertretergitter L_0, L_1 mit

$$L_0/L_1 \cong (O_\infty/\pi_\infty O_\infty)^\alpha \text{ für ein } \alpha \in \{1,2\}.$$

Falls $\alpha = 2$, so ist $L_1/\pi_\infty L_0 \cong O_\infty/\pi_\infty O_\infty$. Wegen $\sigma = \{[L_0],[L_1]\} = \{[\pi_\infty L_0],[L_1]\}$ kann man daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha = 1$ annehmen. Dann existiert eine geordnete Basis (b_1,b_2,b_3) von L_0, so daß $L_1 = \langle b_1,b_2,\pi_\infty b_3\rangle_{O_\infty}$. Um alle 2-Simplizes mit Kante σ anzugeben, muß man alle Gitter L_2 mit $L_0 \supsetneq L_1 \supsetneq L_2 \supsetneq \pi_\infty L_0$ bestimmen.
Da $L_2 := \langle c_1,c_2,c_3\rangle_{O_\infty}$ ein Untergitter von L_1 ist mit $L_1/L_2 \cong O_\infty/\pi_\infty O_\infty$, existiert nach dem Elementarteilersatz eine obere Dreiecksmatrix g mit Einträgen in O_∞ und $\det(g) = \pi_\infty$, so daß $L_1 g = L_2$, also $(b_1,b_2,\pi_\infty b_3)g = (c_1,c_2,c_3)$. Die Matrix g ist außerdem nur modulo $G(O_\infty)$ bestimmt, da Rechtsmultiplikation von $(b_1,b_2,\pi_\infty b_3)g = (c_1,c_2,c_3)$ mit einer Matrix aus $G(O_\infty)$ nur einen Basiswechsel im O_∞-Gitter L_2 bewirkt. Deswegen kann man

$$g \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \varepsilon \in \mathbb{F}_q \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\infty & \varepsilon & \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \varepsilon, \delta \in \mathbb{F}_q \right\}$$

annehmen.
Weiterhin hat man die Bedingung, daß $\pi_\infty L_0 = \langle \pi_\infty b_1, \pi_\infty b_2, \pi_\infty b_3\rangle_{O_\infty}$ ein Untergitter von L_2 sein soll. Da

$$(b_1,b_2,\pi_\infty b_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty \end{pmatrix} = (b_1,b_2,\pi_\infty^2 b_3)$$

und

$$\pi_\infty b_3 \notin \langle b_1,b_2,\pi_\infty^2 b_3\rangle_{O_\infty},$$

kommt die erste Matrix nicht in Betracht. Für die Matrizen mit π_∞ an zweiter Stelle der Hauptdiagonalen ergibt sich

$$(b_1, b_2, \pi_\infty b_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (b_1, \pi_\infty b_2, \varepsilon b_2 + \pi_\infty b_3).$$

Die Vektoren $\pi_\infty b_1$ und $\pi_\infty b_2$ sind offensichtlich im Erzeugnis enthalten. Gilt dies auch für $\pi_\infty b_3$? Angenommen, $\pi_\infty b_3$ ist eine O_∞-Linearkombination von $b_1, \pi_\infty b_2$ und $\varepsilon b_2 + \pi_\infty b_3$, dann gibt es α, β und $\gamma \in O_\infty$, so daß

$$\alpha b_1 + \beta\pi_\infty b_2 + \gamma(\varepsilon b_2 + \pi_\infty b_3) = \pi_\infty b_3 \quad \text{bzw.} \quad \alpha b_1 + (\beta\pi_\infty + \gamma\varepsilon) b_2 + \gamma\pi_\infty b_3 = \pi_\infty b_3,$$

woraus

$$\alpha = 0,\ \beta\pi_\infty + \gamma\varepsilon = 0,\ \gamma = 1$$

folgt. Die Beziehung $\beta\pi_\infty + \varepsilon = 0$ kann wegen $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$ und $\beta \in O_\infty$ nur für $\varepsilon = \beta = 0$ erfüllt werden.
Schließlich ist

$$(b_1, b_2, \pi_\infty b_3) \begin{pmatrix} \pi_\infty & \varepsilon & \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\pi_\infty b_1, \varepsilon b_1 + b_2, \delta b_1 + \pi_\infty b_3).$$

Offensichtlich ist $\pi_\infty b_1$ im Erzeugnis enthalten. Weiterhin gilt für α, β, $\gamma \in O_\infty$, daß

$$\alpha\pi_\infty b_1 + \beta(\varepsilon b_1 + b_2) + \gamma(\delta b_1 + \pi_\infty b_3) = \pi_\infty b_3 \quad \text{bzw.} \quad (\alpha\pi_\infty + \beta\varepsilon + \gamma\delta) b_1 + \beta b_2 + \gamma\pi_\infty b_3 = \pi_\infty b_3,$$

woraus

$$\gamma = 1,\ \beta = 0,\ \alpha\pi_\infty + \delta = 0$$

folgt. Wegen $\alpha \in O_\infty$ und $\delta \in \mathbb{F}_q$ muß also $\delta = \alpha = 0$ sein. Unter Benutzung der Beziehung $\delta = 0$ ist außerdem

$$\alpha\pi_\infty b_1 + \beta(\varepsilon b_1 + b_2) + \gamma(\delta b_1 + \pi_\infty b_3) = \pi_\infty b_2 \quad \text{bzw.} \quad (\alpha\pi_\infty + \beta\varepsilon) b_1 + \beta b_2 + \gamma\pi_\infty b_3 = \pi_\infty b_2,$$

d. h.

$$\gamma = 0,\ \beta = \pi_\infty,\ \alpha = -\varepsilon.$$

Es gilt also $\pi_\infty L_0 \subsetneq (b_1, b_2, \pi_\infty b_3) \begin{pmatrix} \pi_\infty & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$.
Man erhält also, daß Rechtsmultiplikation von L_1 mit

$$g \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\infty & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \varepsilon \in \mathbb{F}_q \right\}$$

zu einem Gitter L_2 führt, welches der Bedingung $L_0 \supsetneq L_1 \supsetneq L_2 \supsetneq \pi_\infty L_0$ genügt, und man erkennt unschwer, daß die resultierenden $q+1$ Untergitter untereinander nicht gleich sind.
Es existieren also zu gegebener Kante $k = \{L_0,\ L_1\}$ genau $q+1$ verschiedene 2-Simplizes, welche alle die Kante k enthalten.

Hat man nun zu gegebener Kante $\{[L_0] = [\langle b_1, b_2, b_3\rangle_{O_\infty}], [L_1] = [\langle b_1, b_2, \pi_\infty b_3\rangle_{O_\infty}]\}$ einen 2-Simplex $s = \{[L_0], [L_1], [L_2]\}$ gefunden, was ist dann sein Repräsentant in $G(K_\infty)/\Gamma K_\infty^*$? Es wird s repräsentiert durch die Klasse der Matrix $g \in G(K_\infty)$, für welche

$$gC_2 = \{gC_{00},\ gC_{01},\ gC_{02}\} = \{[L_0],\ [L_1],\ [L_2]\}$$

gilt. Ist $L_2 = \langle b_1, \pi_\infty b_2, \pi_\infty b_3\rangle_{O_\infty}$, so kann man offensichtlich $g = (b_1, b_2, b_3)$ wählen.
Wenn $L_2 = \langle \pi_\infty b_1, \varepsilon b_1 + b_2, \pi_\infty b_3\rangle_{O_\infty}$, so kann man $g = (c_1, c_2, c_3) := (\varepsilon b_1 + b_2, b_1, b_3)$ wählen, denn aus

$$(b_1, b_2, b_3)\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in G(O_\infty)} = (b_1, b_2, b_3)X_\varepsilon = (c_1, c_2, c_3)$$

und

$$(b_1, b_2, \pi_\infty b_3)\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in G(O_\infty)} = (b_1, b_2, \pi_\infty b_3)X_\varepsilon = (c_1, c_2, \pi_\infty c_3)$$

ersieht man, daß (c_1, c_2, c_3) bzw. $(c_1, c_2, \pi_\infty c_3)$ Basen von L_0 respektive L_1 sind, da Rechtsmultiplikation mit einer Matrix aus $G(O_\infty)$ nur einem Basiswechsel des O_∞-Gitters entspricht.
Die Menge der 2-Simplizes mit Kante $k = \{[\langle b_1, b_2, b_3\rangle_{O_\infty}], [\langle b_1, b_2, \pi_\infty b_3\rangle_{O_\infty}]\}$ ist also gegeben durch

$$\{\, (b_1, b_2, b_3)X_\varepsilon \Gamma_\infty \langle R\rangle K_\infty^* \,|\, \varepsilon \in \mathbb{F}_q\} \cup \{(b_1, b_2, b_3)\Gamma_\infty \langle R\rangle K_\infty^*\}\,.$$

Zusammenfassend erhält man

($\mathcal{B}''$) Sei $k = \{[L], [L']\}$ eine Kante mit Repräsentant $g \in G(K_\infty)/P_1 K_\infty^*$, dann gilt für die Nebenklasse $g \in G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$

$$f(g) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f\left(gX_\varepsilon\right) = 0.$$

Wie in Satz 1.2.2 erwähnt, ist ein vollständiges Repräsentantensystem der Kanten gegeben durch

$$\left\{\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,|\, m, n \in \mathbb{Z}, u, v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty, w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty\right\} \dot\cup$$
$$\left\{\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & v & u \\ 0 & w & \pi_\infty^n \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \,|\, m, n \in \mathbb{Z}, u, v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty, w \in K_\infty/\pi_\infty^{n+1} O_\infty\right\} \dot\cup$$
$$\left\{\begin{pmatrix} u & v & \pi_\infty^m \\ \pi_\infty^n & w & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \,|\, m, n \in \mathbb{Z}, u, v \in K_\infty/\pi_\infty^{m+1} O_\infty, w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty\right\}.$$

Konkret ergeben sich somit für f folgende Harmonizitätsbedingungen:

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix} \varepsilon\pi_\infty^m + u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 0, \\
f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & v & u \\ 0 & w & \pi_\infty^n \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix} \varepsilon\pi_\infty^m + v & \pi_\infty^m & u \\ w & 0 & \pi_\infty^n \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= 0, \\
f\left(\begin{pmatrix} u & v & \pi_\infty^m \\ \pi_\infty^n & w & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix} \varepsilon u + v & u & \pi_\infty^m \\ \varepsilon\pi_\infty^n + w & \pi_\infty^n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= 0,
\end{aligned}$$

jeweils mit den entsprechenden Werten für m, n, u, v, w.
Unter Benutzung der Invarianz von f unter Rechtsmultiplikation des Argumentes mit der Matrix R motiviert dies die folgende

Definition 1.3.2 *Eine Funktion $f : G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^* \to \mathbb{C}$ heißt harmonische Kokette, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix}\varepsilon\pi_\infty^m+u & \pi_\infty^m & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=0, \tag{\textbf{HB1}}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^m & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u & \varepsilon\pi_\infty^m+v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=0, \tag{\textbf{HB2}}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix}u\pi_\infty & \pi_\infty^m & \varepsilon u+v\\ \pi_\infty^{n+1} & 0 & \varepsilon\pi_\infty^n+w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=0. \tag{\textbf{HB3}}$$

Oft wird auch die folgende Notation der Harmonizitätsbedingungen benutzt werden.

Bemerkung 1.3.3 *Die obigen Harmonizitätsbedingungen lassen sich schreiben als*

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X_\varepsilon\right)=0, \tag{\textbf{HB1}}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^m & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^m & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Z_\varepsilon\right)=0, \tag{\textbf{HB2}}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Z_\varepsilon\right)=0. \tag{\textbf{HB3}}$$

1.4 Repräsentantensystem von $\Gamma_\Delta\backslash\Gamma_0^{(1)}(N)$

In der Definition gewisser später auftauchender Funktionen wird von einer Summation über den Quotienten $\Gamma_\Delta\backslash\Gamma_0^{(1)}(N)$ Gebrauch gemacht. Daher soll nun ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma_\Delta\backslash\Gamma_0^{(1)}(N)$ berechnet werden.

Zunächst soll untersucht werden, wann zwei Matrizen aus $\Gamma_0^{(1)}(N)$ in $\Gamma_\Delta\backslash\Gamma_0^{(1)}(N)$ äquivalent sind.

Satz 1.4.1 *Für zwei Matrizen $A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$, $\tilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c}\\ \tilde{d} & \tilde{e} & \tilde{f}\\ \tilde{g} & \tilde{h} & \tilde{i}\end{pmatrix}\in\Gamma_0^{(1)}(N)$ gilt $\tilde{A}\in\Gamma_\Delta A$ genau dann, wenn*

$$\begin{pmatrix}\tilde{d} & \tilde{e} & \tilde{f}\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}d & e & f\end{pmatrix}+\mathbb{F}_q[T]\cdot\begin{pmatrix}g & h & i\end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{g} & \tilde{h} & \tilde{i}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}g & h & i\end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Beweis Seien $z \in \mathbb{F}_q[T]$ und $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ d+zg & e+zh & f+zi \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(1)}(N)$, dann ist $\det(A) = \det(\tilde{A}) = 1$ und daher

$$\tilde{A}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}(ch-bi)+\tilde{b}(ai-cg)+\tilde{c}(bg-ah) & \tilde{a}(bf-ce)+\tilde{b}(cd-af)+\tilde{c}(ae-bd) \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\Delta,$$

also $\tilde{A} \in \Gamma_\Delta A$.

Seien nun $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(1)}(N)$ und $\tilde{A} \in \Gamma_\Delta A$, dann gibt es ein $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\Delta$ mit $\tilde{A} = \gamma A$, also ist $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a+xd+yg & b+xe+yh & c+xf+yi \\ d+zg & e+zh & f+zi \\ g & h & i \end{pmatrix}$, d. h. (1.1) und (1.2) sind erfüllt.

□

Korollar 1.4.2 *Seien*

$$\mathcal{R} := \left\{ \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{F}_q[T]) \,\middle|\, d,g,h \in N\mathbb{F}_q[T],\ \mathrm{ggT}\left(\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \right) = 1 \right\}$$

und

$$\Gamma'_\Delta := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{F}_q[T] \right\}.$$

Die Abbildung

$$\varphi\colon \Gamma_\Delta \backslash \Gamma_0^{(1)}(N) \to \Gamma'_\Delta \backslash \mathcal{R},\ \ \Gamma_\Delta \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mapsto \Gamma'_\Delta \cdot \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

ist eine Bijektion.

Um ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma_\Delta \backslash \Gamma_0^{(1)}(N)$ zu bestimmen, genügt es daher, ein vollständiges Repräsentantensystem für $\Gamma'_\Delta \backslash \mathcal{R}$ anzugeben. Das Ziel ist es, die Äquivalenzklassen $\Gamma'_\Delta \cdot \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $g, h, i \in \mathbb{F}_q[T]$ zu parametrisieren. Offensichtlich ist hierfür $N \mid g$, $N \mid h$ und $\mathrm{ggT}(g,h,i) = 1$ notwendig.
Seien daher $g, h \in N\mathbb{F}_q[T]$ mit

$$\mathrm{ggT}(g,h) =: \mathfrak{a} \tag{1.3}$$

und $x_0, y_0 \in \mathbb{F}_q[T]$ mit

$$gx_0 - hy_0 = \mathfrak{a}. \tag{1.4}$$

Weiterhin seien $i \in \mathbb{F}_q[T]$ mit

$$\mathrm{ggT}(g,h,i) = 1 \tag{1.5}$$

und $A, B \in \mathbb{F}_q[T]$ so gewählt, daß

$$A\mathfrak{a} + Bi = Ax_0g - Ay_0h + Bi = 1. \tag{1.6}$$

Definiert man zu $d,e,f \in \mathbb{F}_q[T]$ die Unterdeterminanten

$$x := \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix},\ y := \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix},\ z := \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix},$$

so gilt

$$gx - hy + iz = \det\left(\begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Um alle möglichen Unterdeterminanten aufzufinden, sollen daher zunächst alle Lösungen der Gleichung

$$gx - hy + iz = 0 \tag{1.7}$$

bestimmt werden. Eine Basis des Lösungsraums erhält man wie folgt:
Sei zunächst $(g,h) \neq (0,0)$, also $\mathfrak{a} \neq 0$ angenommen.
Ist $z = 0$, so ist (1.7) äquivalent zu $gx - hy = 0$ bzw. $\frac{g}{\mathfrak{a}}x = \frac{h}{\mathfrak{a}}y$. Da $\frac{g}{\mathfrak{a}}$ und $\frac{h}{\mathfrak{a}}$ teilerfremd sind, folgt $\frac{g}{\mathfrak{a}} \mid y$. Ein solches y mit minimalem Grad ist $\frac{g}{\mathfrak{a}}$, und man erhält $x = \frac{h}{\mathfrak{a}}$. Der erste Basisvektor des Lösungsraums ist daher

$$v = \left(\frac{h}{\mathfrak{a}}, \frac{g}{\mathfrak{a}}, 0\right).$$

Für $z \neq 0$ kann man Gleichung (1.7) umformen zu $\mathfrak{a}\left(\frac{g}{\mathfrak{a}}x - \frac{h}{\mathfrak{a}}y\right) = -iz$ und $\mathfrak{a} \mid z$ folgern, da i und $\mathfrak{a}$ wegen (1.3) und (1.5) teilerfremd sind. Ein solches z mit minimalem Grad ist $z = -\mathfrak{a}$, und Einsetzen führt auf $i = \frac{g}{\mathfrak{a}}x - \frac{h}{\mathfrak{a}}y$. Wegen (1.4) kann man $x = ix_0$ und $y = iy_0$ wählen und erhält als zweiten Basisvektor

$$w = (ix_0, iy_0, -\mathfrak{a}).$$

Damit ist

$$\{\alpha v + \beta w \mid\ \alpha,\beta \in \mathbb{F}_q[T]\} = \left\{\left(\alpha\frac{h}{\mathfrak{a}} + \beta i x_0, \alpha\frac{g}{\mathfrak{a}} + \beta i y_0, -\beta\mathfrak{a}\right) \middle|\ \alpha,\beta \in \mathbb{F}_q[T]\right\} \tag{1.8}$$

der Lösungsraum der Gleichung $gx - hy + iz = 0$. Damit x,y,z als Unterdeterminanten einer Matrix aus $\mathcal{R}$ in Frage kommen, muß $\mathrm{ggT}(x,y,z) = 1$ gelten, d. h. es sind nur solche Lösungen $\alpha v + \beta w$ relevant, deren Koordinaten teilerfremd sind. Hierfür ist die Teilerfremdheit von α und β offensichtlich notwendig. Sie ist aber auch hinreichend: Sei $\mathrm{ggT}(\alpha,\beta) = 1$, dann existieren $k,l \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $k\alpha + l\beta = 1$. Mit x_0, y_0 aus (1.4) und A, B aus (1.6) erhält man

$$\left(-ky_0 + Bl\frac{g}{\mathfrak{a}}\right)\left(\alpha\frac{h}{\mathfrak{a}} + \beta i x_0\right) + \left(kx_0 - Bl\frac{h}{\mathfrak{a}}\right)\left(\alpha\frac{g}{\mathfrak{a}} + \beta i y_0\right) + (-Al)(-\beta\mathfrak{a}) =$$

$$(k\alpha + Bl\beta i)\underbrace{\left(\frac{g}{\mathfrak{a}}x_0 - \frac{h}{\mathfrak{a}}y_0\right)}_{=1} + Al\beta\mathfrak{a} = k\alpha + l\beta\underbrace{(A\mathfrak{a} + Bi)}_{=1} = 1,$$

weshalb die Koordinaten von $\alpha v + \beta w$ teilerfremd sein müssen.
Zu einer festen Lösung $(x,y,z) = \alpha v + \beta w = \left(\alpha\frac{h}{\mathfrak{a}} + \beta i x_0, \alpha\frac{g}{\mathfrak{a}} + \beta i y_0, -\beta\mathfrak{a}\right)$ mit teilerfremden α,β berechnen sich alle zugehörigen d,e,f so daß

$$x = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix},\ y = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix},\ z = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

wie folgt:
Es soll $z = -\beta\mathfrak{a} = dh - eg$, also $\beta = e\frac{g}{\mathfrak{a}} - d\frac{h}{\mathfrak{a}}$ gelten. Wegen (1.4) ist $\beta = \beta\left(x_0\frac{g}{\mathfrak{a}} - y_0\frac{h}{\mathfrak{a}}\right)$ und es ergibt sich

$$(\beta x_0 - e)\frac{g}{\mathfrak{a}} = (\beta y_0 - d)\frac{h}{\mathfrak{a}}.$$

Wegen $\mathrm{ggT}(\frac{g}{\mathfrak{a}}, \frac{h}{\mathfrak{a}}) = 1$ gilt $\frac{g}{\mathfrak{a}} \mid (\beta y_0 - d)$, d. h. es existiert ein $k \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\beta y_0 - d = k\frac{g}{\mathfrak{a}}$, und für $g \neq 0$ folgt $\beta x_0 - e = k\frac{h}{\mathfrak{a}}$. Für $g = 0$ erhält man dasselbe Ergebnis, indem man die Rechnung mit $\frac{h}{\mathfrak{a}} \mid (\beta x_0 - e)$ beginnt, denn nach Voraussetzung verschwinden nicht sowohl g als auch h. Es ergibt sich also

$$d = \beta y_0 - k\frac{g}{\mathfrak{a}}, \quad e = \beta x_0 - k\frac{h}{\mathfrak{a}} \quad \text{mit } k \in \mathbb{F}_q[T].$$

Durch Einsetzen in

$$y = di - fg = \alpha\frac{g}{\mathfrak{a}} + \beta i y_0$$

ergibt sich

$$\left(\beta y_0 - k\frac{g}{\mathfrak{a}}\right) i - fg = \alpha\frac{g}{\mathfrak{a}} + \beta i y_0,$$

d. h.

$$f = -\frac{1}{\mathfrak{a}}(\alpha + ik)$$

falls $g \neq 0$. Für $g = 0$ setzt man analog in die Gleichung

$$x = ei - fh = \alpha\frac{h}{\mathfrak{a}} + \beta i x_0$$

ein und kommt zum selben Ergebnis. Aufgrund von $f \in \mathbb{F}_q[T]$ erhält man also die Bedingung $\alpha + ik \;\in\; \mathfrak{a}\;\mathbb{F}_q[T]$. In jedem Falle rechnet man nach, daß die so gefundenen d, e, f die letzte verbleibende Gleichung für x bzw. y erfüllen. Zusammenfassend erhält man

$$(d, e, f) = \left(\beta y_0 - k\frac{g}{\mathfrak{a}}, \beta x_0 - k\frac{h}{\mathfrak{a}}, -\frac{1}{\mathfrak{a}}(\alpha + ik)\right) \text{ für } \alpha + ik \in \mathfrak{a}\mathbb{F}_q[T].$$

Tatsächlich fallen die verschiedenen Möglichkeiten für d, e, f aber in $\Gamma'_\Delta\backslash\mathcal{R}$ alle zusammen, da dort der Vektor $(d,\ e,\ f)$ nur modulo $(g,\ h,\ i)$ bestimmt ist. Dies rechnet man wie folgt nach: Seien $k, l \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\alpha + ik \in \mathfrak{a}\mathbb{F}_q[T]$, $\alpha + il \in \mathfrak{a}\mathbb{F}_q[T]$, dann liegt auch die Differenz $i(k - l)$ in $\mathfrak{a}\mathbb{F}_q[T]$ und wegen $\mathrm{ggT}(i, \mathfrak{a}) = 1$ ist dies äquivalent zu $k - l \in \mathfrak{a}\mathbb{F}_q[T]$. Andererseits gilt

$$\left(\beta y_0 - k\frac{g}{\mathfrak{a}}, \beta x_0 - k\frac{h}{\mathfrak{a}}, -\frac{\alpha + ik}{\mathfrak{a}}\right) \in \left(\beta y_0 - l\frac{g}{\mathfrak{a}}, \beta x_0 - l\frac{h}{\mathfrak{a}}, -\frac{\alpha + il}{\mathfrak{a}}\right) + \mathbb{F}_q[T] \cdot (g, h, i)$$

genau dann, wenn

$$\left((k - l)\frac{g}{\mathfrak{a}}, (k - l)\frac{h}{\mathfrak{a}}, (k - l)\frac{i}{\mathfrak{a}}\right) \in \mathbb{F}_q[T] \cdot (g, h, i),$$

was wegen $\mathrm{ggT}(\mathfrak{a}, i) = 1$ genau dann der Fall ist, wenn $k - l \in \mathfrak{a}\mathbb{F}_q[T]$. Wählt man beispielsweise $k = -B\alpha$, was wegen $\alpha + ik = \alpha(1 - iB) = \alpha A\mathfrak{a}$ (vgl. (1.6)) zulässig ist, so erhält man den Vertreter

$$(d, e, f) = \left(\beta y_0 + B\alpha\frac{g}{\mathfrak{a}}, \beta x_0 + B\alpha\frac{h}{\mathfrak{a}}, -\alpha A\right). \tag{1.9}$$

Es bleibt noch der Fall $(g, h) = (0, 0)$ bzw. $\mathfrak{a} = 0$ zu betrachten.
Wegen (1.5) muß dann $i \in \mathbb{F}_q^*$ gelten, und für die Unterdeterminanten ergibt sich

$$\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} = di, \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = ei.$$

Da die Unterdeterminanten teilerfremd sein sollen, erhält man die Bedingung $\mathrm{ggT}(di, ei) = 1$ und hieraus, wegen $i \in \mathbb{F}_q^*$, $\mathrm{ggT}(d, e) = 1$. Für f gibt es keine einschränkenden Bedingungen. Zwei Matrizen $\begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d' & e' & f' \\ 0 & 0 & i' \end{pmatrix}$ sind genau dann äquivalent in $\Gamma'_\Delta\mathcal{R}$, wenn es ein $z \in \mathbb{F}_q[T]$ gibt mit $\begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d' & e' & f' \\ 0 & 0 & i' \end{pmatrix}$, also wenn $d = d'$, $e = e'$, $i = i'$ und $f = f' + iz$. Hieraus sieht man, daß ein vollständiges Repräsentantensystem für diese Art von Matrizen gegeben ist durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \middle| \, d, e \in \mathbb{F}_q[T],\ i \in \mathbb{F}_q^*,\ \mathrm{ggT}(d, e) = 1 \right\}.$$

Setzt man hier

$$\frac{g}{\mathfrak{a}} := 1,\ \frac{h}{\mathfrak{a}} := 0,\ x_0 := 1,\ y_0 := 0,\ A := 0$$

(und $B = i^{-1}$ wegen $A\mathfrak{a} + Bi = 1$), so läßt sich $\{(d, e, 0) \mid d,\ e \in \mathbb{F}_q[T],\ \mathrm{ggT}(d, e) = 1\}$ in der Form von (1.9) und die Menge der möglichen Unterdeterminanten

$$x = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix},\ y = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix},\ z = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

in der Form von (1.8) mit teilerfremden α, β schreiben, so daß man beide Fälle auf einen zurückführen kann.

Bei den gefundenen Lösungen für (d, e, f) gilt in beiden Fällen, daß nicht notwendigerweise die Bedingung $N \mid d$ für die Matrizen aus $\mathcal{R}$ erfüllt ist. Dies muß man noch zusätzlich fordern. Es gilt somit

$$\Gamma'_\Delta\backslash\mathcal{R} =$$
$$\Gamma'_\Delta \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \beta y_0 + B\alpha\frac{g}{\mathfrak{a}} & \beta x_0 + B\alpha\frac{h}{\mathfrak{a}} & -\alpha A \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{F}_q[T]) \,\middle|\, \begin{array}{l} g, h \in N\mathbb{F}_q[T], \\ i, \alpha, \beta, A, B, x_0, y_0 \in \mathbb{F}_q[T], \\ \mathrm{ggT}(g, h) = \mathfrak{a},\ \mathrm{ggT}(g, h, i) = 1, \\ x_0 g - y_0 h = \mathfrak{a},\ A\mathfrak{a} + Bi = 1, \\ \mathrm{ggT}(\alpha, \beta) = 1, N \mid (\beta y_0 + B\alpha\frac{g}{\mathfrak{a}}) \end{array} \right\}.$$

Kapitel 2

$\Gamma_0(N)$-invariante harmonische Koketten

In diesem Kapitel sei $f\colon G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^* \to \mathbb{C}$ eine $\Gamma_0(N)$-invariante harmonische Kokette*, so daß man f in naheliegender Weise als Funktion auf $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ auffassen kann. In den Abschnitten 2.1 und 2.2 sei zusätzlich vorausgesetzt, daß f endlichen Träger modulo $\Gamma_0(N)$ besitzt, d. h. daß $f(\overline{X}) = 0$ für fast alle $\overline{X} \in \Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ gilt.

2.1 Aussagen über endliche Träger harmonischer Koketten

Die zwei zentralen Aussagen betreffend den Träger von f, die den Kern des Unterkapitels bilden, sind Satz 2.1.5 und Satz 2.1.23, nämlich daß

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \text{ für } m \leq 1,$$
$$f\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \text{ für } m \leq 0$$

sowie

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \text{ für } n \leq -m - 6\deg(N) + 4 \text{ oder } n \geq 2m + 3\deg(N) - 2,$$
$$f\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \text{ für } n \leq -m - 6\deg(N) + 3 \text{ oder } n \geq 2m + 3\deg(N).$$

Der Beweis dieser Aussagen benötigt jeweils einiges an technischer Vorarbeit.

*In einigen Beweisen wird der Buchstabe f als Eintrag einer Matrix aus z. B. $\Gamma_0(N)$ verwendet werden. Die Bedeutung von f wird aber immer aus dem Kontext ersichtlich sein.

Lemma 2.1.1 *Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq 0$, $n \geq m$ sowie $y \in K_\infty$, dann sind die Matrizen*

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\mathfrak{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

genau dann äquivalent in $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$, wenn $m = \mathfrak{m}$.

Beweis Gelte $\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\mathfrak{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$, dann existieren $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$ und $k \in K_\infty^*$ mit

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\mathfrak{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix} k,$$

also

$$\begin{pmatrix} a\pi_\infty^m & b\pi_\infty^n & by+c \\ d\pi_\infty^m & e\pi_\infty^n & ey+f \\ g\pi_\infty^m & h\pi_\infty^n & hy+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\pi_\infty^{\mathfrak{m}} & \beta\pi_\infty^{\mathfrak{m}} & \gamma\pi_\infty^{\mathfrak{m}} \\ \delta\pi_\infty^n + \eta y & \varepsilon\pi_\infty^n + \theta y & \zeta\pi_\infty^n + \iota y \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix} k.$$

Ein Vergleich der Bewertungen der Determinante von rechter und linker Seite liefert

$$m + n = \mathfrak{m} + n + 3v_\infty(k),$$

also ist

$$m = \mathfrak{m} + 3v_\infty(k). \tag{2.1}$$

Weil $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$, müssen α, ε und ι in O_∞^* liegen, da sonst die Determinante durch π_∞ teilbar wäre. Somit ist $v_\infty(\alpha) = 0$. Aufgrund von $a\pi_\infty^m = \alpha\pi_\infty^{\mathfrak{m}}k$ muß $a \neq 0$ sein, und es gilt

$$v_\infty(a) + m = v_\infty(\alpha) + \mathfrak{m} + v_\infty(k).$$

Unter Benutzung von (2.1) folgt hieraus

$$v_\infty(a) = -2v_\infty(k), \tag{2.2}$$

und somit also $v_\infty(k) \geq 0$.
Wegen $m \leq 0$ und $g \in \mathbb{F}_q[T]$ ist $g\pi_\infty^m \in \mathbb{F}_q[T]$. Andererseits ist nach Definition von Γ_∞ und wegen $v_\infty(k) \geq 0$ aber $\eta k \in \pi_\infty O_\infty$, so daß aus $g\pi_\infty^m = \eta k$ direkt $g = \eta = 0$ folgt. Somit gilt $d\pi_\infty^m = \delta\pi_\infty^n k$ und daher

$$v_\infty(d) + m = v_\infty(\delta) + n + v_\infty(k).$$

Wäre $d \neq 0$, so müßte auch $\delta \neq 0$ sein. Da $\delta \in \pi_\infty O_\infty$ nach Definition von Γ_∞ und ferner $n \geq m$ nach Voraussetzung, folgte hieraus

$$-1 \geq \underbrace{v_\infty(d)}_{\leq 0} - \underbrace{v_\infty(\delta)}_{\geq 1} = \underbrace{n-m}_{\geq 0} + \underbrace{v_\infty(k)}_{\geq 0} \geq 0,$$

was einen Widerspruch darstellt. Also muß $d = \delta = 0$ sein.

Die Determinante von $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}$ ist gleich $a \cdot (ei - fh)$ und liegt in $\mathbb{F}_q^*$, somit ist

$$0 = v_\infty(a) + v_\infty(ei - fh),$$

woraus wegen $v_\infty(a) \leq 0$ und $v_\infty(ei - fh) \leq 0$ folgt, daß $v_\infty(a) = 0$. Aus (2.2) ergibt sich nun $v_\infty(k) = 0$ und daraus, eingesetzt in (2.1), $m = \mathfrak{m}$ wie behauptet. □

Lemma 2.1.2 *Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m, n \leq 0$, $u \in K_\infty$ und $l \in \mathbb{N}_0$. Die Matrizen*

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m-l} & u\pi_\infty^{-l} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{n-l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sind genau dann äquivalent in $\Gamma_0(N) \backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$, wenn $l = 0$.

Beweis Angenommen, $\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m-l} & u\pi_\infty^{-l} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{n-l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $\Gamma_0(N) \backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$, dann gibt es $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$ und $k \in K_\infty^*$ mit

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m-l} & u\pi_\infty^{-l} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{n-l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix} k,$$

d. h.

$$\begin{pmatrix} a\pi_\infty^m & au + b\pi_\infty^n & c \\ d\pi_\infty^m & du + e\pi_\infty^n & f \\ g\pi_\infty^m & gu + h\pi_\infty^n & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\pi_\infty^{m-l} + \delta u\pi_\infty^{-l} & \beta\pi_\infty^{m-l} + \varepsilon u\pi_\infty^{-l} & \gamma\pi_\infty^{m-l} + \zeta u\pi_\infty^{-l} \\ \delta\pi_\infty^{n-l} & \varepsilon\pi_\infty^{n-l} & \zeta\pi_\infty^{n-l} \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix} k.$$

Die Bewertung der Determinante der linken Seite ist gleich $m + n$, die der rechten Seite $m + n - 2l + 3v_\infty(k)$, woraus

$$l = \frac{3}{2} v_\infty(k) \tag{2.3}$$

folgt und daher $v_\infty(k) \geq 0$ wegen der Voraussetzung $l \geq 0$. Wegen $m \leq 0$ ist einerseits $g\pi_\infty^m \in \mathbb{F}_q[T]$, andererseits gilt aber $g\pi_\infty^m = \eta k \in \pi_\infty O_\infty$, da $\eta \in \pi_\infty O_\infty$ und $v_\infty(k) \geq 0$. Also muß $g = \eta = 0$ sein, und $gu + h\pi_\infty^n = \theta k$ vereinfacht sich zu

$$h\pi_\infty^n = \theta k.$$

Aufgrund von $h\pi_\infty^n \in \mathbb{F}_q[T]$ und $\theta k \in \pi_\infty O_\infty$ gilt daher $h = \theta = 0$.

Da die Determinante von $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ in $\mathbb{F}_q^*$ liegt, muß auch $i \in \mathbb{F}_q^*$ sein wegen $g = h = 0$.

Analog erhält man über Betrachtung der Determinante von $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$ und aus $\eta = \theta = 0$ die Bedingung $\iota \in O_\infty^*$. Ein Koeffizientenvergleich liefert $i = \iota k$ und daher

$$0 = v_\infty(i) = v_\infty(\iota k) = v_\infty(k),$$

so daß die Behauptung aus (2.3) folgt.

□

Lemma 2.1.3 *Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq m-1$, $m \leq 1$ und $u, v, w \in K_\infty$, dann ist*

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Beweis Sei $v = v_- + v_+$ mit $v_- \in \mathbb{F}_q[T]$ und $v_+ \in \pi_\infty O_\infty$, dann ist, für jedes $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$,

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$f\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon\pi_\infty^{m-1} - v_- \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in\Gamma_0(N)} \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v_- + v_+ \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\pi_\infty^{-m} v_+ \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in\Gamma_\infty}\right) =$$

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & \varepsilon\pi_\infty^{m-1} \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

und daher

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = q^{-1} \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & \varepsilon\pi_\infty^{m-1} \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

woraus sich mit der Harmonizitätsbedingung (**HB2**) die Gleichheit

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -q^{-1} f\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^{m-1} & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

ergibt. Da $n \geq m-1$, ist $\varepsilon\pi_\infty^{m-1-n} \in \mathbb{F}_q[T]$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$ und daher

$$f\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^{m-1} & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon\pi_\infty^{m-1-n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & \pi_\infty^{m-1} & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$f\left(\begin{pmatrix} u + \varepsilon\pi_\infty^{m-1} & \pi_\infty^{m-1} & w\varepsilon\pi_\infty^{m-1-n} \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Schreibt man $w\varepsilon\pi_\infty^{m-1-n}$ als $w_- + w_+$ mit $w_- \in \mathbb{F}_q[T]$ und $w_+ \in \pi_\infty O_\infty$, ergibt sich

$$f\left(\begin{pmatrix} u + \varepsilon\pi_\infty^{m-1} & \pi_\infty^{m-1} & w\varepsilon\pi_\infty^{m-1-n} \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$f\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & -w_- \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\in\Gamma_0(N)}\begin{pmatrix}u+\varepsilon\pi_\infty^{m-1} & \pi_\infty^{m-1} & w_-+w_+ \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -w_+\pi_\infty^{1-m} \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\in\Gamma_\infty}\right) =$$

$$f\left(\begin{pmatrix}u+\varepsilon\pi_\infty^{m-1} & \pi_\infty^{m-1} & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

also ist

$$f\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^{m-1} & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = q^{-1}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix}u+\varepsilon\pi_\infty^{m-1} & \pi_\infty^{m-1} & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

und mit Bedingung (**HB1**) folgt

$$-q^{-1}f\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^{m-1} & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = q^{-2}f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-1} & u & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Diese Schritte kann man nun beliebig oft wiederholen und erhält daraus

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m} & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = q^{-2k}f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-k} & u & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

für jedes $k\in\mathbb{N}$. Für jedes $k\in\mathbb{N}$ mit $m-k\le v_\infty(u)$ ist ferner

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-k} & u & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-k} & u & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -u\pi_\infty^{-m+k} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-k} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Da nach Lemma 2.1.1 die Matrizen $\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-k} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-l} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ in $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ genau dann gleich sind, wenn $k=l$, und f modulo $\Gamma_0(N)$ endlichen Träger besitzt, gibt es ein $k_0\in\mathbb{N}$ mit $k_0\ge m-v_\infty(u)$, so daß

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-k_0} & u & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-k_0} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = 0.$$

Daher ist

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m} & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = q^{-2k_0}f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-k_0} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = 0.$$

□

Lemma 2.1.4 *Für u, v, $w \in K_\infty$ und m, $n \in \mathbb{Z}$ mit m, $n \leq 1$ ist*

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Beweis Schreibt man $w = w_- + w_+$ mit $w_- \in \mathbb{F}_q[T]$, $w_+ \in \pi_\infty O_\infty$, so ist

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -w_- \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w_- + w_+ \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\pi_\infty^{-n} w_+ \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & -uw_+\pi_\infty^{-n} + v \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Mit $-uw_+\pi_\infty^{-n} + v = v_- + v_+$, $v_- \in \mathbb{F}_q[T]$, $v_+ \in \pi_\infty O_\infty$, erhält man weiterhin

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v_- + v_+ \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -v_- \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v_- + v_+ \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\pi_\infty^{-m} v_+ \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ferner kann man durch Rechtsmultiplikation mit einer Matrix aus Γ_∞ den Eintrag u modulo $\pi_\infty^m O_\infty$ reduzieren, also erreichen, daß $u \in \mathbb{F}_q[T]$. Wie zu Anfang des Beweises des vorherigen Lemmas gezeigt wurde, gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -q^{-1} f\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^{m-1} & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

für alle $m \leq 1$. Wegen $\pi_\infty^{-1} = T$ und $u \in \mathbb{F}_q[T]$ ist außerdem, für alle $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$,

$$f\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^{m-1} & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon u\pi_\infty^{-1} \\ 0 & 1 & \varepsilon\pi_\infty^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in\Gamma_0(N)}\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^{m-1} & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$f\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^{m-1} & \varepsilon u\pi_\infty^{-1} \\ \pi_\infty^n & 0 & \varepsilon\pi_\infty^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

und mit der Harmonizitätsbedingung (**HB3**) folgt

$$f\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^{m-1} & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = q^{-1}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^{m-1} & \varepsilon u\pi_\infty^{-1} \\ \pi_\infty^n & 0 & \varepsilon\pi_\infty^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$-q^{-1} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m-1} & u\pi_\infty^{-1} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

so daß man insgesamt

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = q^{-2} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-1} & u\pi_\infty^{-1} & 0\\ 0 & \pi_\infty^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

erhält. Iteriert man dies, ergibt sich

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = q^{-2k} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-k} & u\pi_\infty^{-k} & 0\\ 0 & \pi_\infty^{n-k} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Gemäß Lemma 2.1.2 gibt es unendlich viele dieser k, so daß die zugehörigen Matrizen auf der rechten Seite nicht gleich sind in $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$. Aus dem endlichen Träger modulo $\Gamma_0(N)$ von f folgt, daß f für hinreichend großes k auf $\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-k} & u\pi_\infty^{-k} & 0\\ 0 & \pi_\infty^{n-k} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ verschwindet. Damit erhält man

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = 0.$$

□

Aus Lemma 2.1.3, Lemma 2.1.4 und der Harmonizitätsbedingung (**HB2**) folgt nun unmittelbar die erste wichtige Aussage über den Träger von f.

Satz 2.1.5 *Seien* $X = \begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix}u & \pi_\infty^m & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$, *dann ist* $f(X) = 0$, *falls* $m \leq 1$, *und* $f(Y) = 0$, *falls* $m \leq 0$.

Auch für die zweite Hauptaussage sind umfangreichere technische Vorbereitungen erforderlich.

Lemma 2.1.6 *Sei* $\gamma \in G(\mathbb{F}_q[T])$ *und* $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ y & z & 1\end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, *dann gibt es eine Matrix* $\gamma_0 \in \Gamma_0(N)$ *mit* $\gamma_0\gamma = \gamma M$.

Beweis Sei

$$\gamma = \begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix},$$

dann ergeben sich die Unterdiagonaleinträge von $\gamma M \gamma^{-1} = (\tilde{\gamma}_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ zu

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_{21} &= \frac{1}{\det(\gamma)}((-fh+ei)(ex+fy) + f(fg-di)z),\\
\tilde{\gamma}_{31} &= \frac{1}{\det(\gamma)}((-fh+ei)(hx+iy) - i(-fg+di)z),\\
\tilde{\gamma}_{32} &= \frac{1}{\det(\gamma)}((ch-bi)(hx+iy) + i(-cg+ai)z)
\end{aligned}$$

und sind somit durch N teilbar, da $x, y, z \in N\mathbb{F}_q[T]$ wegen $M \in \Gamma_0(N)$. Hieraus folgt offensichtlich $\gamma M \gamma^{-1} \in \Gamma_0(N)$ und daher die Behauptung. $\square$

Für $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$ sei an die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &= \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_\infty), \\ Z_\varepsilon &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi_\infty & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_\infty) \end{aligned}$$

erinnert.

Lemma 2.1.7 *Für alle $\gamma \in G(\mathbb{F}_q[T])$, $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq \deg(N)$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*, n \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\gamma \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \gamma \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & 0 & \varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z_\varepsilon$$

in $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$.

Beweis Wegen $\pi_\infty^{-1} = T$ und $m \geq \deg(N)$ ist $N\pi_\infty^{\deg(N)-m}$ ein Polynom in $N\mathbb{F}_q[T]$ vom Grad m und besitzt daher eine Darstellung $N\pi_\infty^{\deg(N)-m} = \sum_{i=0}^{m} g_i T^i$ mit $g_0, \ldots, g_{m-1} \in \mathbb{F}_q$, $g_m \in \mathbb{F}_q^*$. Aufgrund von $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*$ liegt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{N}{\varepsilon g_m}\pi_\infty^{\deg(N)-m} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in $\Gamma_0(N)$. Aus $v_\infty(-\frac{N}{\varepsilon g_m}\pi_\infty^{\deg(N)}) = 0$ und

$$-\frac{N}{g_m}\pi_\infty^{\deg(N)} + 1 = -\frac{1}{g_m}(g_m + g_{m-1}\pi_\infty + \ldots + g_1\pi_\infty^{m-1} + g_0\pi_\infty^m) + 1 =$$

$$-\frac{g_{m-1}}{g_m}\pi_\infty - \ldots - \frac{g_1}{g_m}\pi_\infty^{m-1} - \frac{g_0}{g_m}\pi_\infty^m \in \pi_\infty O_\infty$$

ersieht man, daß

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 \\ 0 & -\frac{N}{g_m}\pi_\infty^{\deg(N)} + 1 & -\frac{N}{\varepsilon g_m}\pi_\infty^{\deg(N)} \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty.$$

Somit ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{N}{\varepsilon g_m}\pi_\infty^{\deg(N)-m} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & 0 & \varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{N}{\varepsilon g_m}\pi_\infty^{\deg(N)-m} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon\pi_\infty^m & \pi_\infty^m \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pi_\infty & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=R} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon\pi_\infty^m & \pi_\infty^m \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N}{g_m}\pi_\infty^{\deg(N)}+1 & -\frac{N}{\varepsilon g_m}\pi_\infty^{\deg(N)} \end{pmatrix} R =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 \\ 0 & -\frac{N}{g_m}\pi_\infty^{\deg(N)}+1 & -\frac{N}{\varepsilon g_m}\pi_\infty^{\deg(N)} \end{pmatrix} R$$

und daher

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{N}{\varepsilon g_m}\pi_\infty^{\deg(N)-m} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & 0 & \varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\gamma \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 \\ 0 & -\frac{N}{g_m}\pi_\infty^{\deg(N)}+1 & -\frac{N}{\varepsilon g_m}\pi_\infty^{\deg(N)} \end{pmatrix} R.$$

Nach Lemma 2.1.6 existiert ein $\gamma_0 \in \Gamma_0(N)$ mit

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{N}{\varepsilon g_m}\pi_\infty^{\deg(N)-m} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma_0\gamma.$$

Damit gilt

$$\gamma_0\gamma \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & 0 & \varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{N}{\varepsilon g_m}\pi_\infty^{\deg(N)-m} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & 0 & \varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\gamma \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 \\ 0 & -\frac{N}{g_m}\pi_\infty^{\deg(N)}+1 & -\frac{N}{\varepsilon g_m}\pi_\infty^{\deg(N)} \end{pmatrix} R,$$

weshalb $\gamma \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & 0 & \varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \gamma \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$. □

Lemma 2.1.8 *Für alle $\gamma \in G(\mathbb{F}_q[T])$, $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq \deg(N)$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*, m \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\gamma \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \gamma \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^{n+1} & 0 & \varepsilon\pi_\infty^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z_\varepsilon$$

in $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$.

Beweis Wie im Beweis von Lemma 2.1.7 folgt aus $n \geq \deg(N)$, daß $N\pi_\infty^{\deg(N)-n}$ ein Polynom in $N\mathbb{F}_q[T]$ vom Grad n ist und daher eine Darstellung $N\pi_\infty^{\deg(N)-n} = \sum_{i=0}^{n} g_i T^i$ mit

$g_0, \dots, g_{n-1} \in \mathbb{F}_q$, $g_n \in \mathbb{F}_q^*$ besitzt. Somit ist für alle $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*$ auch $-\frac{N}{\varepsilon g_n}\pi_\infty^{\deg(N)-n}$ ein Polynom in $N\mathbb{F}_q[T]$ vom Grad n. Weiter folgt $v_\infty\left(\frac{N}{\varepsilon g_n}\pi_\infty^{\deg(N)}\right) = 0$ und

$$-\frac{N}{g_n}\pi_\infty^{\deg(N)} + 1 = -\frac{g_{n-1}}{g_n}\pi_\infty - \dots - \frac{g_1}{g_n}\pi_\infty^{n-1} - \frac{g_0}{g_n}\pi_\infty^n \in \pi_\infty O_\infty,$$

woraus man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{N}{\varepsilon g_n}\pi_\infty^{\deg(N)-n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^{n+1} & 0 & \varepsilon\pi_\infty^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{N}{\varepsilon g_n}\pi_\infty^{\deg(N)-n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon\pi_\infty^n & \pi_\infty^n \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pi_\infty & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=R} =$$

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon\pi_\infty^n & \pi_\infty^n \\ 0 & -\frac{N}{g_n}\pi_\infty^{\deg(N)} + 1 & -\frac{N}{\varepsilon g_n}\pi_\infty^{\deg(N)} \end{pmatrix} R =$$

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 \\ 0 & -\frac{N}{g_n}\pi_\infty^{\deg(N)} + 1 & -\frac{N}{\varepsilon g_n}\pi_\infty^{\deg(N)} \end{pmatrix} R$$

erhält. Mit Lemma 2.1.6 folgt hieraus die Behauptung analog zum Beweis von Lemma 2.1.7. □

Lemma 2.1.9 *Für alle $\gamma \in G(\mathbb{F}_q[T])$, $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m - n \geq \deg(N)$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*$ gilt*

$$\gamma \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \gamma \begin{pmatrix} \varepsilon\pi_\infty^m & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_\varepsilon$$

in $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$.

Beweis Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Lemma 2.1.7 unter Benutzung von $N\pi_\infty^{\deg(N)+n-m} = \sum_{i=0}^{m-n} g_i T^i \in N\mathbb{F}_q[T]$, $-\frac{N}{\varepsilon g_{m-n}}\pi_\infty^{\deg(N)} \in O_\infty^*$, $-\frac{N}{g_{m-n}}\pi_\infty^{\deg(N)} + 1 \in \pi_\infty O_\infty$ sowie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{N}{\varepsilon g_{m-n}}\pi_\infty^{\deg(N)+n-m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon\pi_\infty^m & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 0 \\ -\frac{N}{g_{m-n}}\pi_\infty^{\deg(N)} + 1 & -\frac{N}{\varepsilon g_{m-n}}\pi_\infty^{\deg(N)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Lemma 2.1.10 *Seien $Z, \overline{Z} \in G(K_\infty)$ zwei Matrizen mit $Z \equiv \overline{Z} \bmod \Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$. Für jede Funktion $\phi\colon G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^* \to \mathbb{C}$ gilt*

$$\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \phi(ZZ_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \phi(\overline{Z}Z_\varepsilon)$$

sowie

$$\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \phi(ZX_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \phi(\overline{Z}X_\varepsilon),$$

d. h. der Wert der Summe ist unabhängig von der Wahl des Vertreters der Nebenklasse von Z in $G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$.

Beweis Zunächst sei angemerkt, daß $Z_\varepsilon R^2\pi_\infty^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\varepsilon&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Es gilt $P_2/\Gamma_\infty = \{Z_\varepsilon R^2\pi_\infty^{-1}\Gamma_\infty \mid \varepsilon\in\mathbb{F}_q\}\cup\{\Gamma_\infty\}$: Sei $H = \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix} \in P_2$. Falls $h\in\pi_\infty O_\infty$, so ist $H\in\Gamma_\infty$, also $H\Gamma_\infty = \Gamma_\infty$ bzw. H liegt in der Nebenklasse der Einheitsmatrix. Sei daher angenommen, daß $h\notin\pi_\infty O_\infty$, d. h. $h\in O_\infty^*$. Dann ist $v_\infty(\frac{g}{h})\geq 1$, weshalb H in derselben Klasse liegt wie

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{g}{h}&1&-\frac{i}{h}\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{ah-bg}{h}&b&\frac{ch-bi}{h}\\\frac{dh-eg}{h}&e&\frac{fh-ei}{h}\\0&h&0\end{pmatrix}.$$

Wegen $d,g\in\pi_\infty O_\infty$ liegt $dh-eg$ in $\pi_\infty O_\infty$, und da $O_\infty^*\ni\det(H)\equiv a(ei-fh) \bmod \pi_\infty O_\infty$, ist $ei-fh\in O_\infty^*$, so daß H auch äquivalent ist zur Matrix

$$\begin{pmatrix}\frac{ah-bg}{h}&b&\frac{ch-bi}{h}\\\frac{dh-eg}{h}&e&\frac{fh-ei}{h}\\0&h&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&h^{-1}&0\\-\frac{dh-eg}{fh-ei}&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\det(H)}{ei-fh}&\frac{b}{h}&\frac{ch-bi}{h}\\0&\frac{e}{h}&\frac{fh-ei}{h}\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Da $\frac{\det(H)}{ei-fh}\in O_\infty^*$, kann man die erste Spalte durch $(1,0,0)^T$ ersetzen, ohne die Äquivalenzklasse zu ändern, und weiter äquivalent umformen mittels

$$\begin{pmatrix}1&\frac{b}{h}&\frac{ch-bi}{h}\\0&\frac{e}{h}&\frac{fh-ei}{h}\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{b}{h}&-\frac{ch-bi}{h}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{e}{h}&\frac{fh-ei}{h}\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Wegen $\frac{fh-ei}{h}\in O_\infty^*$ ist diese Matrix äquivalent zu

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{e}{h}&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Sei $\frac{e}{h} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i\pi_\infty^i$ mit $a_0,a_1,\ldots\in\mathbb{F}_q$, so kann man weiter umformen zu

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{e}{h}&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&a_0-\frac{e}{h}&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&a_0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

d. h. es gibt ein $a_0 = \varepsilon \in \mathbb{F}_q$ mit $H \equiv Z_\varepsilon R^2 \pi_\infty^{-1}$, wie behauptet. Ferner gilt offensichtlich $Z_\varepsilon R^2 \pi_\infty^{-1} \not\equiv Z_\delta R^2 \pi_\infty^{-1}$ für $\varepsilon \neq \delta$. Nach Voraussetzung gibt es ein $\gamma \in \Gamma_\infty$ und ein $k \in K_\infty^*$ mit $\overline{Z} = Z\gamma k$. Linksmultiplikation der Nebenklassen von P_2/Γ_∞ mit γ ist transitiv und bildet die Teilmenge der Vertreter $\{Z_\varepsilon R^2 \pi_\infty^{-1} \mid \varepsilon \in \mathbb{F}_q\}$ in sich selber ab. Da ϕ rechtsinvariant unter $\Gamma_\infty \langle R \rangle K_\infty^*$ ist, gilt

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \phi(\overline{Z} Z_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \phi(Z\gamma k Z_\varepsilon R^2 \pi_\infty^{-1}) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \phi(Z(\gamma Z_\varepsilon R^2 \pi_\infty^{-1})) =$$

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \phi(Z Z_\varepsilon R^2 \pi_\infty^{-1}) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \phi(Z Z_\varepsilon).$$

Der Nachweis von

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \phi(Z X_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \phi(\overline{Z} X_\varepsilon)$$

erfolgt analog unter Verwendung von $P_1/\Gamma_\infty = \{X_\varepsilon \Gamma_\infty \mid \varepsilon \in \mathbb{F}_q\} \cup \{\Gamma_\infty\}$. □

Lemma 2.1.11 *Für alle $M \in G(K_\infty)/\Gamma_\infty \langle R \rangle K_\infty^*$ gilt*

$$f(M) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(M Z_\varepsilon) = 0 \tag{2.4}$$

und

$$f(M) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(M X_\varepsilon) = 0. \tag{2.5}$$

Beweis Sei Z der kanonische Vertreter von M in $G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ aus Satz 1.2.1. Weiter seien

$$X = \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_\infty),$$

dann kann man o. B. d. A. annehmen, daß $Z \in \{X, XR, XR^2, Y, YR, YR^2\}$.
Nach Lemma 2.1.10 gilt für $A_\varepsilon = Z_\varepsilon$ bzw. $A_\varepsilon = X_\varepsilon$ die Gleichheit

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(Z A_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(M A_\varepsilon)$$

und daher

$$f(M) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(M A_\varepsilon) = f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(Z A_\varepsilon),$$

weshalb es offensichtlich genügt, die Gleichungen für die sechs möglichen Fälle der Gestalt von Z zu zeigen. Hierfür wird von der in Bemerkung 1.3.3 angeführten Notation der Harmonizitätsbedingungen als

$$f(X) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(X X_\varepsilon) = 0, \tag{\textbf{HB1}}$$

$$f(Y) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(Y Z_\varepsilon) = 0, \tag{\textbf{HB2}}$$

$$f(X) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(X Z_\varepsilon) = 0 \tag{\textbf{HB3}}$$

Gebrauch gemacht werden. Zuerst soll mittels einer Fallunterscheidung die Gleichung (2.4) gezeigt werden.

- $\underline{Z = X}$: Es gilt $f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(ZZ_\varepsilon) = 0$ wegen (**HB3**).

- $\underline{Z = XR}$: Man rechnet nach, daß

$$RZ_\varepsilon R = X_\varepsilon \pi_\infty. \tag{2.6}$$

Wegen der Invarianzen von f ergibt sich damit

$$\begin{aligned} f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(ZZ_\varepsilon) = f(XR) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(XRZ_\varepsilon) \;= \\ f(X) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(XX_\varepsilon \pi_\infty) = f(X) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(XX_\varepsilon) \overset{\textbf{(HB1)}}{=} 0. \end{aligned}$$

- $\underline{Z = XR^2}$: Sei zunächst $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*$. Definiert man

$$\gamma_\varepsilon := \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \pi_\infty & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty,$$

so erhält man die Identität

$$R^2 Z_\varepsilon = QZ_{\varepsilon^{-1}} \gamma_\varepsilon \pi_\infty \tag{2.7}$$

und damit, unter Benutzung der Bijektion

$$\mathbb{F}_q^* \to \mathbb{F}_q^*, \varepsilon \mapsto \varepsilon^{-1}$$

sowie der Invarianzen von f,

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(ZZ_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(XR^2 Z_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(XQZ_{\varepsilon^{-1}} \gamma_\varepsilon \pi_\infty) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(XQZ_\varepsilon),$$

also ist

$$\begin{aligned} f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(ZZ_\varepsilon) = \\ f(XR^2) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(XR^2 Z_\varepsilon) + f(XR^2 Z_0) = \\ f(X) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(XQZ_\varepsilon) + f(XR^2 Z_0). \end{aligned}$$

Benutzt man noch

$$QZ_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad R^2 Z_0 R^2 = Q\pi_\infty^2, \tag{2.8}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} f(X) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(XQZ_\varepsilon) + f(XR^2 Z_0) = f(XQZ_0) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(XQZ_\varepsilon) + f(XR^2 Z_0 R^2) = \\ \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(XQZ_\varepsilon) + f(XQ\pi_\infty^2) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(XQZ_\varepsilon) + f(XQ). \end{aligned}$$

Da $XQ = \begin{pmatrix} u & \pi_\infty^{m-1} & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SQ$ kann man darauf die Harmonizitätsbedingung (**HB2**) anwenden, d. h.

$$f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(ZZ_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(XQZ_\varepsilon) + f(XQ) = 0.$$

- $\underline{Z = Y}$: Die Gleichung $f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(ZZ_\varepsilon) = 0$ ist gerade die Harmonizitätsbedingung (**HB2**).
- $\underline{Z = YR}$: Mit

$$\tilde{\gamma}_\varepsilon := \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$$

für $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*$ gilt

$$YRZ_\varepsilon R = XX_{\varepsilon^{-1}} \tilde{\gamma}_\varepsilon \pi_\infty$$

und somit

$$\begin{aligned} f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(ZZ_\varepsilon) =& f(YR) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(YRZ_\varepsilon) + f(YRZ_0) = \\ & f(Y) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(XX_{\varepsilon^{-1}} \tilde{\gamma}_\varepsilon \pi_\infty) + f(YRZ_0). \end{aligned}$$

Da außerdem

$$Y = XX_0 \qquad \text{und} \qquad YRZ_0R\pi_\infty^{-1} = X,$$

gilt weiter

$$\begin{aligned} f(Y) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(XX_{\varepsilon^{-1}} \tilde{\gamma}_\varepsilon \pi_\infty) + f(YRZ_0) &= \\ f(XX_0) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(XX_\varepsilon) + f(YRZ_0R\pi_\infty^{-1}) &= \\ \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(XX_\varepsilon) + f(X) &\overset{\textbf{(HB1)}}{=} 0. \end{aligned}$$

- $\underline{Z = YR^2}$: Die Gleichungen (2.7) und (2.8) liefern, analog zum Fall $Z = XR^2$,

$$\begin{aligned} f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(ZZ_\varepsilon) = f(YR^2) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(YR^2 Z_\varepsilon) + f(YR^2 Z_0) &= \\ f(Y) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(YQZ_{\varepsilon^{-1}}) + f(YQ) &= \\ f(YQZ_0) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} f(YQZ_\varepsilon) + f(YQ) &= \\ \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(YQZ_\varepsilon) + f(YQ) & \end{aligned}$$

und diese Summe verschwindet nach (**HB3**), da $YQ \in S$.

Die Beziehung $f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(ZZ_\varepsilon) = 0$ gilt also immer, unabhängig davon, welche Form der kanonische Vertreter Z von M in $G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ hat, und somit ist Gleichung (2.4) gezeigt. Zum Nachweis von Gleichung (2.5) geht man analog vor. Die Darstellung der einzelnen Umformungsschritte ist etwas kürzer gefaßt.

- $\underline{Z = X}$: In diesem Fall ist (2.5) gleich (**HB1**).
- $\underline{Z = XR}$: Wegen $R^3 = \pi_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist (2.6) äquivalent zu

$$RX_\varepsilon R^2 = R^2 Z_\varepsilon. \tag{2.9}$$

  Hieraus und mit (2.4) erhält man

$$f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(ZX_\varepsilon) = f(XR) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(XRX_\varepsilon R^2) = f(XR^2) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(XR^2 Z_\varepsilon) = 0.$$

- $\underline{Z = XR^2}$: Gleichung (2.6) ist gleichbedeutend zu

$$R^2 X_\varepsilon = Z_\varepsilon R, \tag{2.10}$$

  und es ergibt sich

$$f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(ZX_\varepsilon) = f(XR^2) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(XR^2 X_\varepsilon) = f(X) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(XZ_\varepsilon R) \overset{\textbf{(HB3)}}{=} 0.$$

- $\underline{Z = Y}$: Die Bedingungen (2.6) und (2.4) liefern

$$f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(ZX_\varepsilon) = f(Y) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(YX_\varepsilon) = f(YR) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(YRZ_\varepsilon) = 0.$$

- $\underline{Z = YR}$: Erneute Benutzung von (2.9) und (2.4) ergibt

$$f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(ZX_\varepsilon) = f(YR) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(YRX_\varepsilon R^2) = f(YR^2) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(YR^2 Z_\varepsilon) = 0.$$

- $\underline{Z = YR^2}$: Unter Anwendung von (2.10) und (**HB2**) erhält man

$$f(Z) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(ZX_\varepsilon) = f(YR^2) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(YR^2 X_\varepsilon) = f(Y) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f(YZ_\varepsilon R) = 0.$$

□

Lemma 2.1.12 *Seien $\gamma \in G(\mathbb{F}_q[T])$ und $m, n \in \mathbb{Z}$. Es gilt*

$$f\left(\gamma \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + qf\left(\gamma \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \textit{ für alle } m \geq \deg(N), \tag{2.11}$$

$$f\left(\gamma \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + qf\left(\gamma \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \textit{ für alle } n \geq \deg(N), \tag{2.12}$$

$$f\left(\gamma \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + qf\left(\gamma \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \textit{ für alle } m - n \geq \deg(N). \tag{2.13}$$

Beweis Gemäß Gleichung (2.4) ist

$$f\left(\gamma\begin{pmatrix}0 & \pi_\infty^m & 0\\ \pi_\infty^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\gamma\begin{pmatrix}0 & \pi_\infty^m & 0\\ \pi_\infty^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Z_\varepsilon\right)=0.$$

Für $m\geq\deg(N), n\in\mathbb{Z}$ und $\varepsilon\in\mathbb{F}_q^*$ gilt wegen Lemma 2.1.7 ferner

$$\gamma\begin{pmatrix}0 & \pi_\infty^m & 0\\ \pi_\infty^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Z_\varepsilon\equiv\gamma\begin{pmatrix}0 & \pi_\infty^m & 0\\ \pi_\infty^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

woraus zusammen

$$qf\left(\gamma\begin{pmatrix}0 & \pi_\infty^m & 0\\ \pi_\infty^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+f\left(\gamma\begin{pmatrix}0 & \pi_\infty^m & 0\\ \pi_\infty^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Z_0\right)=0$$

und wegen

$$\begin{pmatrix}0 & \pi_\infty^m & 0\\ \pi_\infty^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Z_0=\begin{pmatrix}0 & \pi_\infty^m & 0\\ \pi_\infty^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \pi_\infty & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & 0 & 0\\ 0 & \pi_\infty^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Gleichung (2.11) resultiert.
Der Beweis von (2.12) und (2.13) erfolgt analog unter Verwendung der Lemmata 2.1.8 resp. 2.1.9 und von Gleichung (2.5).

□

Lemma 2.1.13 *Seien $m,n,\mathfrak{m},\mathfrak{n}\in\mathbb{N}$. Wenn die Matrizen*

$$\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & 0\\ 0 & \pi_\infty^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\mathfrak{m}} & 0 & 0\\ 0 & \pi_\infty^{\mathfrak{n}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

in $G(\mathbb{F}_q[T])\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ äquivalent sind, dann gilt $m=\mathfrak{m}$ und $n=\mathfrak{n}$.

Beweis Seien $\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & 0\\ 0 & \pi_\infty^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\mathfrak{m}} & 0 & 0\\ 0 & \pi_\infty^{\mathfrak{n}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ in $G(\mathbb{F}_q[T])\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ äquivalent, dann existieren Matrizen

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\in G(\mathbb{F}_q[T])$$

und

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \delta & \varepsilon & \zeta\\ \eta & \theta & \iota\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty$$

sowie ein $k\in K_\infty^*$ und ein $\nu\in\{0,1,2\}$ mit

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & 0\\ 0 & \pi_\infty^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\mathfrak{m}} & 0 & 0\\ 0 & \pi_\infty^{\mathfrak{n}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \delta & \varepsilon & \zeta\\ \eta & \theta & \iota\end{pmatrix}R^\nu k,$$

d. h.

$$\begin{pmatrix} a\pi_\infty^m & b\pi_\infty^n & c \\ d\pi_\infty^m & e\pi_\infty^n & f \\ g\pi_\infty^m & h\pi_\infty^n & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\pi_\infty^{\mathfrak{m}} & \beta\pi_\infty^{\mathfrak{m}} & \gamma\pi_\infty^{\mathfrak{m}} \\ \delta\pi_\infty^{\mathfrak{n}} & \varepsilon\pi_\infty^{\mathfrak{n}} & \zeta\pi_\infty^{\mathfrak{n}} \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix} R^\nu k. \tag{2.14}$$

Wegen $v_\infty\left(\det\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}\right)\right) = 0$ und $\delta, \eta, \theta \in \pi_\infty O_\infty$ müssen α, ε und ι in O_∞^* liegen, so daß

$$v_\infty(\alpha) = v_\infty(\varepsilon) = v_\infty(\iota) = 0.$$

Der Vergleich der Bewertungen der Determinanten von rechter und linker Seite liefert

$$m + n = \mathfrak{m} + \mathfrak{n} + 3v_\infty(k) + \nu, \tag{2.15}$$

da $\det(R) = \pi_\infty$.
Falls $\nu = 0$, erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} a\pi_\infty^m &= \alpha\pi_\infty^{\mathfrak{m}} k, \\ e\pi_\infty^n &= \varepsilon\pi_\infty^{\mathfrak{n}} k, \\ i &= \iota k \end{aligned}$$

und hieraus

$$v_\infty(a) + m = \mathfrak{m} + v_\infty(k), \tag{2.16}$$
$$v_\infty(e) + n = \mathfrak{n} + v_\infty(k), \tag{2.17}$$
$$v_\infty(i) = v_\infty(k). \tag{2.18}$$

Addition der drei Gleichungen führt auf

$$m + n + v_\infty(a) + v_\infty(e) + v_\infty(i) = \mathfrak{m} + \mathfrak{n} + 3v_\infty(k),$$

woraus sich mit (2.15) die Gleichung

$$v_\infty(a) + v_\infty(e) + v_\infty(i) = 0$$

und somit $a, e, i \in \mathbb{F}_q^*$ ergibt, da $a, e, i \in \mathbb{F}_q[T]$. Aus (2.18) folgt daher $v_\infty(k) = 0$, so daß $m = \mathfrak{m}$ und $n = \mathfrak{n}$ wegen (2.16) und (2.17) .
Die Fälle $\nu = 1$ und $\nu = 2$ können nicht auftreten, wie nachfolgend gezeigt wird:
Ist $\nu = 1$, so ist (2.14) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} a\pi_\infty^m & b\pi_\infty^n & c \\ d\pi_\infty^m & e\pi_\infty^n & f \\ g\pi_\infty^m & h\pi_\infty^n & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\pi_\infty^{\mathfrak{m}+1} & \alpha\pi_\infty^{\mathfrak{m}} & \beta\pi_\infty^{\mathfrak{m}} \\ \zeta\pi_\infty^{\mathfrak{n}+1} & \delta\pi_\infty^{\mathfrak{n}} & \varepsilon\pi_\infty^{\mathfrak{n}} \\ \iota\pi_\infty & \eta & \theta \end{pmatrix} k.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$v_\infty(b) + n = \mathfrak{m} + v_\infty(k), \tag{2.19}$$
$$v_\infty(f) = \mathfrak{n} + v_\infty(k), \tag{2.20}$$
$$v_\infty(g) + m = 1 + v_\infty(k), \tag{2.21}$$

hieraus durch Addition

$$m + n + v_\infty(b) + v_\infty(f) + v_\infty(g) = \mathfrak{m} + \mathfrak{n} + 3v_\infty(k) + 1$$

und mit (2.15)

$$v_\infty(b) + v_\infty(f) + v_\infty(g) = 0,$$

also $b, f, g \in \mathbb{F}_q^*$, und (2.20) liefert daher

$$-v_\infty(k) = \mathfrak{n}.$$

Da $\mathfrak{n} \geq 1$ nach Voraussetzung, muß $v_\infty(k) \leq -1$ sein. Andererseits ergibt sich $v_\infty(k) \geq 0$ wegen (2.21) und $m \geq 1$. Folglich sind die Matrizen in diesem Fall nicht äquivalent.
Wenn $\nu = 2$, ist (2.14) gleichbedeutend mit

$$\begin{pmatrix} a\pi_\infty^m & b\pi_\infty^n & c \\ d\pi_\infty^m & e\pi_\infty^n & f \\ g\pi_\infty^m & h\pi_\infty^n & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\pi_\infty^{\mathfrak{m}+1} & \gamma\pi_\infty^{\mathfrak{m}+1} & \alpha\pi_\infty^{\mathfrak{m}} \\ \varepsilon\pi_\infty^{\mathfrak{n}+1} & \zeta\pi_\infty^{\mathfrak{n}+1} & \delta\pi_\infty^{\mathfrak{n}} \\ \theta\pi_\infty & \iota\pi_\infty & \eta \end{pmatrix} k$$

und analoges Vorgehen führt zunächst auf

$$\begin{aligned} v_\infty(c) &= \mathfrak{m} + v_\infty(k), && (2.22)\\ v_\infty(d) + m &= \mathfrak{n} + v_\infty(k) + 1, &&\\ v_\infty(h) + n &= v_\infty(k) + 1, && (2.23) \end{aligned}$$

weiter auf $c, d, h \in \mathbb{F}_q^*$ und daher auf $v_\infty(k) \leq -1$ wegen (2.22) und $v_\infty(k) \geq 0$ wegen (2.23), so daß auch in diesem Fall die Matrizen nicht äquivalent sind.

□

Lemma 2.1.14 *Seien $\gamma, \tilde{\gamma} \in G(\mathbb{F}_q[T])$ und $m, n, \mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathbb{N}$. Wenn die Matrizen*

$$\gamma \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{\gamma} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\mathfrak{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{\mathfrak{n}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ äquivalent sind, dann gilt $m = \mathfrak{m}$ und $n = \mathfrak{n}$.

Beweis Seien $\Pi_{m,n} := \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\Pi_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} := \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\mathfrak{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{\mathfrak{n}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wenn $\gamma\Pi_{m,n}$ und $\tilde{\gamma}\Pi_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ in $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ äquivalent sind, dann existieren $\gamma_0 \in \Gamma_0(N)$, $\gamma_\infty \in \Gamma_\infty$ sowie $k \in K_\infty^*$ und $\nu \in \{0, 1, 2\}$ mit

$$\gamma\Pi_{m,n} = \gamma_0\tilde{\gamma}\Pi_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}\gamma_\infty R^\nu k,$$

also

$$\Pi_{m,n} = \gamma^{-1}\gamma_0\tilde{\gamma}\Pi_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}\gamma_\infty R^\nu k.$$

Dies bedeutet aber, daß $\Pi_{m,n}$ und $\Pi_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ in $G(\mathbb{F}_q[T])\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ äquivalent sind, und hieraus folgt $m = \mathfrak{m}$ sowie $n = \mathfrak{n}$ gemäß Lemma 2.1.13. □

Diese Vorbereitungen münden in den

Satz 2.1.15 *Seien m, $n \in \mathbb{Z}$ und $\gamma \in G(\mathbb{F}_q[T])$. Es gilt*

$$f\left(\gamma\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & 0\\ 0 & \pi_\infty^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = 0 \textit{ für alle } m, n \geq \deg(N), \tag{2.24}$$

$$f\left(\gamma\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & 0\\ 0 & \pi_\infty^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = 0 \textit{ für alle } m \geq \deg(N) + n, n \in \mathbb{N}, \tag{2.25}$$

$$f\left(\gamma\begin{pmatrix}0 & \pi_\infty^m & 0\\ \pi_\infty^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = 0 \textit{ für alle } m \geq \deg(N) + n - 1, n \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

Beweis Es seien $d := \deg(N)$, $\gamma \in \mathbb{F}_q[T]$ und

$$\gamma_{m,n} := \gamma\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & 0\\ 0 & \pi_\infty^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$\gamma\begin{pmatrix}0 & \pi_\infty^m & 0\\ \pi_\infty^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \gamma_{m+1,n}Q.$$

Aufgrund des endlichen Trägers von f und wegen Lemma 2.1.14 existiert ein $\mathfrak{m} \in \mathbb{N}$ mit $f(\gamma_{m,n}) = 0$ für alle $m \geq \mathfrak{m}$ und alle $n \geq 1$; o. E. kann man $\mathfrak{m} \geq d$ annehmen.
Zum Beweis von (2.24) seien $m, n \geq d$. Falls $m \geq \mathfrak{m}$, ist nichts zu zeigen. Sei also $d \leq m < \mathfrak{m}$ angenommen, so daß ein $l \geq 1$ existiert mit $m + l = \mathfrak{m}$. Nach Wahl von $\mathfrak{m}$ ist

$$f(\gamma_{\mathfrak{m},n+l}) = f(\gamma_{m+l,n+l}) = 0.$$

Mit Gleichung (2.11) folgt daraus

$$f(\gamma_{m+l,n+l}Q) = 0$$

und mit Gleichung (2.12) weiter

$$f(\gamma_{m+l-1,n+l-1}) = 0.$$

Diese beiden Schritte kann man nun $(l-1)$-mal wiederholen und erhält schließlich

$$f(\gamma_{m,n}) = 0.$$

Um (2.25) und (2.26) einzusehen, seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq d+n$, also wegen $n \geq 1$ insbesondere $m > d$. Wie oben kann man $m < \mathfrak{m}$, also $m + l = \mathfrak{m}$ für ein $l \geq 1$, annehmen. Nach Voraussetzung ist

$$f(\gamma_{\mathfrak{m},n}) = f(\gamma_{m+l,n}) = 0$$

und somit erhält man die Implikationen

$$f(\gamma_{m+l,n}) = 0 \overset{(2.11)}{\Longrightarrow} f(\gamma_{m+l,n}Q) = 0 \overset{(2.13)}{\Longrightarrow} f(\gamma_{m+l-1,n}) = 0,$$

aus deren Iteration die Behauptungen folgen. □

Die Relevanz dieses Satzes ergibt sich aus der folgenden Aussage.

Satz 2.1.16 *Jedes $X \in G(K_\infty)$ ist in $G(\mathbb{F}_q[T])\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ äquivalent zu einer Matrix aus*

$$\mathcal{W} := \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; m,n \in \mathbb{N} \text{ und } m > n \geq 1 \right\} \cup$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; m,n \in \mathbb{N} \text{ und } m \geq n \geq 1 \right\}.$$

Beweis Im Folgenden bezeichne „$\equiv$" Äquivalenz in $G(\mathbb{F}_q[T])\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ und „$=$" Gleichheit von Matrizen in $G(K_\infty)$.
Sei $X \in G(K_\infty)$. Wie in Satz 1.2.2 beschrieben, besitzt X modulo $\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ einen kanonischen Vertreter in $\mathcal{V}_S$ oder $\mathcal{V}_{SQ}$, weshalb man o. B. d. A. davon ausgehen kann, daß

$$X = \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } u, v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty, w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty$$

oder

$$X = \begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } u \in K_\infty/\pi_\infty^{m+1} O_\infty, v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty, w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty.$$

Sei zunächst angenommen, daß X von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $u \in K_\infty/\pi_\infty^{m+1} O_\infty$, $v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty$, $w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty$ ist, dann kann man X äquivalent zu einer Matrix aus $\mathcal{V}_S$ umformen: Falls $u = 0$, so ist

$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & \pi_\infty^m & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und daher äquivalent zu einem Vertreter aus $\mathcal{V}_S$. Sei nun angenommen, daß $u \neq 0$, dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq m$ und $u_k \in \mathbb{F}_q^*$, $u_{k+1}, \ldots, u_m \in \mathbb{F}_q$ mit

$$u = \sum_{j=k}^{m} u_j \pi_\infty^j.$$

Wählt man $\alpha = 0 \in \mathbb{F}_q[T]$, falls $k \geq n$, und $\alpha = -\sum_{j=k}^{\min\{m,n\}} u_j \pi_\infty^{j-n} \in \mathbb{F}_q[T]$, falls $k < n$, so ist

$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^n & 0 & w \\ \sum_{j=\min\{m,n\}+1}^{m} u_j \pi_\infty^j & \pi_\infty^m & v + \alpha w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \pi_\infty^n & 0 & \tilde{w} \\ \tilde{u} & \pi_\infty^m & \tilde{v} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $v_\infty(\tilde{u}) = v_\infty\left(\sum_{j=\min\{m,n\}+1}^{m} u_j\pi_\infty^j\right) \geq n+1$. Falls $\tilde{u}=0$, ist die gewünschte Form erreicht. Andernfalls gilt $n+1 \leq l := v_\infty(\tilde{u}) \leq m$ und

$$\tilde{u} = \sum_{j=l}^{m} u_j\pi_\infty^j.$$

Wegen $l \geq n+1$ liegt $\beta = \frac{1}{u_l}\pi_\infty^{n-l}$ in $\mathbb{F}_q[T]$, so daß

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^n & 0 & \tilde{w} \\ \tilde{u} & \pi_\infty^m & \tilde{v} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^n & 0 & \tilde{w} \\ \tilde{u} & \pi_\infty^m & \tilde{v} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} & \pi_\infty^m & \tilde{v} \\ \sum_{j=n+1}^{m+n-l} \frac{u_{j-n+l}}{u_l}\pi_\infty^j & \frac{1}{u_l}\pi_\infty^{m+n-l} & -\tilde{w}+\beta\tilde{v} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mit $v_\infty\left(\sum_{j=n+1}^{m+n-l} \frac{u_{j-n+l}}{u_l}\pi_\infty^j\right) \geq n+1$ und $v_\infty(\tilde{u}) \geq n+1$. Gilt $\sum_{j=n+1}^{m+n-l} \frac{u_{j-n+l}}{u_l}\pi_\infty^j = 0$, so ist man fertig. Andernfalls kann man an $\begin{pmatrix} \tilde{u} = \sum_{j=l}^{m} u_j\pi_\infty^j & \pi_\infty^m & \tilde{v} \\ \sum_{j=n+1}^{m+n-l} \frac{u_{j-n+l}}{u_l}\pi_\infty^j & \frac{1}{u_l}\pi_\infty^{m+n-l} & -\tilde{w}+\beta\tilde{v} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ analoge Umformungen vornehmen. Dies muß nach endlich vielen Schritten abbrechen, da $u = \sum_{j=k}^{m} u_j\pi_\infty^j$ eine endliche Summe ist und in jedem Durchlauf mindestens ein Summand wegfällt.

Man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $u, v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty, w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty$ ist. Durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von π_∞, falls nötig, kann man weiterhin X äquivalent zu einer Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & y \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} \text{ mit } m_1, m_2, m_3 \geq 0,\ a, x \in K_\infty/\pi_\infty^{m_1}O_\infty,\ y \in K_\infty/\pi_\infty^{m_2}O_\infty$$

umformen. Ferner kann man erreichen, daß $y \in \pi_\infty^{m_3+1}O_\infty/\pi_\infty^{m_2}O_\infty$:
Sei $y = \pi_\infty^{m_3}y_- + \pi_\infty^{m_3}y_+$ mit $y_- \in \mathbb{F}_q[T]$ und $y_+ \in \pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{m_2-m_3}O_\infty$, dann gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & y \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y_- \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & y \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \pi_\infty^{m_3}y_+ \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & \tilde{x} \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & \tilde{y} \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.27}$$

mit $\tilde{y} = 0$ oder $m_3 + 1 \leq v_\infty(\tilde{y}) < m_2$. Sei daher im Folgenden davon ausgegangen, daß

$$X = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & y \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} \text{ mit } m_1, m_2, m_3 \geq 0,\ a, x \in K_\infty/\pi_\infty^{m_1}O_\infty,\ y \in \pi_\infty^{m_3+1}O_\infty/\pi_\infty^{m_2}O_\infty.$$

Zuerst soll gezeigt werden, daß X äquivalent zu einer Matrix ist, deren Eintrag in der zweiten Zeile und dritten Spalte gleich 0 ist. Falls $y = 0$, ist also nichts zu tun, und es sei daher $\underline{y \neq 0}$ angenommen. Man kann nun wie folgt den Wert von m_2 sukzessive reduzieren und in jedem Schritt y um $\pi_\infty^{m_2} O_\infty$, bis man die behauptete Gestalt erhält. Es gilt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & y \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & y \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi_\infty^{m_2}}{y} & 1 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a - \frac{x}{y}\pi_\infty^{m_2} & x \\ 0 & -\frac{1}{y}\pi_\infty^{m_2+m_3} & \pi_\infty^{m_3} \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -y\pi_\infty^{-v_\infty(y)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{y}\pi_\infty^{v_\infty(y)} \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & x\pi_\infty^{m_2-v_\infty(y)} - ay\pi_\infty^{-v_\infty(y)} & \frac{x}{y}\pi_\infty^{v_\infty(y)} \\ 0 & \pi_\infty^{m_2+m_3-v_\infty(y)} & \frac{1}{y}\pi_\infty^{m_3+v_\infty(y)} \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{v_\infty(y)} \end{pmatrix} \\
&=: \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\tilde m_1} & \tilde a & \tilde x \\ 0 & \pi_\infty^{\tilde m_2} & \tilde y \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{\tilde m_3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sei $\tilde y = \pi_\infty^{\tilde m_2}\tilde y_- + \pi_\infty^{\tilde m_2}\tilde y_+$ mit $\tilde y_- \in T\,\mathbb{F}_q[T]$ und $\tilde y_+ \in O_\infty$, so ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\tilde m_1} & \tilde a & \tilde x \\ 0 & \pi_\infty^{\tilde m_2} & \tilde y \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{\tilde m_3} \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\tilde m_1} & \tilde a & \tilde x \\ 0 & \pi_\infty^{\tilde m_2} & \tilde y \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{\tilde m_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\tilde y_+ \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\tilde m_1} & \tilde a & \tilde x - \tilde a\tilde y_+ \\ 0 & \pi_\infty^{\tilde m_2} & \pi_\infty^{\tilde m_2}\tilde y_- \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{\tilde m_3} \end{pmatrix} \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

mit $\pi_\infty^{\tilde m_2}\tilde y_- = 0$ oder $v_\infty(\pi_\infty^{\tilde m_2}\tilde y_-) < m_2$.
Man kann nun noch Äquivalenzumformungen analog zu (2.27) anwenden, so daß

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\tilde m_1} & \tilde a & \tilde x - \tilde a\tilde y_+ \\ 0 & \pi_\infty^{\tilde m_2} & \pi_\infty^{\tilde m_2}\tilde y_- \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{\tilde m_3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\tilde m_1} & \tilde a & \tilde{\tilde x} \\ 0 & \pi_\infty^{\tilde m_2} & \tilde{\tilde y} \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{\tilde m_3} \end{pmatrix}.$$

Aus den Voraussetzungen $m_3 \geq 0$ und $m_3 + 1 \leq v_\infty(y) < m_2$ folgt

$$\tilde m_2 = m_2 + m_3 - v_\infty(y) \geq m_3 + 1 \geq 1.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\tilde m_1 &= m_1, \\
\tilde m_2 &= m_2 + m_3 - v_\infty(y) < m_2, \\
\tilde m_3 &= v_\infty(y) > m_3, \\
\sum_{i=1}^{3} \tilde m_i &= m_1 + (m_2 + m_3 - v_\infty(y)) + v_\infty(y) = m_1 + m_2 + m_3
\end{aligned}$$

und $\tilde{\tilde{y}} = 0$ oder $\tilde{m}_2 > \tilde{\tilde{y}} \geq \tilde{m}_3 + 1$. Im ersten Fall ist man fertig, und im zweiten Fall kann man das Verfahren wiederholen. Da der Wert des ursprünglichen m_2 bei jedem Durchgang kleiner wird und der des ursprünglichen m_3 bei jedem Schritt größer, muß das ursprüngliche y nach höchstens $m_2 - 1$ dieser Schritte und jeweils anschließender Reduktion von $\frac{1}{y}\pi_\infty^{m_3+v_\infty(y)}$ gleich 0 sein, und man gelangt schließlich zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\overline{m}_1} & \overline{a} & \overline{x} \\ 0 & \pi_\infty^{\overline{m}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{\overline{m}_3} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \overline{m}_1 &= m_1, \\ \overline{m}_2 &\leq m_2, \\ \overline{m}_3 &\geq m_3 \text{ und} \\ \overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \overline{m}_3 &= m_1 + m_2 + m_3. \end{aligned}$$

Aus Gründen der Lesbarkeit soll diese Matrix nun wieder mit

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix}$$

bezeichnet werden.
Als nächstes werden nun analog die Einträge a und x auf 0 gebracht, indem der Wert von m_1 in jedem Schritt um mindestens 1 reduziert wird. Durch Umformungen analog zu (2.27) und (2.28) kann man davon ausgehen, daß

$$\begin{aligned} 0 \leq m_2 < v_\infty(a) < m_1 &\text{ oder } a = 0, \\ 0 \leq m_3 < v_\infty(x) < m_1 &\text{ oder } x = 0, \end{aligned}$$

und weiterhin ist

$$m_1, m_2, m_3 \geq 0.$$

Falls $v_\infty(x) < v_\infty(a)$, also insbesondere $x \neq 0$, erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ \pi_\infty^{m_1} & a & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\pi_\infty^{m_1}}{x} & -\frac{a}{x} & 1 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{x}\pi_\infty^{m_1+m_3} & -\frac{a}{x}\pi_\infty^{m_3} & \pi_\infty^{m_3} \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x\pi_\infty^{-v_\infty(x)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x}\pi_\infty^{v_\infty(x)} \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1+m_3-v_\infty(x)} & -\frac{a}{x}\pi_\infty^{m_3} & \frac{1}{x}\pi_\infty^{m_3+v_\infty(x)} \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{v_\infty(x)} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1'} & a' & x' \\ 0 & \pi_\infty^{m_2'} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3'} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} m_1' &= m_1 + m_3 - v_\infty(x) < m_1, \\ m_2' &= m_2, \\ m_3' &= v_\infty(x) > m_3. \end{aligned}$$

Falls $\infty > v_\infty(x) \geq v_\infty(a)$, so ist $a \neq 0$, und es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ \pi_\infty^{m_1} & a & x \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\pi_\infty^{m_1}}{a} & 1 & -\frac{x}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{a}\pi_\infty^{m_1+m_2} & \pi_\infty^{m_2} & -\frac{x}{a}\pi_\infty^{m_2} \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a\pi_\infty^{-v_\infty(a)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a}\pi_\infty^{v_\infty(a)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1+m_2-v_\infty(a)} & \frac{1}{a}\pi_\infty^{m_2+v_\infty(a)} & -\frac{x}{a}\pi_\infty^{m_2} \\ 0 & \pi_\infty^{v_\infty(a)} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1'} & a' & x' \\ 0 & \pi_\infty^{m_2'} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3'} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} m_1' &= m_1 + m_2 - v_\infty(a) < m_1, \\ m_2' &= v_\infty(a) > m_2, \\ m_3' &= m_3. \end{aligned}$$

Da der Wert von m_1 sich also in der Tat mit jedem Schritt reduziert, erhält man nach endlich vielen Schritten eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\tilde{m}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{\tilde{m}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{\tilde{m}_3} \end{pmatrix}$$

und nach Division durch $\min\{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3\}$ sowie einem eventuellen Tausch von Zeilen bzw. Multiplikation mit R oder R^2 hieraus

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \overline{m} > \overline{n} \geq 0 \quad \text{ oder } \quad \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 \\ \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \overline{m} \geq \overline{n} \geq 0.$$

Falls $\overline{n} \geq 1$, ist die gewünschte Gestalt erreicht. Ist $\overline{n} = 0$, so gilt

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R \equiv \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 \\ \pi_\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\overline{m} \geq 1$, und im zweiten Fall

$$\begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 \\ \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R^2 \equiv \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\overline{m}+1} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

falls $\overline{m}+1>1$, bzw.

$$\begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 \\ \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty & 0 \\ \pi_\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

falls $\overline{m}=\overline{n}=0$. □

Korollar 2.1.17 *Es existiert eine 1-zu-1-Korrespondenz*

$$G(\mathbb{F}_q[T])\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^* \longleftrightarrow \mathcal{W}.$$

Beweis Dies folgt aus dem vorangehenden Satz und Lemma 2.1.13. □

Korollar 2.1.18 *Sei $\mathcal{L}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma_0(N)\backslash G(\mathbb{F}_q[T])$. Zu jedem Vertreter X aus $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ gibt es ein $\gamma\in\mathcal{L}$ und ein $W\in\mathcal{W}$ mit $X\equiv\gamma W$ in $G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$.*

Beweis Nach Satz 2.1.16 existiert eine Matrix $W\in\mathcal{W}$, so daß $X\equiv W$ in $G(\mathbb{F}_q[T])\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$, d. h. es gibt $\gamma_0\in G(\mathbb{F}_q[T])$, $\gamma_\infty\in\Gamma_\infty$, $k\in K_\infty^*$ und $\nu\in\mathbb{Z}$ mit

$$X=\gamma_0 W\gamma_\infty R^\nu k.$$

Definitionsgemäß gibt es ferner ein $\gamma\in\mathcal{L}$ mit $\gamma_0\in\Gamma_0(N)\gamma$, so daß

$$X\in\Gamma_0(N)\gamma W\gamma_\infty R^\nu k$$

bzw.

$$X\equiv\gamma W \text{ in } \Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*.$$

□

Um ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ zu berechnen, genügt es daher, sich ein Vertretersystem $\mathcal{L}$ von $\Gamma_0(N)\backslash G(\mathbb{F}_q[T])$ zu beschaffen und die kanonischen Vertreter von γW für $\gamma\in\mathcal{L}$ und $W\in\mathcal{W}$ zu bestimmen. Da der Index von $\Gamma_0(N)$ in $G(\mathbb{F}_q[T])$ endlich ist, enthält auch $\mathcal{L}$ nur endlich viele Matrizen. Auf die praktische Durchführung soll hier verzichtet werden, da dies im Weiteren nicht relevant ist.

Satz 2.1.19 *Sei* $\deg(N)=0$, *dann ist* $f\equiv 0$.

Beweis Nach Korollar 2.1.17 besitzt jede Matrix $X\in G(K_\infty)$ in $G(\mathbb{F}_q[T])\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ einen Vertreter $W\in\mathcal{W}$, d. h. es existiert ein $\tilde\gamma\in G(\mathbb{F}_q[T])$ mit $X\equiv\tilde\gamma W$ in $G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$. Da $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in G(\mathbb{F}_q[T])$, gibt es somit ein $\gamma\in\mathbb{F}_q[T]$ und $m,n\in\mathbb{N}$, so daß

$$X\equiv\gamma\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ in } G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*,$$

und somit folgt die Behauptung mittels Gleichung (2.24) aus Satz 2.1.15. □

Man erhält als weitere Aussage über den Träger harmonischer Koketten:

Satz 2.1.20 *Seien* $\deg(N) \geq 1$, $m, n \in \mathbb{N}$ *und* $X \in \Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$, *dann ist* $f(X) = 0$, *falls* X *in* $G(\mathbb{F}_q[T])\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ *äquivalent ist zu*

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } m > n \geq \deg(N) \text{ oder } m \geq n + \deg(N)$$

oder

$$\begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } m \geq n \geq \deg(N) \text{ oder } m \geq n + \deg(N) - 1.$$

Beweis Gemäß Korollar 2.1.18 gibt es ein $\gamma \in G(\mathbb{F}_q[T])$ und ein $W \in \mathcal{W}$ mit $X \equiv \gamma W$ in $\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$, weshalb $f(X) = f(\gamma W)$. Die Behauptung folgt daher aus Satz 2.1.15:

Angenommen, es gilt $W = \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit

$$m > n \geq 1. \tag{2.29}$$

Nach (2.24) bzw. (2.25) ist $f(\gamma W) = 0$, falls

$$m, n \geq \deg(N) \text{ oder } m \geq \deg(N) + n,$$

und zusammen mit (2.29) und $\deg(N) \geq 1$ ergibt dies die Bedingungen

$$m > n \geq \deg(N) \text{ oder } m \geq \deg(N) + n.$$

Sei nun angenommen, daß $W = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit

$$m \geq n \geq 1. \tag{2.30}$$

Da $\gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(\mathbb{F}_q[T])$, gilt

$$0 = f\left(\gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f(\gamma W)$$

für alle $m, n \geq \deg(N)$ nach (2.24), was wegen $\deg(N) \geq 1$ zusammen mit (2.30) äquivalent ist zu $f(\gamma W) = 0$ für

$$m \geq n \geq \deg(N).$$

Aus (2.30), (2.26) und $\deg(N) \geq 1$ erhält man schließlich $f(\gamma X) = 0$ für alle

$$m \geq \deg(N) + n - 1.$$

□

Hat man eine Matrix $\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ gegeben, so erlaubt der letzte Satz eine Aussage darüber, wann diese zum Träger von f gehören kann, denn ist $\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 \\ \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$ der kanonische Vertreter von X in $G(\mathbb{F}_q[T])\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$, so ermöglicht der Reduktionsalgorithmus aus dem Beweis von Satz 2.1.16 eine Abschätzung von $\overline{m}$ bzw. $\overline{n}$. Dies liefert zusammen mit Satz 2.1.20 eine von m abhängige Beschränkung der möglichen Werte von n. Für den Beweis sollen zuerst zwei Lemmata bereitgestellt werden.

Lemma 2.1.21 *Die Matrix $X \in G(K_\infty)$ sei in $G(\mathbb{F}_q[T])\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ äquivalent zu $\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{m} & 0 \\ \pi_\infty^{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathcal{W}$. Gilt $m+n \geq 3\deg(N)-2$, so ist $f(X)=0$.*

Beweis Für $\deg(N)=0$ ist die Behauptung wegen Satz 2.1.19 trivial. Sei daher $\deg(N) \geq 1$. Angenommen, der Vertreter von X in $\mathcal{W}$ ist $\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d. h. insbesondere $m > n \geq 1$, und es gilt $m+n \geq 3\deg(N)-2$. Falls $n \geq \deg(N)$, so ist $f(X)=0$ nach Satz 2.1.20, und für $n < \deg(N)$ folgt

$$m-n \geq 3\deg(N)-2-2n \geq 3\deg(N)-2-2(\deg(N)-1) \geq \deg(N),$$

also, wieder mit Satz 2.1.20, ebenfalls $f(X)=0$.

Der Beweis für den Fall, daß X äquivalent zu $\begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{m} & 0 \\ \pi_\infty^{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathcal{W}$ ist, verläuft analog. □

Lemma 2.1.22 *Seien m_1, m_2, $m_3 \in \mathbb{N}_0$ und $k := \min\{m_1, m_2, m_3\}$. Ist*

$$X \;=\; \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix} \in G(K_\infty),$$

und

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{W} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 \\ \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$$

der kanonische Vertreter von X in $G(\mathbb{F}_q[T])\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$, so gilt

$$\overline{m}+\overline{n} \geq m_1+m_2+m_3-3k.$$

Beweis Multiplikation von X mit π_∞^{-k} führt auf

$$X' = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1'} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2'} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3'} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1-k} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2-k} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3-k} \end{pmatrix},$$

wobei eines der $m_i - k$, $1 \leq i \leq 3$, gleich 0 ist. Hierbei verringert sich die Bewertung der Determinante um $3k$. Je nach Gestalt von X' kann man die Matrix offensichtlich mittels Zeilenvertauschungen und/oder Multiplikation mit R oder R^2 so umformen, daß das Ergebnis

$\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 \\ \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{W}$ liegt, wobei Zeilenvertauschungen die Bewertung der Determinante nicht ändern; Multiplikation mit R erhöht sie um 1. Da die Bewertung der Determinante des Vertreters in $\mathcal{W}$ gleich $\overline{m}+\overline{n}$ ist, erhält man somit

$$m_1 + m_2 + m_3 - 3k = v_\infty(\det(X')) \leq \overline{m} + \overline{n}.$$

□

Nun läßt sich zeigen:

Satz 2.1.23 *Seien* $X = \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$, *dann ist* $f(X) = 0$, *falls* $n \leq -m - 6\deg(N) + 4$ *oder* $n \geq 2m + 3\deg(N) - 2$, *und* $f(Y) = 0$, *falls* $n \leq -m - 6\deg(N) + 3$ *oder* $n \geq 2m + 3\deg(N)$.

Beweis Für $\deg(N) = 0$ ergibt sich die Behauptung aus Satz 2.1.19, so daß man o. B. d. A. $\deg(N) \geq 1$ annehmen kann.
Sei $C := 3\deg(N) - 2$. Es ist bereits in Satz 2.1.5 gezeigt worden, daß $f(X) = 0$ ist, falls $m \leq 1$. Sei daher nun $m \geq 2$.
Gelte

$$n \leq -2C - m,$$

dann ist n negativ und man kann annehmen, daß X die Gestalt $\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat, da X von links mit Matrizen aus $\Gamma_0(N)$ abgeändert werden darf. Multiplikation von X mit π_∞^{-n} führt auf

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m-n} & u\pi_\infty^{-n} & v\pi_\infty^{-n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{-n} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \tilde{u} & \tilde{v} \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix}$$

mit

$$m_1 = m - n \geq 0,\ m_2 = 0,\ m_3 = -n \geq 0.$$

Wendet man hierauf den Teil des Algorithmus aus dem Beweis von Satz 2.1.16 an, der zur Reduktion von $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ auf 0 dient, erhält man schließlich eine Matrix $X' = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1'} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{m_2'} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3'} \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{aligned} m_1' &\leq m_1 = m - n, \\ m_2' &\geq m_2 = 0, \\ m_3' &\geq m_3 = -n. \end{aligned}$$

Da während der Umformungen keine weiteren Multiplikationen mit Elementen aus K_∞^* erfolgen, bleibt die Determinante erhalten, d. h. es gilt ferner

$$m_1' + m_2' + m_3' = m_1 + m_2 + m_3 = m - 2n. \tag{2.31}$$

Sei nun $k := \min\{m'_1, m'_2, m'_3\}$, dann ist $k = m'_3$ nicht möglich, denn ansonsten wäre

$$m - 2n = m'_1 + m'_2 + m'_3 \geq 3k \geq -3n,$$

also $m \geq -n$ im Widerspruch zu $n \leq -2C - m < -m$. Also ist $k = m'_1$ oder $k = m'_2$. Aus (2.31) und $m'_3 \geq -n$ folgt $m'_1 + m'_2 \leq m - n$. Da $2k \leq m'_1 + m'_2$, ist also $k \leq \dfrac{m-n}{2}$.
Sei W der zu X' äquivalente Vertreter aus $\mathcal{W}$, also

$$W = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } W = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 \\ \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 2.1.22 gilt

$$\overline{m} + \overline{n} \geq m'_1 + m'_2 + m'_3 - 3k = m - 2n - 3k \geq m - 2n - 3\frac{m-n}{2} = \frac{-m-n}{2} \geq C,$$

also $f(X) = 0$ nach Lemma 2.1.21.
Sei nun

$$n \geq 2m + C.$$

Anwendung des Reduktionsalgorithmus aus dem Beweis von Satz 2.1.16 überführt X zuerst in eine Matrix

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m} & \tilde{u} & \tilde{v} \\ 0 & \pi_\infty^{n-l} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{l} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m_1} & \tilde{u} & \tilde{v} \\ 0 & \pi_\infty^{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m_3} \end{pmatrix},$$

wobei $0 \leq l \leq n$, und schließlich in $X' = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m'_1} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{m'_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{m'_3} \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{aligned} m'_1 &\leq m_1 = m, \\ m'_2 &\geq m_2 = n - l, \\ m'_3 &\geq m_3 = l \end{aligned}$$

und

$$m'_1 + m'_2 + m'_3 = m_1 + m_2 + m_3 = m + n. \tag{2.32}$$

Sei wieder $k := \min\{m'_1, m'_2, m'_3\}$ und W der zu X' äquivalente Vertreter aus $\mathcal{W}$, also

$$W = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } W = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{\overline{m}} & 0 \\ \pi_\infty^{\overline{n}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 2.1.22 ergibt

$$\overline{m} + \overline{n} \geq m'_1 + m'_2 + m'_3 - 3k = m + n - 3k.$$

Wegen $k \leq m_1 \leq m$ ist $-3k \geq -3m$, also

$$\overline{m} + \overline{n} \geq m + n - 3m = n - 2m \geq C$$

und daher wieder $f(X) = 0$ gemäß Lemma 2.1.21. Somit ist die Behauptung für $f(X)$ gezeigt, aus der man mit der Harmonizitätsbedingung (**HB2**) die Behauptung für $f(Y)$ erhält. □

2.2 Fourierentwicklung

2.2.1 Vorüberlegungen

Seien $\mathcal{G}$ eine kompakte abelsche Gruppe, $\hat{\mathcal{G}}$ ihre Charaktergruppe, μ ein Haarmaß auf $\mathcal{G}$ und $\varphi \in L^2(\mathcal{G})$, d. h. eine quadratintegrierbare komplexwertige Funktion auf $\mathcal{G}$. Dann besitzt φ eine Fourierentwicklung

$$\varphi(g) = \sum_{\chi \in \hat{\mathcal{G}}} \varphi^*(\chi)\chi(-g) \text{ mit } \varphi^*(\chi) = \int_{\mathcal{G}} \varphi(g)\chi(g)d\mu(g) \tag{2.33}$$

(siehe hierzu [Hi]).

Seien nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, $E_n \in GL_n(\mathbb{F}_q[T])$ die Einheitsmatrix,

$$\Gamma_{F,n} := \left\{ \left(\begin{array}{cc} & a_1 \\ E_{n-1} & \vdots \\ & a_{n-1} \\ 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{F}_q[T] \right\} \subset GL_n(\mathbb{F}_q[T])$$

und $\varphi\colon GL_n(K_\infty)/\Gamma_\infty \to \mathbb{C}$ eine Funktion, welche linksinvariant unter einer Gruppe Γ mit $\Gamma_{F,n} \subseteq \Gamma$ ist, dann gilt für alle $M \in GL_{n-1}(K_\infty)$, $a_i \in K_\infty$, $\lambda_i \in \mathbb{F}_q[T]$, $i = 1, \ldots, n-1$:

$$\varphi\left(\left(\begin{array}{cc} & a_1 \\ M & \vdots \\ & a_{n-1} \\ 0 & 1 \end{array} \right)\right) =$$

$$\varphi\left(\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \lambda_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_{n-1} \\ & 0 & 1 \end{array} \right)\left(\begin{array}{cc} & a_1 \\ M & \vdots \\ & a_{n-1} \\ 0 & 1 \end{array} \right)\right) = \varphi\left(\left(\begin{array}{cc} & a_1 + \lambda_1 \\ M & \vdots \\ & a_{n-1} + \lambda_{n-1} \\ 0 & 1 \end{array} \right)\right).$$

Somit ist die Funktion

$$\varphi_M\colon (K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^{n-1} \to \mathbb{C}, \quad (a_1, \ldots, a_{n-1}) \mapsto \varphi\left(\left(\begin{array}{cc} & a_1 \\ M & \vdots \\ & a_{n-1} \\ 0 & 1 \end{array} \right)\right)$$

wohldefiniert.

Versieht man $(K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^{n-1}$ mit der durch die kanonische Abbildung

$$K_\infty^{n-1} \to (K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^{n-1}, \, (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}) + \mathbb{F}_q[T]^{n-1}$$

gegebenen Quotiententopologie, so ist $(K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^{n-1}$ als Bild der kompakten Menge $(\pi_\infty O_\infty)^{n-1}$ ebenfalls kompakt und somit eine kompakte abelsche Gruppe.

Seien $M_1, \ldots, M_{n-1}$ die Spalten von M und $a = (a_1 \ldots a_{n-1})^T \in (K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^{n-1}$. Aufgrund der Rechtsinvarianz von φ unter Γ_∞ gilt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} M & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} M & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & 0 & \alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \alpha_{n-1} \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} M & a + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i M_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in O_\infty$. Für alle $\tilde{a} \in a + \sum\limits_{i=1}^{n-1} M_i O_\infty$ ist daher $\varphi_M(a) = \varphi_M(\tilde{a})$ und φ_M somit lokal konstant, da O_∞ offen ist. Als lokal konstante Funktion auf einem Kompaktum nimmt φ nur endlich viele verschiedene Werte an, und die Maße der zugehörigen Teilmengen sind jeweils endlich. Folglich gilt $\varphi_M \in L^2((K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^{n-1})$.

Durch

$$\psi_\infty \colon K_\infty \to \mathbb{C}^*, \ \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j \pi_\infty^j \mapsto \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(-u_1)\right)$$

ist ein additiver Charakter auf K_∞ gegeben, und die Charaktergruppe $\widehat{K_\infty}$ von K_∞ ist isomorph zu K_∞ mittels

$$\Phi \colon K_\infty \to \widehat{K_\infty}, \quad x \mapsto (\psi_\infty^{(x)} \colon K_\infty \to \mathbb{C}, \, y \mapsto \psi_\infty(xy)).$$

Hieraus folgt, daß die Charaktergruppe $\hat{\mathcal{G}}$ von $K_\infty/\mathbb{F}_q[T]$ isomorph ist zu $\mathbb{F}_q[T]$, denn sie besteht aus allen Charakteren von $\widehat{K_\infty}$, die auf $\mathbb{F}_q[T]$ trivial sind. Wie eine kurze Rechnung zeigt, sind dies gerade alle Charaktere der Form $\psi_\infty^{(\lambda)}$ mit $\lambda \in \mathbb{F}_q[T]$. Ferner ist (vgl. [Hi]) aufgrund der Kompaktheit von $(K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^{n-1}$ die Charaktergruppe $\widehat{\mathcal{G}_{n-1}}$ von $(K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^{n-1}$ isomorph zum $(n-1)$-fachen direkten Produkt der Charaktergruppe $\hat{\mathcal{G}}$ von $K_\infty/\mathbb{F}_q[T]$ per

$$\Psi \colon (\hat{\mathcal{G}})^{n-1} \to \widehat{\mathcal{G}_{n-1}},$$

$$(\chi_1, \ldots, \chi_{n-1}) \mapsto (\phi \colon (a_1, \ldots, a_{n-1}) \mapsto \phi((a_1, \ldots, a_{n-1})) = \chi_1(a_1) \cdots \chi_{n-1}(a_{n-1})).$$

Somit besitzt φ_M gemäß (2.33) eine Darstellung als Fourierreihe in der Form

$$\varphi_M(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \varphi\left(\begin{pmatrix} & & a_1 \\ & M & \vdots \\ & & a_{n-1} \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\sum_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{F}_q[T]^{n-1}} \varphi^*(M, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} \psi_\infty(\lambda_i a_i) \tag{2.34}$$

mit

$$\varphi^*(M, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) = \int\limits_{(K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^{n-1}} \varphi_M(a_1, \ldots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} \psi_\infty(-\lambda_i a_i) d(a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

2.2.2 Fourierentwicklung $\Gamma_0(N)$-invarianter harmonischer Koketten

Die Ergebnisse des letzten Abschnittes können nun auf f übertragen werden.

Es sei ein additiver Charakter auf $\mathbb{F}_q$ gegeben durch

$$\sigma\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^*,\ a \mapsto \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a)\right).$$

Zu σ sei wie im letzten Abschnitt der additive Charakter ψ_∞ auf K_∞ durch

$$\psi_\infty\colon K_\infty \to \mathbb{C}^*,\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \pi_\infty^j \mapsto \sigma(-a_1)$$

definiert.

Die folgenden Eigenschaften von σ bzw. ψ_∞ werden häufig benutzt werden.

Lemma 2.2.1 *Es gilt* $\sum\limits_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \sigma(\varepsilon) = 0.$

Einen Beweis findet man in [Bö].

Lemma 2.2.2 *Sei $x \in \pi_\infty O_\infty$, dann gilt*

$$\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \psi_\infty(\varepsilon x) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } v_\infty(x) = 1, \\ q, & \textit{falls } v_\infty(x) \geq 2. \end{cases}$$

Beweis Als Element von $\pi_\infty O_\infty$ besitzt x eine Darstellung als $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\pi_\infty^i$ mit $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{F}_q$. Damit gilt

$$\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \psi_\infty(\varepsilon x) = \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \psi_\infty\left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon x_i \pi_\infty^i\right) = \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \sigma(-\varepsilon x_1) = \begin{cases} \sum\limits_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \sigma(\varepsilon), & \text{falls } x_1 \neq 0, \\ \sum\limits_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \sigma(0), & \text{falls } x_1 = 0, \end{cases}$$

und die Behauptung folgt aus Lemma 2.2.1 bzw. der Definition von σ. □

Aus den Überlegungen des vorherigen Abschnittes ergibt sich unmittelbar

Satz 2.2.3 *Die Funktion f besitzt eine Fourierentwicklung der Form*

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) \psi_\infty(\lambda v + \mu w)$$

bzw.

$$f\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m \\ \pi_\infty^n & 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) \psi_\infty(\lambda v + \mu w),$$

wobei die Fourierkoeffizienten gegeben sind durch

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = \int\limits_{(K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^2} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x - \mu y)dxdy$$

und

$$f^*\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^m\\ \pi_\infty^n & 0\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = \int\limits_{(K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^2} f\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^m & x\\ \pi_\infty^n & 0 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x - \mu y)dxdy.$$

Das Haarmaß sei dabei so normiert, daß $K_\infty/\mathbb{F}_q[T]$ das Maß 1 besitzt.

Um die Eindeutigkeit der Fourierkoeffizienten nachweisen zu können, sollen zuerst zwei Hilfsaussagen gezeigt werden.

Lemma 2.2.4 *Sei $m \in \mathbb{Z}$ und gelte $\int\limits_{\pi_\infty O_\infty} dx = 1$, so ist*

$$\int\limits_{\pi_\infty^m O_\infty} dx = q^{-(m-1)}.$$

Beweis Ist $m \geq 1$, so folgt mit der Translationsinvarianz des Haarmaßes

$$1 = \int\limits_{\pi_\infty O_\infty} dx = \sum_{a\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty} \int\limits_{a+\pi_\infty^m O_\infty} dx = \sum_{a\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty} \int\limits_{\pi_\infty^m O_\infty} dx =$$
$$|\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty| \cdot \int\limits_{\pi_\infty^m O_\infty} dx = q^{m-1} \int\limits_{\pi_\infty^m O_\infty} dx,$$

also

$$\int\limits_{\pi_\infty^m O_\infty} dx = q^{-(m-1)}.$$

Falls $m \leq 0$, so folgt ebenfalls mittels der Translationsinvarianz

$$\int\limits_{\pi_\infty^m O_\infty} dx = \sum_{a\in\pi_\infty^m O_\infty/\pi_\infty O_\infty} \int\limits_{a+\pi_\infty O_\infty} dx = \sum_{a\in\pi_\infty^m O_\infty/\pi_\infty O_\infty} \int\limits_{\pi_\infty O_\infty} dx =$$

$$|\pi_\infty^m O_\infty/\pi_\infty O_\infty| \cdot 1 = q^{-m+1}.$$

□

Lemma 2.2.5 *Seien $m \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{F}_q[T]$ und gelte $\int\limits_{\pi_\infty O_\infty} dx = 1$, dann ist*

$$\int\limits_{\pi_\infty^m O_\infty} \psi_\infty(-\lambda x)dx = \begin{cases} q^{-(m-1)}, & \textit{falls } \deg(\lambda) \leq m-2,\\ 0, & \textit{falls } \deg(\lambda) \geq m-1.\end{cases}$$

Beweis Nach Definition von ψ_∞ gilt offensichtlich $\psi_\infty(a) = 1$ für alle $a \in \pi_\infty^2 O_\infty$.
Falls $x \in \pi_\infty^m O_\infty$ und $\deg(\lambda) \leq m-2$, so ist

$$v_\infty(-\lambda x) = v_\infty(x) - \deg(\lambda) \geq m - (m-2) = 2$$

und daher $\psi_\infty(-\lambda x) = 1$, also

$$\int\limits_{\pi_\infty^m O_\infty} \psi_\infty(-\lambda x)dx = \int\limits_{\pi_\infty^m O_\infty} dx = q^{-(m-1)}$$

gemäß Lemma 2.2.4. Falls $\deg(\lambda) \geq m-1$, so erhält man

$$\int\limits_{\pi_\infty^m O_\infty} \psi_\infty(-\lambda x)dx =$$

$$\sum_{x \in \pi_\infty^m O_\infty / \pi_\infty^{\deg(\lambda)+1} O_\infty} \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \int\limits_{\tilde{x} \in \pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} O_\infty} \psi_\infty(-\lambda x - \lambda \varepsilon \pi_\infty^{\deg(\lambda)+1} - \lambda \tilde{x}) d\tilde{x} =$$

$$\sum_{x \in \pi_\infty^m O_\infty / \pi_\infty^{\deg(\lambda)+1} O_\infty} \psi_\infty(-\lambda x) \int\limits_{\tilde{x} \in \pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} O_\infty} \psi_\infty(-\lambda \tilde{x}) d\tilde{x} \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \psi_\infty(-\lambda \varepsilon \pi_\infty^{\deg(\lambda)+1}) = 0,$$

denn es ist $v_\infty(-\lambda \pi_\infty^{\deg(\lambda)+1}) = 1$ und somit $\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \psi_\infty(-\lambda \varepsilon \pi_\infty^{\deg(\lambda)+1}) = 0$ nach Lemma 2.2.2. □

Nun läßt sich zeigen:

Satz 2.2.6 *Die Fourierkoeffizienten aus Satz 2.2.3 sind eindeutig bestimmt.*

Beweis Angenommen, für gegebene $m, n \in \mathbb{Z}$, $u \in K_\infty$ existiert eine Familie komplexer Zahlen $(f^*_{\lambda,\mu})_{\lambda,\, \mu \in \mathbb{F}_q[T]}$, so daß f für alle $v, w \in K_\infty$ eine Darstellung der Form

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{\lambda,\mu \in \mathbb{F}_q[T]} f^*_{\lambda,\mu} \psi_\infty(\lambda v + \mu w)$$

besitzt. Wegen $K_\infty / \mathbb{F}_q[T] \cong \pi_\infty O_\infty$ gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q[T]$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{(K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^2} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\alpha x - \beta y) dx dy &= \\
\int\limits_{(\pi_\infty O_\infty)^2} \sum_{\lambda,\mu \in \mathbb{F}_q[T]} f^*_{\lambda,\mu}\, \psi_\infty(\lambda x + \mu y) \psi_\infty(-\alpha x - \beta y) dx dy &= \\
\sum_{\lambda,\mu \in \mathbb{F}_q[T]} f^*_{\lambda,\mu} \int\limits_{\pi_\infty O_\infty} \psi_\infty(x(\lambda - \alpha)) dx \int\limits_{\pi_\infty O_\infty} \psi_\infty(y(\mu - \beta)) dy.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.2.5 ist

$$\int\limits_{\pi_\infty O_\infty} \psi_\infty(x(\lambda - \alpha)) dx = \begin{cases} 1, & \text{falls } \deg(\lambda - \alpha) \leq -1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also gleich 1 genau dann, wenn $\lambda-\alpha=0$, und 0 sonst. Analog ist $\int\limits_{\pi_\infty O_\infty} \psi_\infty(y(\mu-\beta))dy$ gleich 1, wenn $\mu=\beta$, und ansonsten 0. Somit gilt

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*_{\lambda,\mu} \int\limits_{\pi_\infty O_\infty} \psi_\infty(x(\lambda-\alpha))dx \int\limits_{\pi_\infty O_\infty} \psi_\infty(y(\mu-\beta))dy = f^*_{\alpha,\beta},$$

d. h.

$$f^*_{\alpha,\beta} = \int\limits_{(K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^2} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\alpha x-\beta y)dxdy = f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \alpha, \beta\right).$$

Die Eindeutigkeit der Fourierkoeffizienten $f^*\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^m\\ \pi_\infty^n & 0\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)$ läßt sich analog zeigen. □

Satz 2.2.7 *Seien m, $n\in\mathbb{Z}$, $u\in K_\infty$ und*

$$k := \begin{cases} n, & \textit{falls } u\equiv 0 \bmod \pi_\infty^m O_\infty,\\ n+m-v_\infty(u), & \textit{falls } u\not\equiv 0 \bmod \pi_\infty^m O_\infty.\end{cases}$$

Für die Fourierkoeffizienten von f gilt:

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) =$$

$$\begin{cases} q^{-m-k+2} \sum\limits_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^k O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x-\mu y), & \begin{array}{l}\textit{falls } m,k\geq 2,\\ \deg(\lambda)\leq m-2,\\ \deg(\mu)\leq k-2,\end{array}\\[2ex] q^{-m+1} \sum\limits_{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & x\\ 0 & \pi_\infty^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x), & \begin{array}{l}\textit{falls } m\geq 2, k\leq 1,\\ \deg(\lambda)\leq m-2, \mu=0,\end{array}\\[2ex] 0 & \textit{sonst.}\end{cases}$$

Beweis Es ist $K_\infty/\mathbb{F}_q[T]\cong\pi_\infty O_\infty$, so daß

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = \int\limits_{(\pi_\infty O_\infty)^2} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x-\mu y)dxdy.$$

Gelte $\underline{u\equiv 0 \bmod \pi_\infty^m O_\infty}$, dann ist $\pi_\infty^{-m}u\in O_\infty$ und daher

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\pi_\infty^{-m}u & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Man kann also im Folgenden o. E. $u=0$ setzen.
Falls $\underline{m,n\geq 2}$, so ist

$$\int\limits_{(\pi_\infty O_\infty)^2} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x-\mu y)dxdy =$$

$$\sum_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^n O_\infty}} \int_{\hat{x}\in\pi_\infty^m O_\infty} \int_{\hat{y}\in\pi_\infty^n O_\infty} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x+\hat{x}\\ 0 & \pi_\infty^n & y+\hat{y}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda(x+\hat{x})-\mu(y+\hat{y}))d\hat{x}d\hat{y}.$$

Da f rechtsinvariant unter Γ_∞ ist, gilt für obige $x, y, \hat{x}, \hat{y}$, daß

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x+\hat{x}\\ 0 & \pi_\infty^n & y+\hat{y}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & \pi_\infty^{-m}\hat{x}\\ 0 & 1 & \pi_\infty^{-n}\hat{y}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\in\Gamma_\infty}\right) = f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

und somit

$$\sum_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^n O_\infty}} \int_{\hat{x}\in\pi_\infty^m O_\infty} \int_{\hat{y}\in\pi_\infty^n O_\infty} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x+\hat{x}\\ 0 & \pi_\infty^n & y+\hat{y}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda(x+\hat{x})-\mu(y+\hat{y}))d\hat{x}d\hat{y} =$$

$$\sum_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^n O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) \int_{\hat{x}\in\pi_\infty^m O_\infty} \int_{\hat{y}\in\pi_\infty^n O_\infty} \psi_\infty(-\lambda\hat{x}-\mu\hat{y})d\hat{x}d\hat{y}\ \psi_\infty(-\lambda x-\mu y).$$

Betrachtet man nun

$$\int_{\hat{x}\in\pi_\infty^m O_\infty} \int_{\hat{y}\in\pi_\infty^n O_\infty} \psi_\infty(-\lambda\hat{x}-\mu\hat{y})d\hat{x}d\hat{y} = \int_{\pi_\infty^m O_\infty} \psi_\infty(-\lambda\hat{x})d\hat{x} \int_{\pi_\infty^n O_\infty} \psi_\infty(-\mu\hat{y})d\hat{y},$$

so ist dies gemäß Lemma 2.2.5 gleich 0, falls $\deg(\lambda) \geq m-1$ oder $\deg(\mu) \geq n-1$, und gleich q^{-m-n+2} sonst.

Für $\underline{m \geq 2,\ n \leq 1}$ liegt $\pi_\infty^{-n}y$ in O_∞ für alle $y \in \pi_\infty O_\infty$, so daß

$$\int_{(\pi_\infty O_\infty)^2} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x-\mu y)dxdy =$$

$$\sum_{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty} \int_{\hat{x}\in\pi_\infty^m O_\infty} \int_{y\in\pi_\infty O_\infty} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x+\hat{x}\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda(x+\hat{x})-\mu y)d\hat{x}dy =$$

$$\sum_{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty} \int_{\substack{\hat{x}\in\pi_\infty^m O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x+\hat{x}\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & -\pi_\infty^{-m}\hat{x}\\ 0 & 1 & -\pi_\infty^{-n}y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\in\Gamma_\infty}\right)\psi_\infty(-\lambda(x+\hat{x})-\mu y)d\hat{x}dy =$$

$$\sum_{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x\\ 0 & \pi_\infty^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x)\int_{\pi_\infty^m O_\infty}\psi_\infty(-\lambda\hat{x})d\hat{x}\int_{\pi_\infty O_\infty}\psi_\infty(-\mu y)dy.$$

Nach Lemma 2.2.5 ist dies 0, falls $\deg(\lambda) \geq m-1$ oder falls $\mu \neq 0$, und für $\mu = 0$ und $\deg(\lambda) \leq m-2$ erhält man

$$q^{-m+1} \sum_{x \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^m O_\infty} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & x \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\lambda x).$$

Falls $\underline{m \leq 1}$, so verschwindet f nach Satz 2.1.5 auf allen Matrizen $\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und folglich ist

$$f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = 0.$$

Sei nun $\underline{u \not\equiv 0 \bmod \pi_\infty^m O_\infty}$. Für $\underline{m \geq 2}$ gilt

$$f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = \int_{(\pi_\infty O_\infty)^2} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\lambda x - \mu y) dx dy =$$

$$\sum_{x \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^m O_\infty} \int_{\hat{x} \in \pi_\infty^m O_\infty} \int_{y \in \pi_\infty O_\infty} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x+\hat{x} \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\lambda(x+\hat{x}) - \mu y) d\hat{x} dy =$$

$$\sum_{x \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^m O_\infty} \int_{\substack{\hat{x} \in \pi_\infty^m O_\infty \\ y \in \pi_\infty O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x+\hat{x} \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\pi_\infty^{-m}\hat{x} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\lambda(x+\hat{x}) - \mu y) d\hat{x} dy =$$

$$\sum_{x \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^m O_\infty} \psi_\infty(-\lambda x) \int_{\pi_\infty O_\infty} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\mu y) dy \int_{\pi_\infty^m O_\infty} \psi_\infty(-\lambda \hat{x}) d\hat{x}.$$

Das letzte Integral ist gemäß Lemma 2.2.5 gleich 0, falls $\deg(\lambda) \geq m-1$, und gleich q^{-m+1} sonst. Man betrachte nun

$$\int_{\pi_\infty O_\infty} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\mu y) dy. \tag{2.35}$$

Da $u \notin \pi_\infty^m O_\infty$, ist $v_\infty(u) \leq m-1$, und daher ist, für alle $\hat{y}$ aus $\pi_\infty^{n+m-v_\infty(u)} O_\infty$, einerseits

$$v_\infty(u \pi_\infty^{-n-m} \hat{y}) = v_\infty(u) + (-n-m) + v_\infty(\hat{y}) \geq 0,$$

andererseits

$$v_\infty(\pi_\infty^{-n} \hat{y}) \geq -n + (n+m-v_\infty(u)) = m - v_\infty(u) \geq 0,$$

d. h. $u\pi_\infty^{-n-m}\hat{y}$ und $\pi_\infty^{-n}\hat{y}$ liegen in O_∞, so daß für alle diese $\hat{y}$ gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y+\hat{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y+\hat{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & u\pi_\infty^{-n-m}\hat{y} \\ 0 & 1 & -\pi_\infty^{-n}\hat{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \Gamma_\infty}\right) =$$

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right). \tag{2.36}$$

Somit ist, falls $\underline{n + m - v_\infty(u) \geq 2}$,

$$\int\limits_{\pi_\infty O_\infty} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\mu y)dy =$$

$$\sum_{y \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^{n+m-v_\infty(u)} O_\infty} \int\limits_{\pi_\infty^{n+m-v_\infty(u)} O_\infty} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y+\hat{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\mu(y+\hat{y}))d\hat{y} =$$

$$\sum_{y \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^{n+m-v_\infty(u)} O_\infty} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\mu y) \int\limits_{\pi_\infty^{n+m-v_\infty(u)} O_\infty} \psi_\infty(-\mu\hat{y})d\hat{y},$$

was nach Lemma 2.2.5 für $\deg(\mu) \geq n + m - v_\infty(u) - 1$ den Wert 0 hat und den Wert

$$q^{-n-m+v_\infty(u)+1} \sum_{y \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^{n+m-v_\infty(u)} O_\infty} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\mu y)$$

für $\deg(\mu) \leq n + m - v_\infty(u) - 2$.

Im Fall $\underline{n + m - v_\infty(u) \leq 1}$ ergibt sich

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

für jedes $y \in \pi_\infty O_\infty$ nach einer zu (2.36) analogen Rechnung, und damit

$$\int\limits_{\pi_\infty O_\infty} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\mu y)dy = f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \int\limits_{\pi_\infty O_\infty} \psi_\infty(-\mu y)dy,$$

was nach Lemma 2.2.5 gleich 0 ist für $\mu \neq 0$ und gleich

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

für $\mu = 0$.

Für $\underline{m \leq 1}$ erhält man wieder direkt aus Satz 2.1.5, daß

$$f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = 0.$$

$\square$

Hieraus folgt unmittelbar:

Korollar 2.2.8 *Die Fourierreihe*

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w)$$

ist eine endliche Summe.

Unter Berücksichtigung von Satz 2.1.23 und Satz 2.1.19 erhält man außerdem

Korollar 2.2.9 *Seien $m,n\in\mathbb{Z}$ mit $n\le -m-6\deg(N)+4$ oder $n\ge 2m+3\deg(N)-2$, dann ist $f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=0$ für alle $\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]$.*

Man hat ferner

Satz 2.2.10 *Zur Vereinfachung der Notation sei* $\deg(0):=-1$ *gesetzt. Seien $m,n\in\mathbb{N}$ mit $m,n\ge 2$, $\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]$ und $\deg(\lambda)\le m-2,\deg(\mu)\le n-2$, d. h. es gebe $s,t\ge 0$ mit*

$$m=\deg(\lambda)+2+s,\ n=\deg(\mu)+2+t.$$

Dann gilt:

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=$$

$$\begin{cases} q^{-m-n+\deg(\lambda)+\deg(\mu)+4}f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & 0\\ 0 & \pi_\infty^{\deg(\mu)+2}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) & \textit{falls } s=t,\\ q^{-2n+2\deg(\mu)+4}f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-n+\deg(\mu)+2} & 0\\ 0 & \pi_\infty^{\deg(\mu)+2}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) & \textit{falls } s>t,\\ q^{-2m+2\deg(\lambda)+4}f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & 0\\ 0 & \pi_\infty^{n-m+\deg(\lambda)+2}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) & \textit{falls } s<t.\end{cases}$$

Beweis Falls $s=0$ oder $t=0$, so ist die Behauptung offensichtlich wahr. Sei also angenommen, daß $s,t\ge 1$. Seien $L:=\deg(\lambda)$ und $M:=\deg(\mu)$ (es sei an die für diesen Satz getroffene Definition $\deg(0)=-1$ erinnert). Nach Satz 2.2.7 ist

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=q^{-m-n+2}\sum_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^n O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x-\mu y)=$$

$$q^{-m-n+2}\sum_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2} O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{M+2} O_\infty}}\ \sum_{\substack{\hat{x}\in\pi_\infty^{L+2} O_\infty/\pi_\infty^{m} O_\infty\\ \hat{y}\in\pi_\infty^{M+2} O_\infty/\pi_\infty^{n} O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x+\hat{x}\\ 0 & \pi_\infty^n & y+\hat{y}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda(x+\hat{x})-\mu(y+\hat{y})).$$

Wegen $v_\infty(\lambda\hat{x})\ge 2$, $v_\infty(\mu\hat{y})\ge 2$ und $\psi_\infty(a)=1$ für alle $a\in\pi_\infty^2 O_\infty$ ist

$$\psi_\infty(-\lambda(x+\hat{x})-\mu(y+\hat{y}))=\psi_\infty(-\lambda x-\mu y)\psi_\infty(-\lambda\hat{x})\psi_\infty(-\mu\hat{y})=\psi_\infty(-\lambda x-\mu y).$$

Es folgt

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=$$

$$q^{-m-n+2}\sum_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2}O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{M+2}O_\infty}}\psi_\infty(-\lambda x-\mu y)\sum_{\substack{\hat{x}\in\pi_\infty^{L+2}O_\infty/\pi_\infty^{m}O_\infty\\ \hat{y}\in\pi_\infty^{M+2}O_\infty/\pi_\infty^{n}O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x+\hat{x}\\ 0 & \pi_\infty^n & y+\hat{y}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=$$

$$q^{-m-n+2}\sum_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2}O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{M+2}O_\infty}}\psi_\infty(-\lambda x-\mu y)\cdot$$

$$\sum_{\substack{\hat{x}\in\pi_\infty^{L+2}O_\infty/\pi_\infty^{m-1}O_\infty\\ \hat{y}\in\pi_\infty^{M+2}O_\infty/\pi_\infty^{n-1}O_\infty}}\sum_{\substack{\varepsilon\in\mathbb{F}_q\\ \delta\in\mathbb{F}_q}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x+\hat{x}+\varepsilon\pi_\infty^{m-1}\\ 0 & \pi_\infty^n & y+\hat{y}+\delta\pi_\infty^{n-1}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

was unter Benutzung der Harmonizitätsbedingung (**HB2**) gleich

$$q^{-m-n+2}\sum_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2}O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{M+2}O_\infty}}\psi_\infty(-\lambda x-\mu y)\cdot$$

$$\sum_{\substack{\hat{x}\in\pi_\infty^{L+2}O_\infty/\pi_\infty^{m-1}O_\infty\\ \hat{y}\in\pi_\infty^{M+2}O_\infty/\pi_\infty^{n-1}O_\infty}}\sum_{\delta\in\mathbb{F}_q} -f\left(\begin{pmatrix}0 & \pi_\infty^{m-1} & x+\hat{x}\\ \pi_\infty^n & 0 & y+\hat{y}+\delta\pi_\infty^{n-1}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

ist, und Benutzung von Harmonizitätsbedingung (**HB3**) sowie $m=L+2+s,\ n=M+2+t$ ergibt

$$q^{-m-n+2}\sum_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2}O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{M+2}O_\infty}}\psi_\infty(-\lambda x-\mu y)\sum_{\substack{\hat{x}\in\pi_\infty^{L+2}O_\infty/\pi_\infty^{L+2+(s-1)}O_\infty\\ \hat{y}\in\pi_\infty^{M+2}O_\infty/\pi_\infty^{M+2+(t-1)}O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-1} & 0 & x+\hat{x}\\ 0 & \pi_\infty^{n-1} & y+\hat{y}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Diese Schritte kann man so lange wiederholen, wie $s,t\geq 1$.
Falls $s=t$, so führt s-maliges Ausführen schließlich auf

$$q^{-m-n+2}\sum_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2}O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{M+2}O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{L+2} & 0 & x\\ 0 & \pi_\infty^{M+2} & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x-\mu y)=$$

$$q^{-m-n+L+M+4}f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{L+2} & 0\\ 0 & \pi_\infty^{M+2}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right).$$

Falls $s>t$, so kann man obige Umformung insgesamt t-mal durchführen und endet bei

$$q^{-m-n+2}\sum_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2}O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{M+2}O_\infty}}\psi_\infty(-\lambda x-\mu y)\sum_{\hat{x}\in\pi_\infty^{L+2}O_\infty/\pi_\infty^{L+2+(s-t)}O_\infty} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{L+2+s-t} & 0 & x+\hat{x}\\ 0 & \pi_\infty^{M+2} & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Wegen $\psi_\infty(x) = \psi_\infty(x+\hat{x})$ für alle $x \in \pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2}O_\infty$, $\hat{x} \in \pi_\infty^{L+2}O_\infty/\pi_\infty^{L+2+(s-t)}O_\infty$, und $s-t = m-n-L+M$ ist dies gleich

$$q^{-m-n+2} \sum_{\substack{\tilde{x}\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{m-n+M+2}O_\infty \\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{M+2}O_\infty}} \psi_\infty(-\lambda\tilde{x}-\mu y) f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m-n+M+2} & 0 & \tilde{x} \\ 0 & \pi_\infty^{M+2} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$q^{-2n+2M+4} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m-n+M+2} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{M+2} \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right).$$

Analog erhält man im Fall $s < t$ durch s-maliges Ausführen

$$q^{-m-n+2} \sum_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2}O_\infty \\ \tilde{y}\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{n-m+L+2}O_\infty}} \psi_\infty(-\lambda x-\mu\tilde{y}) f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{L+2} & 0 & x \\ 0 & \pi_\infty^{n-m+L+2} & \tilde{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$q^{-2m+2L+4} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{L+2} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{n-m+L+2} \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right).$$

□

Satz 2.2.11 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$, $n \leq 1$, $\deg(\lambda) \leq m-2$ und $\deg(0) := -1$, dann ist*

$$f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) =$$

$$\begin{cases} q^{-2m+2\deg(\lambda)+4} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{n-m+\deg(\lambda)+2} \end{pmatrix}, \lambda, 0\right), & \text{falls } \mu = 0, \\ 0, & \text{falls } \mu \neq 0. \end{cases}$$

Beweis Sei $L := \deg(\lambda)$. Die Behauptung für $\mu \neq 0$ folgt direkt aus Satz 2.2.7. Für $\mu = 0$ erhält man aus Satz 2.2.7 und der Tatsache

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & x \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon\pi_\infty^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in\Gamma_0(N) \text{ wegen } n\leq 1} \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & x \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & x \\ 0 & \pi_\infty^n & \varepsilon\pi_\infty^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ für alle } \varepsilon \in \mathbb{F}_q$$

die Gleichheit

$$f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, 0\right) = q^{-m+1} \sum_{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & x \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\lambda x) =$$

$$q^{-m+1} \sum_{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2}O_\infty} \sum_{\hat{x}\in\pi_\infty^{L+2}O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty} q^{-1} \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & x+\hat{x} \\ 0 & \pi_\infty^n & \varepsilon\pi_\infty^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\lambda(x+\hat{x})).$$

Da aus $v_\infty(\lambda\hat{x}) \geq 2$ folgt, daß $\psi_\infty(-\lambda(x+\hat{x})) = \psi_\infty(-\lambda x)$, ist dies gleich

$$q^{-m} \sum_{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2}O_\infty} \psi_\infty(-\lambda x) \sum_{\hat{x}\in\pi_\infty^{L+2}O_\infty/\pi_\infty^{m-1}O_\infty} \sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & 0 & x+\hat{x}+\delta\pi_\infty^{m-1}\\ 0 & \pi_\infty^n & \varepsilon\pi_\infty^{n-1}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Unter Ausnutzung der Harmonizitätsbedingungen (**HB2**) und (**HB3**) erhält man daraus wie im Beweis des letzten Satzes

$$q^{-m} \sum_{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2}O_\infty} \psi_\infty(-\lambda x) \sum_{\hat{x}\in\pi_\infty^{L+2}O_\infty/\pi_\infty^{m-1}O_\infty} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-1} & 0 & x+\hat{x}\\ 0 & \pi_\infty^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Wiederholte Anwendung derselben Prozedur liefert schließlich

$$q^{-m+1-(m-(L+2))} \sum_{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2}O_\infty} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{L+2} & 0 & x\\ 0 & \pi_\infty^{n-(m-(L+2))} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x) =$$

$$q^{-2m+L+3} \sum_{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^{L+2}O_\infty} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{L+2} & 0 & x\\ 0 & \pi_\infty^{n-m+L+2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x);$$

dies ist nach Satz 2.2.7 gleich

$$q^{-2m+2\deg(\lambda)+4} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & 0\\ 0 & \pi_\infty^{n-m+\deg(\lambda)+2}\end{pmatrix}, \lambda, 0\right).$$

□

Satz 2.2.12 *Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ und $u \in K_\infty$. Es gilt*

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \varepsilon\lambda, \delta\mu\right) = f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & \varepsilon\delta^{-1}u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) \text{ für alle } \varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q^*,\ \lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T],$$

insbesondere also

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \varepsilon\lambda, \varepsilon\mu\right) = f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) \text{ für alle } \varepsilon\in\mathbb{F}_q^*,\ \lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T].$$

Beweis Setzt man

$$v_m(u) := \begin{cases} m, & \text{falls } u\in\pi_\infty^m O_\infty,\\ v_\infty(u) & \text{sonst,}\end{cases}$$

und $k := m + n - v_m(u)$, so wurde in Satz 2.2.7 gezeigt, daß für die Fourierkoeffizienten von f gilt:

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) =$$

$$\begin{cases} q^{-m-k+2} \sum\limits_{\substack{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty\\ y\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^k O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & x\\ 0 & \pi_\infty^n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x - \mu y), & \begin{array}{l}\text{falls } m,k\geq 2,\\ \deg(\lambda)\leq m-2,\\ \deg(\mu)\leq k-2,\end{array}\\[2ex] q^{-m+1} \sum\limits_{x\in\pi_\infty O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & x\\ 0 & \pi_\infty^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\infty(-\lambda x), & \begin{array}{l}\text{falls } m\geq 2, k\leq 1,\\ \deg(\lambda)\leq m-2, \mu=0,\end{array}\\[2ex] 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Seien zunächst $m,\, k \geq 2$, $\deg(\lambda) \leq m-2$ und $\deg(\mu) \leq k-2$. Für jedes $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$ ist $x \mapsto \alpha^{-1}x$ ein Isomorphismus von $\pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^m O_\infty$, so daß

$$f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \varepsilon\lambda, \delta\mu\right) = \sum_{\substack{x \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^m O_\infty \\ y \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^k O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\varepsilon\lambda x - \delta\mu y) =$$

$$\sum_{\substack{x \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^m O_\infty \\ y \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^k O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & \varepsilon^{-1}x \\ 0 & \pi_\infty^n & \delta^{-1}y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\lambda x - \mu y) =$$

$$\sum_{\substack{x \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^m O_\infty \\ y \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^k O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & \varepsilon^{-1}x \\ 0 & \pi_\infty^n & \delta^{-1}y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\lambda x - \mu y) =$$

$$\sum_{\substack{x \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^m O_\infty \\ y \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^k O_\infty}} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & \varepsilon\delta^{-1}u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\lambda x - \mu y).$$

Zusammen mit einer analogen Rechnung für $\sum\limits_{x \in \pi_\infty O_\infty / \pi_\infty^m O_\infty} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & x \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\infty(-\varepsilon\lambda x)$ im Fall $m \geq 2$, $k \leq 1$, $\deg(\lambda) \leq m-2$ und $\mu = 0$ folgt die Behauptung. □

2.3 Charakterisierung der Harmonizität über die Fourierkoeffizienten

Sei

$$v_\infty((x\ y)) := \min\{v_\infty(x), v_\infty(y)\} \text{ für alle } (x\, y) \in K_\infty^2,$$

d. h. insbesondere

$$v_\infty\left((\lambda\ \mu)\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}\right) = \min\{v_\infty(\lambda\pi_\infty^m), v_\infty(\lambda u + \mu\pi_\infty^n)\}$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q[T]$ sowie alle $m, n \in \mathbb{Z}$ und $u \in K_\infty$.

Bemerkung 2.3.1 *Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q[T]$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $u \in K_\infty$ und $\zeta \in O_\infty$ gilt*

$$v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}\right) = v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u + \zeta\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}\right).$$

Beweis Es ist

$$v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}\right) = \min\{v_\infty(\lambda\pi_\infty^m),\ v_\infty(\lambda u + \mu\pi_\infty^n)\}$$

sowie

$$v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u + \zeta\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}\right) = \min\{v_\infty(\lambda\pi_\infty^m),\ v_\infty(\lambda u + \mu\pi_\infty^n + \lambda\zeta\pi_\infty^m)\},$$

und es gilt

$$v_\infty(\lambda u + \mu\pi_\infty^n + \lambda\zeta\pi_\infty^m) \geq \min\{v_\infty(\lambda u + \mu\pi_\infty^n), v_\infty(\lambda\zeta\pi_\infty^m)\},$$

wobei

$$v_\infty(\lambda\zeta\pi_\infty^m) \geq v_\infty(\lambda\pi_\infty^m).$$

Falls $\min\{v_\infty(\lambda\pi_\infty^m),\, v_\infty(\lambda u + \mu\pi_\infty^n)\} = v_\infty(\lambda\pi_\infty^m)$, so ist demnach auch

$$\min\{v_\infty(\lambda\pi_\infty^m),\, v_\infty(\lambda u + \mu\pi_\infty^n + \lambda\zeta\pi_\infty^m)\} = v_\infty(\lambda\pi_\infty^m)$$

und die Behauptung bewiesen.
Ist andererseits $v_\infty(\lambda u + \mu\pi_\infty^n) < v_\infty(\lambda\pi_\infty^m)$, so ist auch $v_\infty(\lambda u + \mu\pi_\infty^n) < v_\infty(\lambda\zeta\pi_\infty^m)$, so daß auch in diesem Falle die Minima gleich sind. □

Satz 2.3.2 *Die Einschränkung*

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z},\, u, v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty,\, w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty \right\} \to \mathbb{C}$$

von f ist linksinvariant unter Γ_Δ und hat eine Fourierentwicklung

$$\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{\lambda,\mu \in \mathbb{F}_q[T]} \tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) \psi_\infty(\lambda v + \mu w),$$

wobei die Fourierkoeffizienten für alle $m, n \in \mathbb{Z}$, $u \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q[T]$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = \tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u + \gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu - \gamma\lambda\right) \text{ für alle } \gamma \in \mathbb{F}_q[T], \tag{IV}$$

$$\tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = \begin{cases} q^2 \tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty \\ 0 & \pi_\infty^{n+1} \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right), & \text{falls } v_\infty\left((\lambda\ \mu)\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}\right) \geq 2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{F1}$$

$$\tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = \begin{cases} q \sum\limits_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u + \varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right), & \text{falls } v_\infty(\lambda\pi_\infty^m) \geq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{F2}$$

Beweis Seien $m,\, n \in \mathbb{Z}$, $u,\, v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty$ und $w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty$. Die Linksinvarianz von $\tilde{f}$ unter Γ_Δ folgt offensichtlich aus der Linksinvarianz von f unter $\Gamma_0(N)$. Somit besitzt $\tilde{f}$ eine Fourierentwicklung

$$\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{\lambda,\mu \in \mathbb{F}_q[T]} \tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) \psi_\infty(\lambda v + \mu w).$$

Aus der Linksinvarianz von $\tilde{f}$ unter Γ_Δ erhält man

$$\tilde{f}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \tilde{f}\left(\begin{pmatrix}1 & \gamma & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \tilde{f}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n & v+w\gamma\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

für alle $\gamma \in \mathbb{F}_q[T]$. Fourierentwicklung liefert nun einerseits

$$\tilde{f}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} \tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda v + \mu w),$$

andererseits, unter Benutzung der Bijektion $\mathbb{F}_q[T] \to \mathbb{F}_q[T],\ \mu \mapsto \mu + \lambda\gamma$,

$$\tilde{f}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \tilde{f}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n & v+w\gamma\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} \tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda v + (\lambda\gamma+\mu)w) \overset{\nu=\mu+\lambda\gamma}{=}$$

$$\sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{F}_q[T]} \tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \nu-\lambda\gamma\right)\psi_\infty(\lambda v + \nu w),$$

woraus durch Koeffizientenvergleich (**IV**) folgt.

Die Harmonizitätsbedingungen (**HB3**) und (**HB2**) ergeben, daß für alle $\lambda,\ \mu \in \mathbb{F}_q[T]$, alle $m,\ n \in \mathbb{Z}$ und alle $u, v, w \in K_\infty$ gilt

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) \overset{(\mathbf{HB3})}{=} -\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix}u\pi_\infty & \pi_\infty^m & \varepsilon u+v\\ \pi_\infty^{n+1} & 0 & \varepsilon\pi_\infty^n+w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) \overset{(\mathbf{HB2})}{=}$$

$$\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}\sum_{\delta\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty & \delta\pi_\infty^m+\varepsilon u+v\\ 0 & \pi_\infty^{n+1} & \varepsilon\pi_\infty^n+w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

und Fourierentwicklung beider Seiten führt auf

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda v + \mu w) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\ \sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda(\delta\pi_\infty^m+\varepsilon u+v)+\mu(\varepsilon\pi_\infty^n+w)) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\left(f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\lambda(\delta\pi_\infty^m+\varepsilon u)+\mu\varepsilon\pi_\infty^n)\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w).$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\lambda\delta\pi_\infty^m+\lambda\varepsilon u+\mu\varepsilon\pi_\infty^n). \quad (2.37)$$

Falls $v_\infty\left((\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2$, ist $\sum\limits_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\lambda\delta\pi_\infty^m+\lambda\varepsilon u+\mu\varepsilon\pi_\infty^n)=q^2$ nach Lemma 2.2.2. Ist $v_\infty\left((\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\leq 1$, so gibt es ein $k\in\mathbb{N}_0$, so daß $v_\infty\left((\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\pi_\infty^k\right)=1$, und durch Iteration und die Multiplikativität von ψ_∞ erhält man

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=$$

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+k+1} & u\pi_\infty^{k+1}\\ 0 & \pi_\infty^{n+k+1}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\prod_{i=0}^{k}\left(\sum_{\delta_i\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\lambda\delta_i\pi_\infty^{m+i})\sum_{\varepsilon_i\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty((\lambda u+\mu\pi_\infty^n)\varepsilon_i\pi_\infty^i)\right).$$

Je nachdem, ob $v_\infty(\lambda\pi_\infty^{m+k})=1$ oder $v_\infty((\lambda u+\mu\pi_\infty^n)\pi_\infty^k)=1$, ist $\sum\limits_{\delta_k\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\lambda\delta_k\pi_\infty^{m+k})=0$ oder $\sum\limits_{\varepsilon_k\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty((\lambda u+\mu\pi_\infty^n)\varepsilon_k\pi_\infty^k)=0$ nach Lemma 2.2.2. Es folgt

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=0.$$

Insgesamt ist also

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=\begin{cases}q^2f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right), & \text{falls } v_\infty\left((\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Weiterhin erhält man aus den Harmonizitätsbedingungen

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\overset{(\mathbf{HB1})}{=}-\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}f\left(\begin{pmatrix}\varepsilon\pi_\infty^m+u & \pi_\infty^m & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\overset{(\mathbf{HB2})}{=}$$

$$\sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q}f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & \varepsilon\pi_\infty^m+u & \delta\pi_\infty^m+v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Durch Fourierentwicklung ergibt sich hieraus die Summationsbedingung

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=\sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q}f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda\delta\pi_\infty^m).$$

Wie eben erhält man daraus mit Lemma 2.2.2 und Induktion, daß

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=\begin{cases}q\sum\limits_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right), & \text{falls } v_\infty(\lambda\pi_\infty^m)\geq 2,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Da offensichtlich $f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=\tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)$ ist, ersieht man hieraus die Gültigkeit der Bedingungen (**F1**) und (**F2**).

$\square$

Umgekehrt gilt die folgende Aussage.

Satz 2.3.3 *Zu* $M = \{(m,n,u,\lambda,\mu) \mid m,n \in \mathbb{Z},\ u \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty,\ \lambda,\mu \in \mathbb{F}_q[T]\}$ *sei eine Familie komplexer Zahlen* $\left(\tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\right)_M$ *gegeben, die den Bedingungen*

$$\tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) = \tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu-\gamma\lambda\right) \text{ für alle } \gamma \in \mathbb{F}_q[T], \qquad \textbf{(IV)}$$

$$\tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) = \begin{cases} q^2\,\tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right), & \text{falls } v_\infty\left((\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right) \geq 2,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases} \qquad \textbf{(F1)}$$

$$\tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) = \begin{cases} q\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}\tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right), & \text{falls } v_\infty(\lambda\pi_\infty^m) \geq 2,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \qquad \textbf{(F2)}$$

genügen.
Definiert man eine Funktion

$$\tilde{f}\colon \left\{\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ \middle|\ m,n\in\mathbb{Z}, u,v\in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty, w\in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty\right\} \to \mathbb{C}$$

durch

$$\tilde{f}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) := \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w)$$

und setzt sie mittels

$$f\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^m & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) := -\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}\tilde{f}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u & \varepsilon\pi_\infty^m+v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) \qquad \textbf{(S)}$$

zu einer Funktion f *auf*

$$\left\{\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ \middle|\ m,n\in\mathbb{Z}, u,v\in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty, w\in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty\right\}\cup$$
$$\left\{\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^m & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ \middle|\ m,n\in\mathbb{Z}, u\in\pi_\infty^{m+1}O_\infty, v\in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty, w\in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty\right\}$$

fort, so kann man f *als Funktion*

$$f: G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^* \to \mathbb{C}$$

auffassen, und diese Funktion ist linksinvariant unter Γ_Δ *und harmonisch.*

Beweis Für jede Wahl von $\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}$ sind nur endlich viele $f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)$ ungleich 0, denn für hinreichend großen Grad von λ und μ ist sicher $v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}\right) \leq 1$. Somit konvergiert die zur Definition von $\tilde{f}$ benutzte Reihe in jedem Fall.
Aufgrund der Gestalt eines vollständigen Repräsentantensystems von $G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ (vgl. Satz 1.2.2) ist f wohldefiniert, und nach Voraussetzung (**S**) erfüllt f die Harmonizitätsbedingung (**HB2**).
Nach Definition besitzt f eine Fourierentwicklung der Form

$$f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda v + \mu w)$$

mit

$$f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = \tilde{f}^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right).$$

Man betrachte $-\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix} \varepsilon\pi_\infty^m + u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Anwendung von (**S**) ergibt

$$-\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix} \varepsilon\pi_\infty^m + u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & \varepsilon\pi_\infty^m + u & \delta\pi_\infty^m + v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

und die Fourierentwicklung davon ist

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\ \sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & \varepsilon\pi_\infty^m + u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda(\delta\pi_\infty^m + v) + \mu w). \tag{2.38}$$

Für $v_\infty(\lambda\pi_\infty^{m+1}) \leq 1$ gilt $f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & \varepsilon\pi_\infty^m + u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = 0$ nach (**F2**). Anwendung von Lemma 2.2.2 ergibt

$$\sum_{\delta\in\mathbb{F}_q} \psi_\infty(\lambda\delta\pi_\infty^m) = 0$$

für $v_\infty(\lambda\pi_\infty^{m+1}) = 2$ und

$$\sum_{\delta\in\mathbb{F}_q} \psi_\infty(\lambda\delta\pi_\infty^m) = q$$

für $v_\infty(\lambda\pi_\infty^{m+1}) \geq 3$. In letzterem Fall ist andererseits

$$\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u + \varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) = q^{-1} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)$$

wegen (**F2**); somit ist der Ausdruck (2.38) gleich

$$\sum_{\substack{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty(\lambda\pi_\infty^{m+1})\geq 3}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda v + \mu w)$$

und dies ist wegen (**F2**) wiederum gleich

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w) = f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

d. h. die Harmonizitätsbedingung (**HB1**) ist erfüllt.
Wieder mit (**S**) erhält man außerdem

$$-\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix}u\pi_\infty & \pi_\infty^m & \varepsilon u+v\\ \pi_\infty^{n+1} & 0 & \varepsilon\pi_\infty^n+w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty & \delta\pi_\infty^m+\varepsilon u+v\\ 0 & \pi_\infty^{n+1} & \varepsilon\pi_\infty^n+w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

und dies ist gleich

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\ \sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda\delta\pi_\infty^m+\lambda\varepsilon u+\mu\varepsilon\pi_\infty^n)\psi_\infty(\lambda v+\mu w).$$

Für $v_\infty\left((\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix}\right)\leq 1$ ist $f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=0$.
Ist $v_\infty\left((\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix}\right)=2$, also $v_\infty\left((\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m} & u\\ 0 & \pi_\infty^{n}\end{pmatrix}\right)=1$, so ist

$$\sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\lambda\delta\pi_\infty^m+\varepsilon(\lambda u+\mu\pi_\infty^n))=0,$$

und im Fall $v_\infty\left((\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix}\right)\geq 3$ ist

$$\sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\lambda\delta\pi_\infty^m+\varepsilon(\lambda u+\mu\pi_\infty^n))=q^2$$

nach Lemma 2.2.2. Somit folgt aus (**F1**), daß f auch der Bedingung (**HB3**) genügt.
Sei $H=\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in\Gamma_\Delta$, dann erhält man mittels Fourierentwicklung

$$f\left(H\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+x\pi_\infty^n & v+wx+y\\ 0 & \pi_\infty^n & w+z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+x\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda v+(\lambda x+\mu)w)\underbrace{\psi_\infty(\lambda y+\mu z)}_{=1}\overset{(\mathbf{IV})}{=}$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\lambda x+\mu\right)\psi_\infty(\lambda v+(\lambda x+\mu)w) =$$

$$\sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\nu\right)\psi_\infty(\lambda v+\nu w) = f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Hieraus und aus (**S**) folgt die Linksinvarianz von f unter Γ_Δ.

□

Zum Abschluß dieses Abschnitts sollen noch zwei Eigenschaften der Fourierkoeffizienten von f gezeigt werden, falls f endlichen Träger modulo $\Gamma_0(N)$ besitzt.

Satz 2.3.4 *Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ und $u \in K_\infty$. Es gilt*

$$f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, 0, \mu\right) = 0 \text{ für alle } \mu \in \mathbb{F}_q[T],\ m \le n+1 \tag{2.39}$$

und

$$f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, 0, 0\right) = 0. \tag{2.40}$$

Beweis Zu (2.39):
Ist $m \le 1$, so folgt die Behauptung aus Satz 2.2.7. Sei daher $m \ge 2$ angenommen. Weil f harmonisch ist, gilt gemäß (**F2**), daß

$$f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, 0, \mu\right) = q \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u + \varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, 0, \mu\right),$$

da für $\lambda = 0$ immer $v_\infty(\lambda\pi_\infty^m) \ge 2$ ist, unabhängig von m. Wegen der $\Gamma_0(N)$-Invarianz gilt außerdem unter Benutzung von (**IV**) die Beziehung

$$f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, 0, \mu\right) = f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & \gamma\pi_\infty^n + u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, 0, \mu\right)$$

für alle $\gamma \in \mathbb{F}_q[T]$. Falls $m \le n$, so ist $\gamma = \varepsilon\pi_\infty^{m-n} \in \mathbb{F}_q[T]$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$, so daß (**F2**) und (**IV**) zusammen

$$f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, 0, \mu\right) = q \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u + \varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, 0, \mu\right) =$$

$$q \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, 0, \mu\right) = q^2 f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, 0, \mu\right)$$

liefern. Da $f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, 0, \mu\right) = 0$, erhält man per Induktion die Behauptung.

Zu (2.40):
Falls $m \le 1$, so ist $f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, 0, 0\right) = 0$ nach Satz 2.2.7.

Sei nun $m \ge 2$ angenommen. Da $v_\infty\left((0\ \ 0)\begin{pmatrix} \pi_\infty^j & a \\ 0 & \pi_\infty^k \end{pmatrix}\right) \ge 2$ für alle $j, k \in \mathbb{Z}$ und alle $a \in K_\infty$, liefert wiederholte Anwendung von (**F1**) die Beziehung

$$f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty & u\pi_\infty^{-(m-1)} \\ 0 & \pi_\infty^{n-(m-1)} \end{pmatrix}, 0, 0\right) = q^{2(m-1)} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, 0, 0\right),$$

die linke Seite verschwindet aber gemäß Satz 2.2.7. □

Bemerkung 2.3.5 *Gleichung* (2.40) *ist das Äquivalent zum Verschwinden in den Spitzen bei klassischen Spitzenformen.*

Wie in der Einleitung beschrieben, läßt sich das Verschwinden in den Spitzen bei klassischen Spitzenformen adelisch formulieren als

$$\int\limits_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} \phi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right) dx = 0 \text{ für alle } g \in GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}).$$

Überträgt man diese Formulierung auf $G(\mathbb{A}_K)$, erhält man die Bedingungen

$$\int\limits_{(K\backslash\mathbb{A}_K)^2} f\left(\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} g\right) dxdy = 0,$$
$$\int\limits_{(K\backslash\mathbb{A}_K)^2} f\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} g\right) dxdy = 0$$

für alle $g \in G(\mathbb{A}_K)$ (siehe z. B. [Bu], Kap. 3.3), und Projektion auf $G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ mittels des starken Approximationssatzes ergibt

$$\int\limits_{(K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^2} f\left(\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} g\right) dxdy = 0,$$
$$\int\limits_{(K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^2} f\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} g\right) dxdy = 0$$

für alle $g \in G(K_\infty)$. Da sowohl $\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ in Γ_Δ liegen, ergibt sich das Verschwinden der Integrale aus der Linksinvarianz von f unter Γ_Δ, aus

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, 0, 0\right) = \int\limits_{(K_\infty/\mathbb{F}_q[T])^2} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) dvdw = 0$$

und der Tatsache, daß f eindeutig durch die Werte auf Matrizen der Form $\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ bestimmt ist.

Kapitel 3

Konstruktion harmonischer Koketten

3.1 Explizite Konstruktion zweier Γ_Δ-invarianter harmonischer Koketten

Satz 2.3.3 stellt eine Methode bereit, um Γ_Δ-invariante harmonische Koketten zu konstruieren. Dies soll im Folgenden an zwei konkreten Beispielen demonstriert werden.

Definition und Satz 3.1.1 *Seien $\lambda,\ \mu \in \mathbb{F}_q[T]$, $\lambda \neq 0$. Für $m,\ n \in \mathbb{Z}$, $u,\ v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty$ und $w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty$ seien*

$$
\begin{aligned}
f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) &:= \begin{cases} q^{-2m}, & \textit{falls } v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}\right) \geq 2, \\ 0 & \textit{sonst}, \end{cases} \\
f_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &:= f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) \psi_\infty(\lambda v + \mu w)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
F_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &:= \sum_{\gamma \in \mathbb{F}_q[T]} f_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \\
F_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^{m-1} & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &:= -\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v+\varepsilon\pi_\infty^{m-1} \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad (3.1) \\
&= -\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^{m-1} & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z_\varepsilon\right),
\end{aligned}
$$

so ist $F_{(\lambda,\mu)}\colon G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^* \to \mathbb{C}$ eine Γ_Δ-linksinvariante harmonische Funktion.

Beweis Aus

$$
F_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{\gamma \in \mathbb{F}_q[T]} f_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =
$$

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]} f_{(\lambda,\mu)}\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n & v+\gamma w\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\right) =$$
$$\sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda v+(\lambda\gamma+\mu)w)$$

sieht man, daß die Summe auf der rechten Seite immer endlich ist, denn für hinreichend großen Grad von γ ist (wegen $\lambda\neq 0$) sicher $v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\leq 1$, und daß $F_{(\lambda,\mu)}$ eine Fourierentwicklung mit den Fourierkoeffizienten

$$F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\alpha,\beta\right) = \begin{cases} f^*\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\lambda,\mu\right), & \text{falls } (\alpha,\beta)=(\lambda,\mu+\gamma\lambda) \\ & \text{für ein } \gamma\in\mathbb{F}_q[T], \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

besitzt. Für $\alpha\neq\lambda$ oder $\beta\notin\mu+\lambda\mathbb{F}_q[T]$ erfüllt $F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\alpha,\beta\right)$ offensichtlich (**IV**), (**F1**) und (**F2**). Sei daher angenommen, daß ein $\gamma\in\mathbb{F}_q[T]$ existiert mit $(\alpha,\beta)=(\lambda,\mu+\gamma\lambda)$. Für $\delta\in\mathbb{F}_q[T]$ ist

$$\begin{aligned}
F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\delta\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\alpha,\beta\right) &= F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\delta\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\lambda,\mu+\gamma\lambda\right) = \\
f^*\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+(\gamma+\delta)\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\lambda,\mu\right) &= F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\lambda,\mu+(\gamma+\delta)\lambda\right) = \\
F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\alpha,\beta+\delta\alpha\right), &
\end{aligned}$$

also (**IV**) ebenfalls erfüllt.
Wegen

$$v_\infty\left((\lambda\ \ \mu+\gamma\lambda)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right) = v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)$$

für alle $\gamma\in\mathbb{F}_q[T]$ ist

$$\begin{aligned}
F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\alpha,\beta\right) &= F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\lambda,\mu+\gamma\lambda\right) = \\
f^*\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\lambda,\mu\right) &= 0
\end{aligned}$$

für alle $\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}$ mit $v_\infty\left((\alpha\ \ \beta)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\leq 1$, und somit sind (**F1**) sowie (**F2**) erfüllt. Sei daher angenommen, daß $v_\infty\left((\alpha\ \ \beta)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2$. Dann ist auch $v_\infty\left((\alpha\ \ \beta)\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix}\right)\geq 2$, und es gilt

$$\begin{aligned}
F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix}\right),\alpha,\beta\right) &= F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix}\right),\lambda,\mu+\gamma\lambda\right) = \\
f^*\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty+\gamma\pi_\infty^{n+1}\\ 0 & \pi_\infty^{n}\end{pmatrix}\right),\lambda,\mu\right) &= q^{-2(m+1)} = q^{-2}f^*\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\lambda,\mu\right) = \\
q^{-2}F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\lambda,\mu+\gamma\lambda\right) &= q^{-2}F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right),\alpha,\beta\right)
\end{aligned}$$

d. h. $F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right)$ genügt der Bedingung (**F1**).
Aus

$$v_\infty\left((\alpha\ \ \beta)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right) = v_\infty\left((\lambda\ \ \mu+\gamma\lambda)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2$$

folgt offensichtlich

$$v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2$$

für alle $\varepsilon\in\mathbb{F}_q$, und daher

$$\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right) &= \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu+\gamma\lambda\right) =\\
\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) &= q\cdot q^{-2(m+1)} =\\
q^{-1}\cdot f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m} & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) &= q^{-1}F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu+\gamma\lambda\right) =\\
q^{-1}F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right).&
\end{aligned}$$

Somit genügen die $F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right)$ auch Bedingung (**F2**).

Da also die Fourierkoeffizienten $F^*_{(\lambda,\mu)}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right)$ von $F_{(\lambda,\mu)}$ die Bedingungen (**IV**), (**F1**) und (**F2**) erfüllen, folgt die Behauptung aus Satz 2.3.3. □

Definition und Satz 3.1.2 *Seien* $\mathfrak{a}\in K_\infty$ *und* $\lambda,\,\mu\in\mathbb{F}_q[T]$ *mit* $\lambda\neq 0$. *Für* $m,\,n\in\mathbb{Z}$, $u,\,v\in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty$ *und* $w\in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty$ *seien*

$$g^*_{\mathfrak{a}}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) := \begin{cases} q^{-m-n}, & \textit{falls } v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2\\ & \textit{und } u\equiv\mathfrak{a}\pi_\infty^n \bmod \pi_\infty^m O_\infty,\\ 0 & \textit{sonst,}\end{cases}$$

$$g_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) := g^*_{\mathfrak{a}}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w)$$

und

$$\begin{aligned}
G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) &:= \sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]} g_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}\left(\begin{pmatrix}1 & \gamma & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right),\\
G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^{m-1} & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) &:= -\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v+\varepsilon\pi_\infty^{m-1}\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= -\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^{m-1} & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Z_\varepsilon\right),
\end{aligned}$$

so ist $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}\colon G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*\to\mathbb{C}$ *eine* Γ_Δ*-linksinvariante harmonische Funktion.*

Beweis Wie im Beweis von Satz 3.1.1 sieht man, daß die $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}$ definierenden Summen endlich sind. Aus der Definition von $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}$ ergibt sich

$$G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]} g_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}\left(\begin{pmatrix}1 & \gamma & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$
$$\sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]} g_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n & v+\gamma w\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$
$$\sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]} g_{\mathfrak{a}}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda v+(\lambda\gamma+\mu)w),$$

d. h. $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}$ besitzt eine Fourierentwicklung mit Fourierkoeffizienten

$$G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right) = \begin{cases} g_{\mathfrak{a}}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right), & \text{falls } (\alpha,\beta)=(\lambda,\mu+\gamma\lambda)\\ & \text{für ein } \gamma\in\mathbb{F}_q[T],\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Es ist klar, daß $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right)$ für $\alpha\neq\lambda$ oder $\beta\notin\mu+\lambda\mathbb{F}_q[T]$ die Bedingungen (**IV**), (**F1**) und (**F2**) erfüllt. Es sei daher angenommen, daß ein $\gamma\in\mathbb{F}_q[T]$ existiert mit $(\alpha,\beta)=(\lambda,\mu+\gamma\lambda)$. Wie im Beweis von Satz 3.1.1 läßt sich zeigen, daß $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}^*$ der Bedingung (**IV**) genügt, und für $v_\infty\left((\alpha\ \ \beta)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\leq 1$ auch den Bedingungen (**F1**) und (**F2**). Es gelte deswegen nun zusätzlich $v_\infty\left((\alpha\ \ \beta)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2$. Somit ist auch $v_\infty\left((\alpha\ \ \beta)\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix}\right)\geq 2$ und $v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2$ für alle $\varepsilon\in\mathbb{F}_q$.
Wegen $u+\gamma\pi_\infty^n\equiv\mathfrak{a}\pi_\infty^n \bmod \pi_\infty^m O_\infty$ genau dann, wenn $u\pi_\infty+\gamma\pi_\infty^{n+1}\equiv\mathfrak{a}\pi_\infty^{n+1} \bmod \pi_\infty^{m+1}O_\infty$, ist

$$g_{\mathfrak{a}}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) = g_{\mathfrak{a}}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty+\gamma\pi_\infty^{n+1}\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=0,$$

falls $u+\gamma\pi_\infty^n\not\equiv\mathfrak{a}\pi_\infty^n \bmod \pi_\infty^m O_\infty$, und

$$g_{\mathfrak{a}}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) = q^{-m-n} = q^2 g_{\mathfrak{a}}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty+\gamma\pi_\infty^{n+1}\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right),$$

falls $u\equiv\mathfrak{a}\pi_\infty^n \bmod \pi_\infty^m O_\infty$. Hieraus folgt, daß $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right)$ der Bedingung (**F1**) genügt.
Ist

$$u+\gamma\pi_\infty^n\equiv\mathfrak{a}\pi_\infty^n \bmod \pi_\infty^m O_\infty,$$

so gibt es genau ein $\varepsilon\in\mathbb{F}_q$, so daß

$$u+\gamma\pi_\infty^n+\varepsilon\pi_\infty^m\equiv\mathfrak{a}\pi_\infty^n \bmod \pi_\infty^{m+1}O_\infty.$$

Gilt andererseits

$$u+\gamma\pi_\infty^n\not\equiv\mathfrak{a}\pi_\infty^n \bmod \pi_\infty^m O_\infty,$$

so ist auch

$$u + \gamma\pi_\infty^n + \varepsilon\pi_\infty^m \not\equiv \mathfrak{a}\pi_\infty^n \bmod \pi_\infty^{m+1}O_\infty$$

für alle $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$. Damit erhält man für $u + \gamma\pi_\infty^n \not\equiv \mathfrak{a}\pi_\infty^n \bmod \pi_\infty^m O_\infty$ die Gleichung

$$\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} g_\mathfrak{a}^* \left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u + \gamma\pi_\infty^n + \varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu \right) = g_\mathfrak{a}^* \left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u + \gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu \right) = 0,$$

und im Falle $u + \gamma\pi_\infty^n \equiv \mathfrak{a}\pi_\infty^n \bmod \pi_\infty^m O_\infty$ ergibt sich

$$\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} g_\mathfrak{a}^* \left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u + \gamma\pi_\infty^n + \varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu \right) = q^{-m-n-1} = q^{-1} g_\mathfrak{a}^* \left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u + \gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu \right).$$

Hieraus folgt, daß $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}^* \left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \alpha, \beta \right)$ auch der Bedingung (**F2**) genügt, und die Behauptung folgt aus Satz 2.3.3. □

Satz 3.1.3 *Für alle $\delta \in \mathbb{F}_q[T]$ gilt $F_{(\lambda,\mu)} = F_{(\lambda,\mu+\delta\lambda)}$ und $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu} = G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu+\delta\lambda}$.*

Beweis Sei $\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$. Nach Definition gilt

$$F_{(\lambda,\mu+\delta\lambda)} \left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]} f^* \left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u + \gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu + \delta\lambda \right) \psi_\infty(\lambda v + (\mu + \delta\lambda + \gamma\lambda)w) =$$

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]} f^* \left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u + (\delta + \gamma)\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu \right) \psi_\infty(\lambda v + (\mu + (\delta + \gamma)\lambda)w),$$

und unter Verwendung der Bijektion $\gamma \mapsto \tilde{\gamma} = \delta + \gamma$ von $\mathbb{F}_q[T]$ ist dies gleich

$$\sum_{\tilde{\gamma}\in\mathbb{F}_q[T]} f^* \left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u + \tilde{\gamma}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu \right) \psi_\infty(\lambda v + (\mu + \tilde{\gamma}\lambda)w) = F_{(\lambda,\mu)} \left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Zusammen mit (3.1) ist damit die Behauptung gezeigt. Der Beweis von $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu} = G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu+\delta\lambda}$ verläuft analog. □

3.2 Erzeugung $\Gamma_0(N)$-invarianter Funktionen

Seien λ und $\mu \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\lambda \neq 0$. Aus $F_{(\lambda,\mu)}$ bzw. $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}$ sollen im Folgenden durch Summation über gewisse Nebenklassen $\Gamma_0(N)$-linksinvariante Funktionen konstruiert werden. Aufgrund des hieraus resultierenden Problems der Konvergenz der entstehenden Summen werden zuerst die Funktionen $F_{(\lambda,\mu)}$ und $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}$ mithilfe einer komplexen Zahl s so zu $F_{(\lambda,\mu),s}$ bzw. $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ modifiziert, daß $\lim_{s\to1} F_{(\lambda,\mu),s} = F_{(\lambda,\mu)}$ und $\lim_{s\to1} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s} = G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu}$ gilt.

Definition und Satz 3.2.1 *Für $s \in \mathbb{C}$ sei $F_{(\lambda,\mu),s}\colon G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^* \to \mathbb{C}$ wie folgt definiert: Für $m,\, n \in \mathbb{Z}$, $u,\, v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty$ und $w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty$ sei*

$$
\begin{aligned}
f_s^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) &:= \begin{cases} q^{-2ms}, & \textit{falls } v_\infty\left((\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2,\\ 0 & \textit{sonst,}\end{cases}\\
f_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) &:= f_s^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w),\\
F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) &:= \sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]} f_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}1 & \gamma & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^{m-1} & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) &:= -\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v+\varepsilon\pi_\infty^{m-1}\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= -\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^{m-1} & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Z_\varepsilon\right).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$F_{(\lambda,\mu),s}$ ist eine Γ_Δ-linksinvariante Funktion und besitzt eine Fourierentwicklung mit den Fourierkoeffizienten

$$
F^*_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right) = \begin{cases} f_s^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right), & \textit{falls } (\alpha,\beta)=(\lambda,\mu+\gamma\lambda)\\ & \textit{für ein } \gamma\in\mathbb{F}_q[T],\\ 0 & \textit{sonst,}\end{cases}
$$

welche der Bedingung (**IV**) *genügen. Anstelle von* (**F1**) *und* (**F2**) *hat man die Gleichungen*

$$
F^*_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right) = \begin{cases} q^{2s}\, F^*_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix},\alpha,\beta\right), & \textit{falls } v_\infty\left((\alpha\ \beta)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2,\\ 0 & \textit{sonst,}\end{cases}
\tag{3.3}
$$

und

$$
F^*_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right) = \begin{cases} q^{2s-1}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F^*_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right), & \textit{falls } v_\infty(\alpha\pi_\infty^m)\geq 2,\\ 0 & \textit{sonst,}\end{cases}
\tag{3.4}
$$

die im Fall $s=1$ in (**F1**) *bzw.* (**F2**) *übergehen.*

Definition und Satz 3.2.2 *Die Funktion $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\colon G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^* \to \mathbb{C}$ sei für $s \in \mathbb{C}$ folgendermaßen gegeben: Seien $\mathfrak{a} \in K_\infty$ und $\lambda,\ \mu \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\lambda \neq 0$ sowie $\frac{\mu}{\lambda} + \mathfrak{a} \neq 0$ fest gewählt. Für $m,\ n \in \mathbb{Z}$, $u,\ v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty$ und $w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty$ sei*

$$g_{\mathfrak{a},s}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) := \begin{cases} q^{-(m+n)s}, & \text{falls } v_\infty\left((\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right) \geq 2\\ & \text{und } u \equiv \mathfrak{a}\pi_\infty^n \bmod \pi_\infty^m O_\infty,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

sowie

$$g_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) := g_{\mathfrak{a},s}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda v + \mu w),$$

dann ist durch

$$\begin{aligned} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) &:= \sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]} g_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(\begin{pmatrix}1 & \gamma & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right),\\ G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^{m-1} & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) &:= -\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v+\varepsilon\pi_\infty^{m-1}\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= -\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^{m-1} & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Z_\varepsilon\right)\end{aligned}$$

eine Γ_Δ-linksinvariante Funktion definiert, deren Fourierkoeffizienten

$$G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}^*(X,\alpha,\beta) = \begin{cases} g_{\mathfrak{a},s}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right), & \text{falls } (\alpha,\beta) = (\lambda,\mu+\gamma\lambda)\\ & \text{für ein } \gamma\in\mathbb{F}_q[T],\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

der Bedingung (**IV**) *genügen. Anstelle von* (**F1**) *und* (**F2**) *erhält man*

$$G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right) = \begin{cases} q^{2s}\, G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u\pi_\infty\\ 0 & \pi_\infty^{n+1}\end{pmatrix},\alpha,\beta\right), & \text{falls } v_\infty\left((\alpha\ \beta)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases} \tag{3.5}$$

und

$$G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right) = \begin{cases} q^s\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right), & \text{falls } v_\infty(\alpha\pi_\infty^m)\geq 2,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases} \tag{3.6}$$

die für $s = 1$ wiederum in (**F1**) *bzw.* (**F2**) *übergehen.*

Beweis Der Nachweis der Eigenschaften erfolgt für Satz 3.2.2 analog zu Satz 3.1.2 und für Satz 3.2.1 analog zu Satz 3.1.1. □

Satz 3.2.3 *Für alle* $\delta \in \mathbb{F}_q[T]$ *gilt* $F_{(\lambda,\mu),s} = F_{(\lambda,\mu+\delta\lambda),s}$ *und* $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s} = G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu+\delta\lambda,s}$.

Beweis Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Satz 3.1.3. □

Mittels $F_{(\lambda,\mu),s}$ bzw. $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ sollen nun die eingangs erwähnten $\Gamma_0(N)$-linksinvarianten Funktionen definiert werden. Allerdings wird hier aus technischen Gründen die Gruppe $\Gamma_0(N)$ durch die Untergruppe $\Gamma_0^{(1)}(N)$ der Matrizen mit Determinante 1 ersetzt. Rein formal lautet die Definition

$$\mathcal{F}_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) := \sum_{A \in \Gamma_\Delta \backslash \Gamma_0^{(1)}(N)} F_{(\lambda,\mu),s}\left(A \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

resp.

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) := \sum_{A \in \Gamma_\Delta \backslash \Gamma_0^{(1)}(N)} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(A \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Nimmt man an, daß die Summen absolut konvergieren, so handelt es sich offensichtlich um $\Gamma_0^{(1)}(N)$-linksinvariante Funktionen, da eine Linksmultiplikation des Argumentes mit einer Matrix aus $\Gamma_0^{(1)}(N)$ einer Umsummation entspricht.

Für die folgenden Rechnungen kann man ohne Einschränkung davon ausgehen, daß im Argument $X = \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einträge v und w aus $\pi_\infty O_\infty$ stammen, denn Linksmultiplikation von X mit einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\Delta \subset \Gamma_0^{(1)}(N)$ mit $\delta, \varepsilon \in \mathbb{F}_q[T]$ erlaubt es, v und w um beliebige Polynome abzuändern.

Satz 3.2.4 *Die Funktionen* $\mathcal{F}_{(\lambda,\mu),s}$ *und* $\mathcal{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ *konvergieren absolut für hinreichend großen Realteil von s. Dabei konvergiert* $\mathcal{F}_{(\lambda,\mu),s}$ *für* $Re(s) > 4$ *und* $\mathcal{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ *für* $Re(s) > \frac{8}{3}$.

Beweis Aus Satz 2.1.16 folgt, daß es zu $X = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{m'} & u & v \\ 0 & \pi_\infty^{n'} & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_\infty)$ ein $\tilde{A}_0 \in G(\mathbb{F}_q[T])$ und ein W aus $\mathcal{W}$, d. h. $W = \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $m > n \geq 1$ oder $W = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^m & 0 \\ \pi_\infty^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $m \geq n \geq 1$, gibt, so daß $X \equiv \tilde{A}_0 W$ in $G(K_\infty)/\Gamma_\infty \langle R \rangle K_\infty^*$. Da man durch Linksmultiplikation mit einer Matrix aus $G(\mathbb{F}_q[T])$ Zeilen vertauschen kann, gibt es daher ein

$$Y = \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } m, n \geq 1$$

und ein $A_0 \in G(\mathbb{F}_q[T])$ mit $X \equiv A_0 Y$ modulo $\Gamma_\infty \langle R \rangle K_\infty^*$.

Es ist

$$\mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{A \in \Gamma_\Delta \backslash \Gamma_0^{(1)}(N)} F_{(\lambda,\mu),s}\left(A \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Die Summe auf der rechten Seite läßt sich in sechs Teilsummen zerlegen, je nachdem, auf welche Standardform modulo $\Gamma_\infty K_\infty^*$ man die Matrix $A \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bringen kann, denn mit

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, m,\, n \in \mathbb{Z},\, u,\, v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty,\, w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty \right\}$$

liegt $A \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in genau einer der Mengen S, SR, SR^2, SQ, SQR, SQR^2 (vgl. Satz 1.2.1). Analog kann man $\mathcal{Q}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ in sechs Teilsummen zerlegen.

Betrachtet man die Zerlegung von $\mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}$ in diese Teilsummen, so sieht man, daß es aufgrund der Definition von $F_{(\lambda,\mu),s}$ genügt, den Summanden

$$\sum_{\substack{A \in \Gamma_\Delta \backslash \Gamma_0^{(1)}(N) \\ AX \in S}} F_{(\lambda,\mu),s}(AX)$$

zu betrachten. Hierbei ist die Notation „$AX \in S$“ so zu verstehen, daß es einen Vertreter der Klasse AX gibt, der in S liegt.
Wegen $AX \equiv AA_0Y$ mod $\Gamma_\infty \langle R \rangle K_\infty^*$ kann man obige Summation ersetzen durch Summation über alle $AA_0 \in \Gamma_\Delta \backslash \Gamma_0^{(1)}(N) A_0$ mit $(AA_0)Y \in S$, d. h. es gilt

$$\sum_{\substack{A \in \Gamma_\Delta \backslash \Gamma_0^{(1)}(N) \\ AX \in S}} F_{(\lambda,\mu),s}(AX) = \sum_{\substack{\tilde{A} \in \Gamma_\Delta \backslash \Gamma_0^{(1)}(N) A_0 \\ \tilde{A}Y \in S}} F_{(\lambda,\mu),s}(\tilde{A}Y).$$

Mit $\sigma =$Re(s) und $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ erhält man

$$\left| \sum_{\tilde{A} | \tilde{A}Y \in S} F_{(\lambda,\mu),s}(\tilde{A}Y) \right| \leq$$

$$\sum_{\tilde{A}} \sum_{\gamma \in \mathbb{F}_q[T]} \left| f_s^* \left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+\deg(ei-fh)+\deg(i)} & \left(\frac{bi-ch}{ei-fh} + \gamma\right) \pi_\infty^{n-\deg(ei-fh)+2\deg(i)} \\ 0 & \pi_\infty^{n-\deg(ei-fh)+2\deg(i)} \end{pmatrix}, \lambda, \mu \right) \right| =$$

$$\sum_{\tilde{A}} \sum_{\gamma \in \mathbb{F}_q[T]} q^{-2(m+\deg(ei-fh)+\deg(i))\sigma}$$

mit Summation über alle $\tilde{A} \in \Gamma_\Delta \backslash \Gamma_0^{(1)}(N)A_0$ und $\gamma \in \mathbb{F}_q[T]$, die den Bedingungen

$$\deg(g) < m + \deg(i),\ \deg(h) < n + \deg(i), \tag{3.7}$$

$$\deg(di - fg) + n < \deg(ei - fh) + m, \tag{3.8}$$

$$\deg(ei - fh) \geq \deg(\lambda) - m - \deg(i) + 2, \tag{3.9}$$

$$v_\infty\left(\lambda\left(\frac{bi - ch}{ei - fh} + \gamma\right) + \mu\right) + n - \deg(ei - fh) + 2\deg(i) \geq 2 \tag{3.10}$$

genügen, wobei (3.7) und (3.8) gemeinsam äquivalent sind zu $\tilde{A}Y \in S$ (vgl. Satz 1.2.3), und (3.9) und (3.10) sich aus der Definition von $F_{(\lambda,\mu),s}$ ergeben.
Sei im Folgenden

$$k := \deg(i) \quad \text{und} \quad l := \deg(ei - fh).$$

Aus (3.7) folgt insbesondere $i \neq 0$. Da man $\tilde{A}$ von links mit Γ_Δ abändern, also insbesondere ein Vielfaches der dritten zur zweiten Zeile addieren darf, kann man

$$\deg(f) < k \tag{3.11}$$

annehmen. Wegen (3.8) ist auch $ei - fh \neq 0$. Der maximal mögliche Grad des Polynoms fh ist wegen (3.7) und (3.11) gleich $n + 2k - 2$, woraus für $l > n + 2k - 2$ folgt, daß $l = \deg(ei)$ bzw. $\deg(e) = l - k$. Ist dagegen $l \leq n + 2k - 2$, so muß entsprechend $\deg(ei) \leq n + 2k - 2$ gelten und daher $\deg(e) \leq n + k - 2$. Man erhält

$$\deg(e) \begin{cases} \leq n + k - 2, & \text{falls } l \leq n + 2k - 2, \\ = l - k, & \text{falls } l > n + 2k - 2. \end{cases} \tag{3.12}$$

Bedingung (3.8) ist äquivalent zu $\deg(di - fg) < l + m - n$. Analog zu oben erhält man im Fall $\deg(di) > m + 2k - 2 \geq \deg(fg)$ die Abschätzung $l + m - n > \deg(di - fg) = \deg(d) + k$, also gilt

$$\deg(d) \leq \max\{m + k - 2,\ l + m - n - k - 1\}. \tag{3.13}$$

Mit

$$m + k - 2 \leq l + m - n - k - 1 \quad \text{bzw.} \quad n + 2k - 1 \leq l$$

folgt

$$\deg(d) \leq \begin{cases} m + k - 2, & \text{falls } l \leq n + 2k - 2, \\ l + m - n - k - 1, & \text{falls } l > n + 2k - 2. \end{cases} \tag{3.14}$$

Durch Linksmultiplikation mit einer geeigneten Matrix aus Γ_Δ kann man für jedes $\delta \in \mathbb{F}_q[T]$ das δ-fache der dritten zur ersten Zeile von $\tilde{A}$ addieren. Hierdurch ändert sich $\frac{bi-ch}{ei-fh}$ additiv um δ, so daß man o. B. d. A. davon ausgehen kann, daß $\frac{bi-ch}{ei-fh} \in \pi_\infty O_\infty$. Weiterhin kann man $\deg(\lambda) > \deg(\mu)$ annehmen aufgrund von Satz 3.2.3, d. h. falls $\gamma \neq 0$, so ist

$$v_\infty\left(\lambda\left(\frac{bi - ch}{ei - fh} + \gamma\right) + \mu\right) = v_\infty(\lambda\gamma),$$

und Gleichung (3.10) ist äquivalent zu

$$\deg(\gamma) \leq n + 2k - l - \deg(\lambda) - 2, \tag{3.15}$$

woraus insbesondere

$$n + 2k - l - \deg(\lambda) - 2 \geq 0$$

folgt, was bedeutet, daß $\gamma \neq 0$ nur möglich ist, wenn $l \leq n+2k-2-\deg(\lambda)$. Andernfalls kann es entweder gar kein γ oder ausschließlich $\gamma = 0$ geben, damit (3.10) erfüllt ist. Zusammenfassend ergibt sich

$$|\{\gamma \in \mathbb{F}_q[T] \mid \gamma \text{ erfüllt } (3.10)\}| \leq \begin{cases} q^{n+2k-l-\deg(\lambda)-1}, & \text{falls } l \leq n+2k-2-\deg(\lambda), \\ 1, & \text{falls } l > n+2k-2-\deg(\lambda). \end{cases} \tag{3.16}$$

Seien nun $k,\ l \in \mathbb{N}_0$ und

$$A(k,l) = \left|\left\{\tilde{A},\ \gamma \mid \tilde{A}Y,\ \gamma \text{ genügen } (3.7)-(3.10),\ \deg(i)=k,\ \deg(ei-fh)=l\right\}\right|. \tag{3.17}$$

Es gilt offensichtlich

$$\left|\sum_{\tilde{A}|\tilde{A}Y\in S} F_{(\lambda,\mu),s}(\tilde{A}Y)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} A(k,l)q^{-2(m+l+k)\sigma}.$$

Aus Korollar 1.4.2 folgt, daß die Äquivalenzklasse von $\tilde{A}$ von der ersten Zeile der Matrix unabhängig ist. Es genügt daher, die Anzahl der möglichen Einträge $d,\ldots,i$ sowie die Möglichkeiten für γ abzuschätzen.

Für $l \leq n+2k-2-\deg(\lambda)$ erhält man

$$A(k,l) \leq \underbrace{q^{m+k-1}}_{d}\underbrace{q^{n+k-1}}_{e}\underbrace{q^{k}}_{f}\underbrace{q^{m+k}}_{g}\underbrace{q^{n+k}}_{h}\underbrace{q^{k+1}}_{i}\underbrace{q^{n+2k-l-\deg(\lambda)-1}}_{\gamma} = q^{2m+3n-\deg(\lambda)-2+8k-l}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n+2k-2-\deg(\lambda)} A(k,l)q^{-2(m+l+k)\sigma} &\leq \\ C_1\sum_{k=0}^{\infty} q^{(8-2\sigma)k}\sum_{l=0}^{\infty} q^{(-1-2\sigma)l} &= \\ \frac{C_1}{1-q^{8-2\sigma}}\frac{1}{1-q^{-1-2\sigma}} \end{aligned}$$

für $\sigma > 4$, mit einer nur von $m,\ n$ und $\deg(\lambda)$ abhängigen Konstanten C_1.

Ist $n+2k-1-\deg(\lambda) \leq l \leq n+2k-2$, so ergibt sich

$$A(k,l) \leq \underbrace{q^{m+k-1}}_{d}\underbrace{q^{n+k-1}}_{e}\underbrace{q^{k}}_{f}\underbrace{q^{m+k}}_{g}\underbrace{q^{n+k}}_{h}\underbrace{q^{k+1}}_{i}\underbrace{q^{0}}_{\gamma} = q^{2m+2n-1+6k},$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=n+2k-1-\deg(\lambda)}^{n+2k-2} A(k,l)q^{-2(m+l+k)\sigma} &\leq \\ C_2\sum_{k=0}^{\infty} q^{(6-2\sigma)k}\sum_{l=n+2k-1-\deg(\lambda)}^{\infty} q^{-2\sigma l} &= \\ C_2\sum_{k=0}^{\infty} q^{(6-2\sigma)k}q^{-2\sigma(n+2k-1-\deg(\lambda))}\sum_{l=0}^{\infty} q^{-2\sigma l} &= \\ \tilde{C}_2\sum_{k=0}^{\infty} q^{(6-6\sigma)k}\frac{1}{1-q^{-2\sigma}} &= \\ \frac{\tilde{C}_2}{1-q^{6-6\sigma}}\frac{1}{1-q^{-2\sigma}} \end{aligned}$$

für $\sigma > 1$, mit nur von m, n und $\deg(\lambda)$ abhängigen Konstanten C_2 und $\tilde{C}_2$.

Für $l \geq n + 2k - 1$ ist

$$A(k,l) \leq \underbrace{q^{l+m-n-k}}_{d}\underbrace{q^{l-k+1}}_{e}\underbrace{q^{k}}_{f}\underbrace{q^{m+k}}_{g}\underbrace{q^{n+k}}_{h}\underbrace{q^{k+1}}_{i}\underbrace{q^{0}}_{\gamma} = q^{2l+2k+2m+2}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=n+2k-1}^{\infty} A(k,l)q^{-2(m+l+k)\sigma} &\leq \\
C_3\sum_{k=0}^{\infty} q^{(2-2\sigma)k}\sum_{l=n+2k-1}^{\infty} q^{(2-2\sigma)l} &= \\
C_3\sum_{k=0}^{\infty} q^{(2-2\sigma)k}q^{(2-2\sigma)(n+2k-1)}\sum_{l=0}^{\infty} q^{(2-2\sigma)l} &= \\
\tilde{C}_3\sum_{k=0}^{\infty} q^{(6-6\sigma)k}\frac{1}{1-q^{2-2\sigma}} &= \\
\frac{\tilde{C}_3}{1-q^{6-6\sigma}}\frac{1}{1-q^{2-2\sigma}}
\end{aligned}$$

für $\sigma > 1$, mit nur von m und n abhängigen Konstanten C_3, $\tilde{C}_3$.
Somit konvergiert $\mathscr{f}_{(\lambda,\mu),s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 4$.

Analog genügt es, zum Nachweis der Konvergenz von $\mathscr{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ den Summanden $\sum_{\substack{A\in\Gamma_\Delta\backslash\Gamma_0^{(1)}(N)\\ AX\in S}} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AX) = \sum_{\substack{\tilde{A}\in\Gamma_\Delta\backslash\Gamma_0^{(1)}(N)A_0\\ \tilde{A}Y\in S}} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(\tilde{A}Y)$ zu betrachten, wobei

$$\left|\sum_{\tilde{A}|\tilde{A}Y\in S} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(\tilde{A}Y)\right| \leq \sum_{\tilde{A}}\sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]} q^{-(m+n+3\deg(i))\sigma} \tag{3.18}$$

und wieder über alle $\tilde{A} \in \Gamma_\Delta\backslash\Gamma_0^{(1)}(N)A_0$ und $\gamma \in \mathbb{F}_q[T]$ mit

$$\deg(g) < m + \deg(i),\ \deg(h) < n + \deg(i), \tag{3.7}$$

$$\deg(di - fg) + n < \deg(ei - fh) + m, \tag{3.8}$$

$$\deg(ei - fh) \geq \deg(\lambda) - m - \deg(i) + 2, \tag{3.9}$$

$$v_\infty\left(\lambda\left(\frac{bi-ch}{ei-fh}+\gamma\right)+\mu\right) + n - \deg(ei-fh) + 2\deg(i) \geq 2 \tag{3.10}$$

summiert wird, mit der zusätzlichen Bedingung

$$\left(\frac{bi-ch}{ei-fh}+\gamma\right)\pi_\infty^{n-\deg(ei-fh)+2\deg(i)} \in \mathfrak{a}\pi_\infty^{n-\deg(ei-fh)+2\deg(i)} + \pi_\infty^{m+\deg(ei-fh)+\deg(i)}O_\infty. \tag{3.19}$$

Seien wie vor $k = \deg(i)$, $l = \deg(ei - fh)$ und $A(k,l)$ wie in (3.17). Da auch hier die Bedingungen (3.7) bis (3.10) gelten sollen, kann man wieder die oben gewonnenen Abschätzungen für die Grade von d, e, f, g, h in Abhängigkeit von k und l benutzen. Unter Vernachlässigung von (3.19) ergeben sich daraus die Abschätzungen

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n+2k-2-\deg(\lambda)} A(k,l)q^{-(m+n+3k)\sigma} &\leq \\ C_1\sum_{k=0}^{\infty} q^{(8-3\sigma)k}\sum_{l=0}^{\infty} q^{-l} &= \\ \frac{C_1}{1-q^{8-3\sigma}}\frac{1}{1-q^{-1}}\end{aligned}$$

für $\sigma > \frac{8}{3}$ sowie

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=n+2k-1-\deg(\lambda)}^{n+2k-2} A(k,l)q^{-(m+n+3k)\sigma} &\leq \\ C_2\sum_{k=0}^{\infty} q^{(6-3\sigma)k}\sum_{l=n+2k-1-\deg(\lambda)}^{n+2k-2} 1 &= \\ C_2\sum_{k=0}^{\infty} q^{(6-3\sigma)k}\deg(\lambda) &= \\ \frac{\tilde{C}_2}{1-q^{6-3\sigma}}\end{aligned}$$

für $\sigma > 2$, mit nur von m, n und $\deg(\lambda)$ abhängigen Konstanten C_2, $\tilde{C}_2$.

Für $l \geq n+2k-1$ kann (3.10) höchstens von $\gamma = 0$ erfüllt werden. Bedingung (3.19) ist in diesem Fall äquivalent zu

$$\frac{bi-ch}{ei-fh} \in \mathfrak{a} + \pi_\infty^{m-n-k+2l}O_\infty. \tag{3.20}$$

Es gilt

$$m-n-k+2l \geq m-n-k+2(n+2k-1) \geq m+n+3k-2, \tag{3.21}$$

und $m+n+3k-2$ ist wegen $m, n \geq 1$ und $k \geq 0$ größer oder gleich 0. Da die erste Zeile des Vertreters $\tilde{A}$ so gewählt sein soll, daß $\frac{bi-ch}{ei-fh} \in \pi_\infty O_\infty$, kann (3.20) nicht erfüllt werden, falls $v_\infty(\mathfrak{a}) < 0$. Ist $v_\infty(\mathfrak{a}) < 0$, so konvergiert $\mathscr{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ also für $\sigma > \frac{8}{3}$.

Sei nun $v_\infty(\mathfrak{a}) \geq 0$. Es ist $\lambda\mathfrak{a} + \mu \neq 0$, da $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ und somit auch $\mathscr{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ ansonsten nicht definiert ist. Wegen (3.20) gilt

$$v_\infty\left(\frac{bi-ch}{ei-fh} - \mathfrak{a}\right) \geq m-n-k+2l,$$

und für $\gamma = 0$ ist (3.10) wegen der Voraussetzung $\lambda \neq 0$ äquivalent zu

$$v_\infty\left(\frac{bi-ch}{ei-fh} + \frac{\mu}{\lambda}\right) \geq l-2k-n+\deg(\lambda)+2,$$

was zusammen die Abschätzung

$$\begin{aligned}v_\infty\left(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a}\right) &= v_\infty\left(\left(\frac{bi-ch}{ei-fh}+\frac{\mu}{\lambda}\right) - \left(\frac{bi-ch}{ei-fh}-\mathfrak{a}\right)\right) \\ &\geq \min\{l-2k-n+\deg(\lambda)+2, m-n-k+2l\}\end{aligned}$$

liefert. Je nachdem, wo das Minimum liegt, bedeutet dies

$$l \leq v_\infty\left(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a}\right)+2k+n-\deg(\lambda)-2$$

oder

$$l \leq \frac{1}{2}\left(v_\infty\left(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a}\right)+k-m+n\right),$$

so daß l also auf jeden Fall durch

$$\begin{aligned} v_\infty\left(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a}\right)+2k+n-\deg(\lambda)-2+\frac{1}{2}\left(v_\infty\left(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a}\right)+k-m+n\right) &= \\ \frac{3}{2}\left(v_\infty\left(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a}\right)+n\right)+\frac{5}{2}k-\frac{1}{2}m-\deg(\lambda)-2 & \end{aligned}$$

nach oben beschränkt ist. Falls $\frac{3}{2}\left(v_\infty\left(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a}\right)+n\right)+\frac{5}{2}k-\frac{1}{2}m-\deg(\lambda)-2<n+2k-1$, so gibt es kein passendes l und die Summe ist gleich 0. Sei daher angenommen, daß

$$0 \leq n+2k-1 \leq \frac{3}{2}\left(v_\infty\left(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a}\right)+n\right)+\frac{5}{2}k-\frac{1}{2}m-\deg(\lambda)-2.$$

Mit (3.7), (3.11), (3.12) und (3.14) ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=n+2k-1}^{\infty} A(k,l)q^{-(m+n+3k)\sigma} &\leq \\ C_3\sum_{k=0}^{\infty} q^{(2-3\sigma)k} \sum_{l=n+2k-1}^{\frac{3}{2}\left(v_\infty\left(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a}\right)+n\right)+\frac{5}{2}k-\frac{1}{2}m-\deg(\lambda)-2} q^{2l} &\leq \\ \tilde{C_3}\sum_{k=0}^{\infty} q^{(2-3\sigma)k}\left(\frac{3}{2}v_\infty\left(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a}\right)+\frac{1}{2}(n+k-m)-\deg(\lambda)\right)q^{5k} &= \\ \tilde{C_3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}v_\infty\left(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a}\right)+\frac{1}{2}(n+k-m)-\deg(\lambda)\right)q^{(7-3\sigma)k} & \end{aligned}$$

mit nur von m und n abhängigen Konstanten C_3, $\tilde{C_3}$, was für $\sigma > \frac{7}{3}$ konvergiert. Insgesamt konvergiert $\mathscr{V}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ somit für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \frac{8}{3}$. □

Im Folgenden seien

$$\begin{aligned} X &:= \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*, \\ Y &:= \begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*, \\ M &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_\infty), \\ L &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\infty^{-1} \end{pmatrix} \in G(K_\infty), \end{aligned}$$

und es sei nochmals an

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &= \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_\infty), \\ Z_\varepsilon &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi_\infty & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_\infty) \quad (\varepsilon \in \mathbb{F}_q) \end{aligned}$$

erinnert.

Lemma 3.2.5 *Es gilt*

$$q^{2-2s} \cdot F_{(\lambda,\mu),s}(X) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(XX_\varepsilon) = 0 \tag{3.22}$$

und

$$q^{2-2s} \cdot F_{(\lambda,\mu),s}(X) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(XZ_\varepsilon) = 0. \tag{3.23}$$

Beweis Nach Definition von $F_{(\lambda,\mu),s}$ ist

$$\begin{aligned} &\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(XX_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} u+\varepsilon\pi_\infty^m & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \\ &-\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \sum_{\delta \in \mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m & v+\delta\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \\ &-\sum_{\varepsilon,\delta \in \mathbb{F}_q} \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{F}_q[T]} F^*_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \alpha, \beta\right) \psi_\infty(\alpha v + \beta w)\psi_\infty(\alpha\delta\pi_\infty^m). \end{aligned}$$

Falls $v_\infty(\alpha\pi_\infty^m) \geq 2$, so ist $\sum\limits_{\delta \in \mathbb{F}_q} \psi_\infty(\alpha\delta\pi_\infty^m) = q$ gemäß Lemma 2.2.2, und mit (3.4) ergibt sich

$$\begin{aligned} -\sum_{\varepsilon,\delta \in \mathbb{F}_q} F^*_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \alpha, \beta\right) \psi_\infty(\alpha\delta\pi_\infty^m) = \\ -q^{2-2s} F^*_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \alpha, \beta\right) \psi_\infty(\alpha v + \beta w). \end{aligned}$$

Wenn $v_\infty(\alpha\pi_\infty^m) = 1$ ist, so ist $\sum\limits_{\delta \in \mathbb{F}_q} \psi_\infty(\alpha\delta\pi_\infty^m) = 0$ nach Lemma 2.2.2, und für $v_\infty(\alpha\pi_\infty^m) < 1$ gilt $F^*_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \alpha, \beta\right) = 0$ nach (3.4). Somit folgt

$$\begin{aligned} &-\sum_{\varepsilon,\delta \in \mathbb{F}_q} \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{F}_q[T]} F^*_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \alpha, \beta\right) \psi_\infty(\alpha v + \beta w)\psi_\infty(\alpha\delta\pi_\infty^m) = \\ &-q^{2-2s} \sum_{\substack{\alpha,\beta \in \mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty(\alpha\pi_\infty^m) \geq 2}} F^*_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \alpha, \beta\right) \psi_\infty(\alpha v + \beta w), \end{aligned}$$

und dies ist wiederum wegen (3.4) gleich

$$-q^{2-2s}\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{F}_q[T]} F^*_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right)\psi_\infty(\alpha v+\beta w) = F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Somit ist (3.22) gezeigt. Der Nachweis von (3.23) erfolgt analog unter Verwendung von (3.3). □

Angenommen, die Funktion $\mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}$ existiert, d. h. die definierende Summe konvergiert, dann gilt:

Satz 3.2.6 *Anstelle der Harmonizitätsbedingungen* (**HB1**), (**HB2**) *und* (**HB3**) *genügt* $\mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}$ *den Gleichungen*

$$\mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}(X)+\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}\mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}(XX_\varepsilon) = (1-q^{2-2s})\cdot\Bigg[\sum_{A|AX\in S}F_{(\lambda,\mu),s}(AX)+$$
$$\sum_{A|AX\in SR^2}F_{(\lambda,\mu),s}(AX)+\sum_{A|AX\in SQ}F_{(\lambda,\mu),s}(AXQM)+\sum_{A|AX\in SQR}F_{(\lambda,\mu),s}(AXQM)\Bigg], \tag{3.24}$$

$$\mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}(Y)+\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}\mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}(YZ_\varepsilon) = (1-q^{2-2s})\cdot\Bigg[\sum_{A|AY\in S}F_{(\lambda,\mu),s}(AY)+$$
$$\sum_{A|AY\in SR}F_{(\lambda,\mu),s}(AY)+\sum_{A|AY\in SQR}F_{(\lambda,\mu),s}(AYQL)+\sum_{A|AY\in SQR^2}F_{(\lambda,\mu),s}(AYQL)\Bigg], \tag{3.25}$$

$$f_s(X)+\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}\mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}(XZ_\varepsilon) = (1-q^{2-2s})\cdot\Bigg[\sum_{A|AX\in S}F_{(\lambda,\mu),s}(AX)+$$
$$\sum_{A|AX\in SR}F_{(\lambda,\mu),s}(AX)+\sum_{A|AX\in SQR}F_{(\lambda,\mu),s}(AXQL)+\sum_{A|AX\in SQR^2}F_{(\lambda,\mu),s}(AXQL)\Bigg]. \tag{3.26}$$

Im Falle der Konvergenz ist $\lim_{s\to 1}\mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}$ *somit eine harmonische Funktion.*

Beweis Es ist

$$\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}\mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}(XX_\varepsilon) =$$
$$\sum_{A|AX\in S}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon)+\sum_{A|AX\in SR}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon)+\sum_{A|AX\in SR^2}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon)+$$
$$\sum_{A|AX\in SQ}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon)+\sum_{A|AX\in SQR}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon)+\sum_{A|AX\in SQR^2}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon).$$

Gemäß Lemma 2.1.10 kann man in den einzelnen Summen AX jeweils durch einen kanonischen Vertreter ersetzen. Nach (3.22) gilt

$$\sum_{A|AX\in S}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon) = -q^{2-2s}\sum_{A|AX\in S} F_{(\lambda,\mu),s}(AX).$$

Ist $AX \in SR$, so ist AX äquivalent zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} b & \pi_\infty^k & a \\ c & 0 & \pi_\infty^l \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Für $\varepsilon \neq 0$ erhält man

$$AXX_\varepsilon \equiv \begin{pmatrix} b\varepsilon+\pi_\infty^k & b & a \\ c\varepsilon & c & \pi_\infty^l \\ \varepsilon & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+\varepsilon^{-1}\pi_\infty^k & \pi_\infty^k & a \\ c & 0 & \pi_\infty^l \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bmod \Gamma_\infty,$$

so daß, wegen Gleichung (3.2) und der Rechtsinvarianz von $F_{(\lambda,\mu),s}$ unter R,

$$\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon) = F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_0R) + \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q^*} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon R^2) =$$

$$F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} a\pi_\infty & \pi_\infty^k & b \\ \pi_\infty^{l+1} & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q^*} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{k+1} & a\pi_\infty & b+\varepsilon\pi_\infty^k \\ 0 & \pi_\infty^{l+1} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} a\pi_\infty & \pi_\infty^k & b \\ \pi_\infty^{l+1} & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{k+1} & a\pi_\infty & b \\ 0 & \pi_\infty^{l+1} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} a\pi_\infty & \pi_\infty^k & b \\ \pi_\infty^{l+1} & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$-F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{k+1} & a\pi_\infty & b \\ 0 & \pi_\infty^{l+1} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -F_{(\lambda,\mu),s}\left(AXR^2\right) = -F_{(\lambda,\mu),s}\left(AX\right).$$

Es folgt

$$\sum_{A|AX\in SR}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon) = -\sum_{A|AX\in SR} F_{(\lambda,\mu),s}(AX).$$

Für $AX \in SR^2$ ist AX äquivalent zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b & \pi_\infty^k \\ \pi_\infty^l & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und daher gilt, unter Benutzung von (3.23),

$$\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} a\varepsilon+b & a & \pi_\infty^k \\ \varepsilon\pi_\infty^l+c & \pi_\infty^l & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}R^2\right) =$$

$$\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} a\pi_\infty & \pi_\infty^{k+1} & a\varepsilon+b \\ \pi_\infty^{l+1} & 0 & \varepsilon\pi_\infty^l+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -q^{2-2s}F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{k+1} & a & b \\ 0 & \pi_\infty^l & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$-q^{2-2s}F_{(\lambda,\mu),s}\left(AXR\right) = -q^{2-2s}F_{(\lambda,\mu),s}\left(AX\right).$$

Also ist

$$\sum_{A|AX\in SR^2}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon) = -q^{2-2s}\sum_{A|AX\in SR^2} F_{(\lambda,\mu),s}(AX).$$

Falls $AX \in SQ$, so ist AX äquivalent zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & \pi_\infty^k & b \\ \pi_\infty^l & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, so daß

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} a\varepsilon + \pi_\infty^k & a & b \\ \varepsilon\pi_\infty^l & \pi_\infty^l & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Für $\varepsilon \neq 0$ ist

$$\begin{pmatrix} a\varepsilon + \pi_\infty^k & a & b \\ \varepsilon\pi_\infty^l & \pi_\infty^l & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} a\varepsilon + \pi_\infty^k & a & b \\ \varepsilon\pi_\infty^l & \pi_\infty^l & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \varepsilon^{-1}\pi_\infty^k & \pi_\infty^k & b \\ \pi_\infty^l & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod \Gamma_\infty,$$

weshalb

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon) =$$

$$F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^k & a & b \\ 0 & \pi_\infty^l & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} a + \varepsilon\pi_\infty^k & \pi_\infty^k & b \\ \pi_\infty^l & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \overset{(3.22)}{=}$$

$$F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^k & a & b \\ 0 & \pi_\infty^l & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} a & \pi_\infty^k & b \\ \pi_\infty^l & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - q^{2-2s}F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^k & a & b \\ 0 & \pi_\infty^l & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$(1 - q^{2-2s})F_{(\lambda,\mu),s}(AXQM) - F_{(\lambda,\mu),s}(AX)$$

und somit

$$\sum_{A|AX \in SQ} \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon) = \sum_{A|AX \in SQ} \left((1 - q^{2-2s})F_{(\lambda,\mu),s}(AXQM) - F_{(\lambda,\mu),s}(AX)\right).$$

Für $AX \in SQR$ ist AX äquivalent zu $\begin{pmatrix} b & a & \pi_\infty^k \\ c & \pi_\infty^l & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, und daher

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} b\varepsilon + a & b & \pi_\infty^k \\ c\varepsilon + \pi_\infty^l & c & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Für $\varepsilon \neq 0$ ist

$$\begin{pmatrix} b\varepsilon + a & b & \pi_\infty^k \\ c\varepsilon + \pi_\infty^l & c & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} b\varepsilon + a & b & \pi_\infty^k \\ c\varepsilon + \pi_\infty^l & c & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + \varepsilon^{-1}a & a & \pi_\infty^k \\ c + \varepsilon^{-1}\pi_\infty^l & \pi_\infty^l & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bmod \Gamma_\infty,$$

d. h.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon) = \\
&F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} a & b & \pi_\infty^k \\ \pi_\infty^l & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q^*} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} b+\varepsilon a & a & \pi_\infty^k \\ c+\varepsilon\pi_\infty^l & \pi_\infty^l & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^2\right) = \\
&F_{(\lambda,\mu),s}\left(AXQM\right) + \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q^*} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} a\pi_\infty & \pi_\infty^{k+1} & b+\varepsilon a \\ \pi_\infty^{l+1} & 0 & c+\varepsilon\pi_\infty^l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \overset{(3.23)}{=} \\
&F_{(\lambda,\mu),s}\left(AXQM\right) - F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} a\pi_\infty & \pi_\infty^{k+1} & b \\ \pi_\infty^{l+1} & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - q^{2-2s}F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{k+1} & a & b \\ 0 & \pi_\infty^l & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \\
&F_{(\lambda,\mu),s}(AXQM) - F_{(\lambda,\mu),s}(AXR^2) - q^{2-2s}F_{(\lambda,\mu),s}(AXQMR) = \\
&(1-q^{2-2s})F_{(\lambda,\mu),s}\left(AXQM\right) - F_{(\lambda,\mu),s}(AX),
\end{aligned}
$$

so daß

$$
\sum_{A|AX\in SQR}\ \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon) = \sum_{A|AX\in SQR} \left((1-q^{2-2s})F_{(\lambda,\mu),s}(AXQM) - F_{(\lambda,\mu),s}(AX)\right).
$$

Schließlich ist für $AX \in SQR^2$ die Matrix AX äquivalent zu $\begin{pmatrix} \pi_\infty^k & b & a \\ 0 & c & \pi_\infty^l \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, also

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} b+\varepsilon\pi_\infty^k & \pi_\infty^k & a \\ c & 0 & \pi_\infty^l \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^2\right) = \\
&\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{k+1} & a\pi_\infty & b+\varepsilon\pi_\infty^k \\ 0 & \pi_\infty^{l+1} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \overset{(3.2)}{=} -F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} a\pi_\infty & \pi_\infty^k & b \\ \pi_\infty^{l+1} & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \\
&-F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} a\pi_\infty & \pi_\infty^k & b \\ \pi_\infty^{l+1} & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R^2\right) = -F_{(\lambda,\mu),s}\left(AX\right),
\end{aligned}
$$

und daher

$$
\sum_{A|AX\in SQR^2}\ \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}(AXX_\varepsilon) = -\sum_{A|AX\in SQR^2} F_{(\lambda,\mu),s}(AX).
$$

Aus diesen sechs Teilsummen erhält man die Behauptung (3.24).
Zum Nachweis von (3.25) und (3.26) sei $Z = X$ oder $Z = Y$. Wegen $Z_\varepsilon = R^2X_\varepsilon R^2\pi_\infty^{-1}$ ist

$$
\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZZ_\varepsilon\right) = \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2X_\varepsilon\right),
$$

und die Berechnung der Teilsummen läßt sich auf die vorherigen Rechnungen zurückführen, da in den Fallunterscheidungen $AX \in S$, $AX \in SR$ etc. von der speziellen Gestalt von X kein Gebrauch gemacht wurde und man daher AX durch AY ersetzen kann. Man erhält unter

Ausnutzung von $R^2X_\varepsilon R^2 = Z_\varepsilon\pi_\infty$, $R^2QMR^2\pi_\infty^{-2} = QL$ und obiger Gleichungen

$$\sum_{A|AZ\in S}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZZ_\varepsilon\right) =$$
$$\sum_{A|AZ\in S}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2X_\varepsilon\right) = \sum_{A|AZR^2\in SR^2}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2X_\varepsilon\right) =$$
$$-q^{2-2s}\sum_{A|AZR^2\in SR^2} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2\right) = -q^{2-2s}\sum_{A|AZ\in S} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZ\right),$$

$$\sum_{A|AZ\in SR}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZZ_\varepsilon\right) =$$
$$\sum_{A|AZ\in SR}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2X_\varepsilon\right) = \sum_{A|AZR^2\in S}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2X_\varepsilon\right) =$$
$$-q^{2-2s}\sum_{A|AZR^2\in S} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2\right) = -q^{2-2s}\sum_{A|AZ\in SR} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZ\right),$$

$$\sum_{A|AZ\in SR^2}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZZ_\varepsilon\right) =$$
$$\sum_{A|AZ\in SR^2}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2X_\varepsilon\right) = \sum_{A|AZR^2\in SR}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2X_\varepsilon\right) =$$
$$-\sum_{A|AZR^2\in SR} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2\right) = -\sum_{A|AZ\in SR^2} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZ\right),$$

$$\sum_{A|AZ\in SQ}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZZ_\varepsilon\right) =$$
$$\sum_{A|AZ\in SQ}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2X_\varepsilon\right) = \sum_{A|AZR^2\in SQR^2}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2X_\varepsilon\right) =$$
$$-\sum_{A|AZR^2\in SQR^2} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2\right) = -\sum_{A|AZ\in SQ} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZ\right),$$

$$\sum_{A|AZ\in SQR}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZZ_\varepsilon\right) =$$
$$\sum_{A|AZ\in SQR}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2X_\varepsilon\right) = \sum_{A|AZR^2\in SQ}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2X_\varepsilon\right) =$$
$$\sum_{A|AZR^2\in SQ}\left((1-q^{2-2s})F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2QM\right) - F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2\right)\right) =$$
$$\sum_{A|AZ\in SQR}\left((1-q^{2-2s})F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2QMR^2\pi_\infty^{-2}\right) - F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZ\right)\right) =$$
$$\sum_{A|AZ\in SQR}\left((1-q^{2-2s})F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZQL\right) - F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZ\right)\right),$$

$$\sum_{A|AZ\in SQR^2} \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZZ_\varepsilon\right) =$$
$$\sum_{A|AZ\in SQR^2} \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2X_\varepsilon\right) = \sum_{A|AZR^2\in SQR} \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2X_\varepsilon\right) =$$
$$\sum_{A|AZR^2\in SQR} \left((1-q^{2-2s})F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2QM\right) - F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2\right)\right) =$$
$$\sum_{A|AZ\in SQR^2} \left((1-q^{2-2s})F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZR^2QMR^2\pi_\infty^{-2}\right) - F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZ\right)\right) =$$
$$\sum_{A|AZ\in SQR^2} \left((1-q^{2-2s})F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZQL\right) - F_{(\lambda,\mu),s}\left(AZ\right)\right).$$

Hieraus folgen (3.25) und (3.26). □

Lemma 3.2.7 *Die Funktion $G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ erfüllt für alle $m,\ n \in \mathbb{Z}$, $u,\ v \in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty$ und $w \in K_\infty/\pi_\infty^n O_\infty$ die Gleichungen*

$$q^{1-s}\cdot G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) + \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} X_\varepsilon\right) = 0 \qquad (3.27)$$

sowie

$$q^{2-2s}\cdot G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) + \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} Z_\varepsilon\right) = 0. \qquad (3.28)$$

Beweis Der Beweis erfolgt analog zu dem Beweis von Lemma 3.2.5 unter Benutzung von (3.5) und (3.6) anstelle von (3.3) und (3.4). □

Satz 3.2.8 *Anstelle der Harmonizitätsbedingungen* (**HB1**), (**HB2**) *und* (**HB3**) *genügt* $\mathcal{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ *den Gleichungen*

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(X\right) + \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \mathcal{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(XX_\varepsilon\right) =$$
$$(1-q^{1-s})\cdot\left[\sum_{A|AX\in S} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AX) + \sum_{A|AX\in SQ} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AXQM)\right] +$$
$$(1-q^{2-2s})\cdot\left[\sum_{A|AX\in SR^2} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AX) + \sum_{A|AX\in SQR} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AXQM)\right], \qquad (3.29)$$

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(Y\right) + \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \mathcal{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\left(YZ_\varepsilon\right) =$$
$$(1-q^{2-2s})\cdot\left[\sum_{A|AY\in S} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AY) + \sum_{A|AY\in SQR^2} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AYQL)\right] +$$
$$(1-q^{1-s})\cdot\left[\sum_{A|AY\in SR} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AY) + \sum_{A|AY\in SQR} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AYQL)\right], \qquad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
&\mathscr{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(X) + \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \mathscr{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(XZ_\varepsilon) = \\
&(1-q^{2-2s})\cdot\left[\sum_{A|AX\in S} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AX) + \sum_{A|AX\in SQR^2} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AXQL)\right] + \\
&(1-q^{1-s})\cdot\left[\sum_{A|AX\in SR} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AX) + \sum_{A|AX\in SQR} G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AXQL)\right]. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Falls der Limes existiert, ist die Funktion $\lim_{s\to 1}\mathscr{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ *somit harmonisch.*

Beweis Unter Verwendung von (3.27) und (3.28) verlaufen die Rechnungen analog zum Beweis von Satz 3.2.6. □

Die Frage, ob die Grenzwerte $\lim_{s\to 1}\mathscr{f}_{(\lambda,\mu),s}$ bzw. $\lim_{s\to 1}\mathscr{G}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}$ tatsächlich existieren, konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht beantwortet werden und ist daher ein offenes Problem.

Kapitel 4

Petersson-Skalarprodukt und Hecke-Operatoren

4.1 Das Petersson-Skalarprodukt

Definition und Satz 4.1.1 *Es sei dY ein Maß auf $\Gamma_0^{(1)}(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ mit der Normierung*

$$\mathrm{vol}(Y) = \frac{1}{\left|\Gamma_0^{(1)}(N)_X\right|},$$

wobei $X \in G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ ein Vertreter der Klasse von Y mit Stabilisator $\Gamma_0^{(1)}(N)_X$ sei. Für zwei unter $\Gamma_0^{(1)}(N)$ linksinvariante harmonische Koketten $f, g\colon G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \to \mathbb{C}$, von denen eine endlichen Träger modulo $\Gamma_0^{(1)}(N)$ besitzt, ist durch

$$\langle f, g\rangle := \int\limits_{\Gamma_0^{(1)}(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*} f(Y)\overline{g(Y)}dY \tag{4.1}$$

eine hermitesche Sesquilinearform definiert. Auf dem Raum der unter $\Gamma_0^{(1)}(N)$ linksinvarianten harmonischen Koketten auf $G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ mit endlichem Träger definiert (4.1) *ein Skalarprodukt, welches Petersson-Skalarprodukt heißt.*

Beweis Die Endlichkeit des Trägers einer der Funktionen stellt die Konvergenz des Integrals sicher. Die Eigenschaften einer hermiteschen Sesquilinearform sowie die positive Definitheit bei endlichem Träger sind offensichtlich erfüllt. □

Satz 4.1.2 *Seien $f\colon G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \to \mathbb{C}$ eine unter $\Gamma_0^{(1)}(N)$ linksinvariante harmonische Kokette mit endlichem Träger modulo $\Gamma_0^{(1)}(N)$ und*

$$K := -6\deg(N) - \deg(\lambda) + 3, \quad L := 3\deg(N) + 2\deg(\lambda) + 1,$$

dann gilt

$$\langle f, \mathcal{f}_{(\lambda,\mu),1}\rangle := \lim_{s\to 1} \langle f, \mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}\rangle =$$

$$3\, q^{\deg(\lambda)+2} \left[q^{-2\deg(\lambda)-5}(1+q^{-1})\frac{1}{1+q^{-2}} \sum_{K\le n\le 1} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & -\frac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) + \right.$$

$$q^{-2}(1+q^{-1}) \left(\sum_{\deg(\lambda)+2\le m\le L+1} q^{-2m} \sum_{2\le n\le m-1} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & -\frac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^n + \right.$$

$$\left. q^{-2(L+2)}\frac{1}{1-q^{-2}} \sum_{2\le n\le L} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & -\frac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^n \right) +$$

$$\left. q^{-1}(1+q^{-2}) \sum_{\deg(\lambda)+2\le m\le L} q^{-3m} \sum_{m\le n\le L} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{2n} \right]$$

unabhängig von der Existenz von $\lim_{s\to 1} \mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}$.

Beweis Der Übersichtlichkeit halber sei im Folgenden $\mathcal{M} := \Gamma_0^{(1)}(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$, und für $k, l \in \mathbb{Z}$ sei $\pi_\infty^k/\pi_\infty^l := \pi_\infty^k O_\infty/\pi_\infty^l O_\infty$.

Sei $X_Y \in G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ ein Vertreter von $Y \in \mathcal{M}$, dann ist

$$\langle f, \mathcal{f}_{(\lambda,\mu),1}\rangle = \lim_{s\to 1} \int_{\mathcal{M}} f(Y)\overline{\mathcal{f}_{(\lambda,\mu),s}(Y)}dY =$$

$$\lim_{s\to 1} \sum_{Y\in\mathcal{M}} \mathrm{vol}(Y)\cdot \left(\sum_{A|AX_Y\in S} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)} + \sum_{A|AX_Y\in SR} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)} + \right.$$

$$\sum_{A|AX_Y\in SR^2} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)} + \sum_{A|AX_Y\in SQ} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)} +$$

$$\left. \sum_{A|AX_Y\in SQR} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)} + \sum_{A|AX_Y\in SQR^2} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)} \right) =$$

$$\lim_{s\to 1} \sum_{Y\in\mathcal{M}} \mathrm{vol}(Y)\cdot \left(\sum_{A|AX_Y\in S} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)} + \sum_{A|AX_YR^2\in S} f(AX_YR^2)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_YR^2)} + \right.$$

$$\sum_{A|AX_YR\in S} f(AX_YR)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_YR)} + \sum_{A|AX_Y\in SQ} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)} +$$

$$\left. \sum_{A|AX_YR^2\in SQ} f(AX_YR^2)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_YR^2)} + \sum_{A|AX_YR\in SQ} f(AX_YR)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_YR)} \right),$$

wobei jeweils über $A \in \Gamma_\Delta\backslash\Gamma_0^{(1)}(N)$ mit den entsprechenden Einschränkungen summiert wird. Wegen $X_YR = X_{YR}$, $\mathrm{vol}(Y) = \mathrm{vol}(YR)$ aufgrund der Translationsinvarianz des Maßes und weil mit Y auch YR ganz $\mathcal{M}$ durchläuft (analog für R^2 statt R), vereinfacht sich diese Summe zu

$$3 \lim_{s\to 1} \sum_{Y\in\mathcal{M}} \mathrm{vol}(Y) \cdot \left(\sum_{A \mid AX_Y \in S} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)} + \sum_{A \mid AX_Y \in SQ} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)} \right).$$

Man betrachte nun zunächst $\lim\limits_{s\to 1} \sum\limits_{A \mid AX_Y \in S} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)}$. Modulo $\Gamma_0^{(1)}(N)$ sind alle der AX_Y gleich Y, da $A \in \Gamma_\Delta \backslash \Gamma_0^{(1)}(N)$. Unter Benutzung der kanonischen surjektiven Abbildung

$$\Phi\colon \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_q[T] & \mathbb{F}_q[T] \\ 0 & 1 & \mathbb{F}_q[T] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\Gamma_\Delta} \Big\backslash \begin{pmatrix} K_\infty^* & K_\infty & K_\infty \\ 0 & K_\infty^* & K_\infty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} O_\infty^* & O_\infty & O_\infty \\ 0 & O_\infty^* & O_\infty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \Gamma_0^{(1)}(N) \backslash S / \Gamma_\infty K_\infty^*$$

ergibt sich daher

$$\lim_{s\to 1} \sum_{A \mid AX_Y \in S} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)} = \left| \Gamma_0^{(1)}(N)_{X_Y} \right| \lim_{s\to 1} \sum_{\tilde{X} \in \Phi^{-1}(Y)} f(\tilde{X})\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(\tilde{X})},$$

d. h.

$$\lim_{s\to 1} \sum_{Y\in\mathcal{M}} \mathrm{vol}(Y) \cdot \sum_{A \mid AX_Y \in S} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)} =$$

$$\lim_{s\to 1} \sum_{\tilde{X} \in \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_q[T] & \mathbb{F}_q[T] \\ 0 & 1 & \mathbb{F}_q[T] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\backslash \begin{pmatrix} K_\infty^* & K_\infty & K_\infty \\ 0 & K_\infty^* & K_\infty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} O_\infty^* & O_\infty & O_\infty \\ 0 & O_\infty^* & O_\infty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} f(\tilde{X})\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(\tilde{X})}.$$

Da ein vollständiges Vertretersystem von

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_q[T] & \mathbb{F}_q[T] \\ 0 & 1 & \mathbb{F}_q[T] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\backslash \begin{pmatrix} K_\infty^* & K_\infty & K_\infty \\ 0 & K_\infty^* & K_\infty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} O_\infty^* & O_\infty & O_\infty \\ 0 & O_\infty^* & O_\infty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, m,n \in \mathbb{Z}, u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m, v \in \pi_\infty/\pi_\infty^m, w \in \pi_\infty/\pi_\infty^n \right\},$$

ist dies gleich

$$\lim_{s\to 1} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \sum_{u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m} \sum_{\substack{v\in\pi_\infty/\pi_\infty^m \\ w\in\pi_\infty/\pi_\infty^n}} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \overline{F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u & v \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

Einsetzen der Fourierentwicklung von f und der Definition von $F_{(\lambda,\mu),s}$ führt auf

$$\lim_{s\to 1} \sum_{\substack{m\geq \deg(\lambda)+2 \\ n\in\mathbb{Z}}} \sum_{\substack{u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m \\ v\in\pi_\infty/\pi_\infty^m \\ w\in\pi_\infty/\pi_\infty^n}} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty\left((\alpha\ \beta)\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}\right)\geq 2 \\ v_\infty(\lambda u + (\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\geq 2}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \alpha, \beta\right) \cdot$$

$$q^{-2m\bar{s}} \psi_\infty((\alpha-\lambda)v + (\beta-\mu-\gamma\lambda)w).$$

Aufgrund der Multiplikativität von ψ_∞ gilt

$$\sum_{v\in\pi_\infty/\pi_\infty^m}\psi_\infty((\alpha-\lambda)v)=\sum_{v_1,\ldots,v_{m-1}\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty((\alpha-\lambda)\sum_{i=1}^{m-1}v_i\pi_\infty^i)=\prod_{i=1}^{m-1}\sum_{v_i\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty((\alpha-\lambda)v_i\pi_\infty^i).$$

Es ist $\deg(\alpha-\lambda)\le m-2$. Gilt $\alpha-\lambda\neq 0$, so gibt es ein $i\in\mathbb{N}$ mit $1\le i\le m-1$ und $v_\infty((\alpha-\lambda)\pi_\infty^i)=1$, und es folgt $\sum_{v_i\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty((\alpha-\lambda)v_i\pi_\infty^i)=0$ nach Lemma 2.2.2. Daher ist

$$\sum_{v\in\pi_\infty/\pi_\infty^m}\psi_\infty((\alpha-\lambda)v)=\begin{cases}q^{m-1}, & \text{falls } \alpha=\lambda,\\ 0, & \text{falls } \alpha\neq\lambda.\end{cases}$$

Somit erhält man $v_\infty(\lambda u+\beta\pi_\infty^n)\ge 2$ als Bedingung an β und damit

$$\begin{aligned}&v_\infty((\beta-(\mu+\gamma\lambda))\pi_\infty^n)=v_\infty((\lambda u+\beta\pi_\infty^n)-(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\ge\\&\min\{v_\infty(\lambda u+\beta\pi_\infty^n),v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\}\ge 2,\end{aligned}$$

d. h. es muß

$$\beta\pi_\infty^n\equiv(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n \bmod \pi_\infty^2 O_\infty\quad\text{bzw.}\quad\beta\equiv\mu+\gamma\lambda \bmod \pi_\infty^{2-n}O_\infty$$

gelten. Für $n\ge 2$ folgt, daß $\beta-\mu-\gamma\lambda$ ein Polynom vom Grad höchstens $n-2$ ist, und für $n\le 1$ ergibt sich $\beta=\mu+\gamma\lambda$ wegen β, $\mu+\gamma\lambda\in\mathbb{F}_q[T]$. Mit

$$\nu:=\max\{1,n\}$$

und Lemma 2.2.2 erhält man wie oben

$$\sum_{w\in\pi_\infty/\pi_\infty^n}\psi_\infty((\beta-\mu-\gamma\lambda)w)=\begin{cases}q^{\nu-1}, & \text{falls } \beta=\mu+\gamma\lambda,\\ 0, & \text{falls } \beta\neq\mu+\gamma\lambda.\end{cases}$$

Außerdem gilt für $u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m$ und alle $\gamma\in\mathbb{F}_q[T]$ die Implikation

$$v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\ge 2\Rightarrow v_\infty(\lambda u+\mu\pi_\infty^n)\ge 2:$$

Für $\gamma=0$ ist dies klar. Sei also $\gamma\neq 0$ angenommen, dann ist $v_\infty(\gamma\lambda\pi_\infty^n)\le n-\deg(\lambda)$. Wegen Satz 3.2.3 kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $\deg(\lambda)>\deg(\mu)$. Hieraus folgt

$$v_\infty(\lambda u+\mu\pi_\infty^n)\ge\min\{v_\infty(u)-\deg(\lambda),n-\deg(\mu)\}\ge n-\deg(\lambda)+1,$$

so daß $v_\infty(\lambda u+\mu\pi_\infty^n)\neq v_\infty(\gamma\lambda\pi_\infty^n)$. Daher ist

$$v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)=\min\{v_\infty(\lambda u+\mu\pi_\infty^n),v_\infty(\gamma\lambda\pi_\infty^n)\}\ge 2.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\sum_{\substack{m\ge\deg(\lambda)+2\\ n\in\mathbb{Z}}}\ \sum_{\substack{u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m\\ v\in\pi_\infty/\pi_\infty^m\\ w\in\pi_\infty/\pi_\infty^n}}\ \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{F}_q[T]\\ v_\infty\left((\alpha\ \beta)\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\ge 2\\ v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\ge 2}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\alpha,\beta\right)\cdot$$

$$q^{-2m\bar{s}}\psi_\infty((\alpha-\lambda)v+(\beta-\mu-\gamma\lambda)w)=$$

$$\sum_{\substack{m\geq\deg(\lambda)+2\\ n\in\mathbb{Z}}}\ \sum_{u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m}\ \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]\\ v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\geq 2}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu+\gamma\lambda\right) q^{-2m\overline{s}}q^{m+\nu-2}.$$

Da f als harmonische Kokette der Beziehung

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu-\gamma\lambda\right)\ \text{für alle } \gamma\in\mathbb{F}_q[T] \qquad (\mathbf{IV})$$

genügt, ist dies gleich

$$\sum_{\substack{m\geq\deg(\lambda)+2\\ n\in\mathbb{Z}}}\ \sum_{u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m}\ \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]\\ v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\geq 2}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) q^{(1-2\overline{s})m+\nu-2}.$$

Falls $\gamma\neq 0$, so gilt

$$v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)=v_\infty(u+\gamma\pi_\infty^n)-\deg(\lambda)=n-\deg(\lambda)-\deg(\gamma). \qquad (4.2)$$

Für $\underline{n\leq\deg(\lambda)+1}$ kann die Bedingung $v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\geq 2$ daher nur für $\gamma=0$ erfüllt sein und ist äquivalent zu

$$v_\infty(u+\frac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n)\geq\deg(\lambda)+2$$

bzw.

$$u\equiv-\frac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n \bmod \pi_\infty^{\deg(\lambda)+2}O_\infty,$$

so daß Benutzung von

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)=\begin{cases} q\sum\limits_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u+\varepsilon\pi_\infty^m\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right), & \text{falls } v_\infty(\lambda\pi_\infty^m)\geq 2,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \qquad (\mathbf{F2})$$

auf

$$\sum_{\substack{m\geq\deg(\lambda)+2\\ n\leq\deg(\lambda)+1}}\ \sum_{u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m}\ \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]\\ v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\geq 2}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) q^{(1-2\overline{s})m+\nu-2}=$$

$$\sum_{\substack{m\geq\deg(\lambda)+2\\ n\leq\deg(\lambda)+1}}\ \sum_{\tilde{u}\in\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2}/\pi_\infty^m} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & -\frac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n+\tilde{u}\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) q^{(1-2\overline{s})m+\nu-2}=$$

$$\sum_{\substack{m\geq\deg(\lambda)+2\\ n\leq\deg(\lambda)+1}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & -\frac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) q^{(1-2\overline{s})m+\nu-2}q^{\deg(\lambda)+2-m}$$

führt.

Gilt $\underline{\deg(\lambda)+2\leq n\leq m-1}$, so ist die Ungleichung $v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\geq 2$ für $\gamma=0$ und $u\in\pi_\infty^{n+1}O_\infty/\pi_\infty^m O_\infty$ immer erfüllt, da

$$v_\infty(\lambda u)\geq n+1-\deg(\lambda)\geq 2$$

und

$$v_\infty(\mu\pi_\infty^n) \geq \deg(\lambda) + 2 - (\deg(\lambda) - 1) \geq 2.$$

Für $\gamma \neq 0$ ist $v_\infty(\lambda u + (\mu + \gamma\lambda)\pi_\infty^n) \geq 2$ nach (4.2) äquivalent zu $\deg(\gamma) \leq n - \deg(\lambda) - 2$, unabhängig von u. Somit ist, wieder mit (**F2**),

$$\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ \deg(\lambda)+2 \leq n \leq m-1}} \sum_{u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty(\lambda u + (\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n) \geq 2}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u + \gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{(1-2\overline{s})m+\nu-2} =$$
$$\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ \deg(\lambda)+2 \leq n \leq m-1}} \sum_{\tilde{u} \in \pi_\infty^{\deg(\lambda)+2}/\pi_\infty^m} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & \tilde{u} \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{(1-2\overline{s})m+\nu-2} =$$
$$\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ \deg(\lambda)+2 \leq n \leq m-1}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{(1-2\overline{s})m+\nu-2} q^{\deg(\lambda)+2-m}.$$

Für $\underline{n \geq m}$ ist $u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m$ äquivalent zu $u = 0$, und man erhält $n - \deg(\mu + \gamma\lambda) \geq 2$ als Bedingung an γ. Für $\gamma = 0$ ist dies wegen der Voraussetzungen $n \geq m \geq \deg(\lambda) + 2$ und $\deg(\mu) < \deg(\lambda)$ immer erfüllt, und für $\gamma \neq 0$ ergibt sich wieder $\deg(\gamma) \leq n - \deg(\lambda) - 2$, also ist

$$\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ n \geq m}} \sum_{u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty(\lambda u + (\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n) \geq 2}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u + \gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{(1-2\overline{s})m+\nu-2} =$$
$$\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ n \geq m}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{F}_q[T] \\ \deg(\gamma) \leq n - \deg(\lambda)-2}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & \gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{(1-2\overline{s})m+\nu-2}.$$

Da der Wert von $\gamma\pi_\infty^n$ nur modulo π_∞^m relevant ist, ist dies gleich

$$\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ n \geq m}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{F}_q[T] \\ \gamma\pi_\infty^n \in \pi_\infty^{\deg(\lambda)+2}/\pi_\infty^m}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & \gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{(1-2\overline{s})m+\nu-2} q^{n+1-m},$$

was man unter Benutzung von (**F2**) zu

$$\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ n \geq m}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{(1-2\overline{s})m+\nu-2} q^{n+1-m} q^{\deg(\lambda)+2-m}$$

umformen kann.

Zusammenfassend ergibt sich

$$\sum_{\substack{m\geq\deg(\lambda)+2\\ n\in\mathbb{Z}}}\ \sum_{u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m}\ \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]\\ v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\geq 2}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu+\gamma\lambda\right)q^{-2m\overline{s}}q^{m+\nu-2}=$$

$$\sum_{\substack{m\geq\deg(\lambda)+2\\ n\leq\deg(\lambda)+1}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & -\frac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)q^{(1-2\overline{s})m+\nu-2}q^{\deg(\lambda)+2-m}+$$

$$\sum_{\substack{m\geq\deg(\lambda)+2\\ \deg(\lambda)+2\leq n\leq m-1}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & 0\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)q^{(1-2\overline{s})m+n-2}q^{\deg(\lambda)+2-m}+$$

$$\sum_{\substack{m\geq\deg(\lambda)+2\\ n\geq m}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & 0\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)q^{(1-2\overline{s})m+n-2}q^{\deg(\lambda)+2-m}q^{n+1-m},$$

wobei man in der ersten Zeile und zweiten Spalte der Matrix des Fourierkoeffizienten auch jedesmal $-\frac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n$ (anstelle von 0) schreiben könnte.

Für $\lim\limits_{s\to 1}\sum\limits_{A|AX_Y\in SQ} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)}$ ergibt sich analog unter Benutzung der kanonischen surjektiven Abbildung

$$\Psi\colon \begin{pmatrix}1 & \mathbb{F}_q[T] & \mathbb{F}_q[T]\\ 0 & 1 & \mathbb{F}_q[T]\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg\backslash\begin{pmatrix}K_\infty & K_\infty^* & K_\infty\\ K_\infty^* & 0 & K_\infty\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg/\begin{pmatrix}O_\infty^* & 0 & O_\infty\\ \pi_\infty O_\infty & O_\infty^* & O_\infty\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\Gamma_0^{(1)}(N)\backslash SQ/\Gamma_\infty K_\infty^*,$$

daß

$$\lim_{s\to 1}\sum_{A|AX_Y\in SQ} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)}=\left|\Gamma_0^{(1)}(N)_{X_Y}\right|\lim_{s\to 1}\sum_{\tilde{X}\in\Psi^{-1}(Y)} f(\tilde{X})\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(\tilde{X})},$$

also

$$\lim_{s\to 1}\sum_{Y\in\mathcal{M}}\mathrm{vol}(Y)\cdot\sum_{A|AX_Y\in SQ} f(AX_Y)\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(AX_Y)}=$$

$$\lim_{s\to 1}\sum_{\tilde{X}\in\begin{pmatrix}1 & \mathbb{F}_q[T] & \mathbb{F}_q[T]\\ 0 & 1 & \mathbb{F}_q[T]\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Big\backslash\begin{pmatrix}K_\infty & K_\infty^* & K_\infty\\ K_\infty^* & 0 & K_\infty\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Big/\begin{pmatrix}O_\infty^* & 0 & O_\infty\\ \pi_\infty O_\infty & O_\infty^* & O_\infty\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}} f(\tilde{X})\overline{F_{(\lambda,\mu),s}(\tilde{X})}.$$

Benutzt man, daß für

$$\begin{pmatrix}1 & \mathbb{F}_q[T] & \mathbb{F}_q[T]\\ 0 & 1 & \mathbb{F}_q[T]\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg\backslash\begin{pmatrix}K_\infty & K_\infty^* & K_\infty\\ K_\infty^* & 0 & K_\infty\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg/\begin{pmatrix}O_\infty^* & 0 & O_\infty\\ \pi_\infty O_\infty & O_\infty^* & O_\infty\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ein vollständiges Vertretersystem gegeben ist durch

$$\left\{\begin{pmatrix}u & \pi_\infty^m & v\\ \pi_\infty^n & 0 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle| m,n\in\mathbb{Z},u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^{m+1},v\in\pi_\infty/\pi_\infty^m,w\in\pi_\infty/\pi_\infty^n\right\},$$

führt dies auf

$$\lim_{s\to 1} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \sum_{u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^{m+1}} \sum_{\substack{v\in\pi_\infty/\pi_\infty^m \\ w\in\pi_\infty/\pi_\infty^n}} f\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) \overline{F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} u & \pi_\infty^m & v \\ \pi_\infty^n & 0 & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)},$$

was wegen (**HB2**) und (3.2) gleich

$$\lim_{s\to 1} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \sum_{u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^{m+1}} \sum_{\substack{v\in\pi_\infty/\pi_\infty^m \\ w\in\pi_\infty/\pi_\infty^n}} \sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u & v+\varepsilon\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) \cdot$$
$$\overline{F_{(\lambda,\mu),s}\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u & v+\delta\pi_\infty^m \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)}$$

ist. Einsetzen der Definition von $F_{(\lambda,\mu),s}$ und der Fourierentwicklung von f ergibt

$$\lim_{s\to 1} \sum_{\substack{m+1\geq\deg(\lambda)+2 \\ n\in\mathbb{Z}}} \sum_{\substack{u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^{m+1} \\ v\in\pi_\infty/\pi_\infty^m \\ w\in\pi_\infty/\pi_\infty^n}} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty\left((\alpha\ \beta)\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u \\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}\right)\geq 2 \\ v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\geq 2}} \sum_{\varepsilon,\delta\in\mathbb{F}_q} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u \\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \alpha, \beta\right) \cdot$$
$$q^{-2(m+1)\overline{s}} \psi_\infty((\alpha-\lambda)v + (\beta-\mu-\gamma\lambda)w + \alpha\varepsilon\pi_\infty^m - \lambda\delta\pi_\infty^m),$$

woraus man mittels Lemma 2.2.2 weiter

$$\lim_{s\to 1} \sum_{\substack{m+1\geq\deg(\lambda)+3 \\ n\in\mathbb{Z}}} \sum_{\substack{u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^{m+1} \\ v\in\pi_\infty/\pi_\infty^m \\ w\in\pi_\infty/\pi_\infty^n}} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{F}_q[T] \\ \deg(\alpha)+3\leq m+1 \\ v_\infty(\alpha u+\beta\pi_\infty^n)\geq 2 \\ v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\geq 2}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u \\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \alpha, \beta\right) \cdot$$
$$q^{-2(m+1)\overline{s}} \psi_\infty((\alpha-\lambda)v + (\beta-\mu-\gamma\lambda)w)\ q^2$$

erhält. Analog zum ersten Fall gilt

$$\sum_{\substack{m+1\geq\deg(\lambda)+3 \\ n\in\mathbb{Z}}} \sum_{\substack{u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^{m+1} \\ v\in\pi_\infty/\pi_\infty^m \\ w\in\pi_\infty/\pi_\infty^n}} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{F}_q[T] \\ \deg(\alpha)+3\leq m+1 \\ v_\infty(\alpha u+\beta\pi_\infty^n)\geq 2 \\ v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\geq 2}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u \\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \alpha, \beta\right) \cdot$$
$$q^{-2(m+1)\overline{s}} \psi_\infty((\alpha-\lambda)v + (\beta-\mu-\gamma\lambda)w)\ q^2 =$$

$$\sum_{\substack{m+1\geq\deg(\lambda)+3\\ n\in\mathbb{Z}}}\ \sum_{u\in\pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^{m+1}}\ \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{F}_q[T]\\ v_\infty(\lambda u+(\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n)\geq 2}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+1} & u+\gamma\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) q^{-2(m+1)\overline{s}}q^{m+\nu} =$$

$$\sum_{\substack{m\geq\deg(\lambda)+2\\ n\leq\deg(\lambda)+1}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & -\dfrac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) q^{-2(m+1)\overline{s}+\nu+\deg(\lambda)+1}+$$

$$\sum_{\substack{m\geq\deg(\lambda)+2\\ \deg(\lambda)+2\leq n\leq m}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & 0\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) q^{-2(m+1)\overline{s}+n+\deg(\lambda)+1}+$$

$$\sum_{\substack{m\geq\deg(\lambda)+2\\ n\geq m+1}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & 0\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) q^{-2(m+1)\overline{s}-m+2n+\deg(\lambda)+1}.$$

Insgesamt erhält man

$$\langle f, f_{(\lambda,\mu),1}\rangle =$$

$$3\,q^{\deg(\lambda)+2}\lim_{s\to 1}\sum_{m\geq\deg(\lambda)+2} q^{-2m\overline{s}}\cdot\Bigg[(q^{-1}+q^{-2\overline{s}})\sum_{n\leq 1} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & -\dfrac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)+$$

$$q^{-1}(q^{-1}+q^{-2\overline{s}})\sum_{2\leq n\leq m-1} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & -\dfrac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) q^n+$$

$$q^{-(m+1)}(1+q^{-2\overline{s}})\sum_{n\geq m} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & -\dfrac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right) q^{2n}\Bigg].$$

Seien

$$K := -6\deg(N)-\deg(\lambda)+3,\quad L := 3\deg(N)+2\deg(\lambda)+1$$

und $f^*(n) := f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2} & -\dfrac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)$. Gemäß Korollar 2.2.9 ist $f^*(n)=0$, falls $n<K$ oder $n>L$, und es ergibt sich

$$\langle f, f_{(\lambda,\mu),1}\rangle =$$

$$3\,q^{\deg(\lambda)+2}\lim_{s\to 1}\sum_{m\geq\deg(\lambda)+2} q^{-2m\overline{s}}\cdot\Bigg[(q^{-1}+q^{-2\overline{s}})\sum_{K\leq n\leq 1} f^*(n)+$$

$$q^{-1}(q^{-1}+q^{-2\overline{s}})\sum_{2\leq n\leq\min\{m-1,L\}} f^*(n)q^n + q^{-(m+1)}(1+q^{-2\overline{s}})\sum_{m\leq n\leq L} f^*(n)q^{2n}\Bigg].$$

Offensichtlich konvergiert diese Summe absolut für alle $s\in\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s)>0$. Daher ist

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 1}\sum_{m\geq\deg(\lambda)+2} q^{-2m\overline{s}}(q^{-1}+q^{-2\overline{s}})\sum_{K\leq n\leq 1} f^*(n) &=\\ q^{-2(\deg(\lambda)+2)}(q^{-1}+q^{-2})\sum_{m\geq 0} q^{-2m}\sum_{K\leq n\leq 1} f^*(n) &=\\ q^{-2(\deg(\lambda)+2)-1}(1+q^{-1})\frac{1}{1-q^{-2}}\sum_{K\leq n\leq 1} f^*(n);\end{aligned}$$

für den mittleren Summanden ergibt sich

$$\lim_{s\to 1} \sum_{m\geq \deg(\lambda)+2} q^{-2m\overline{s}} q^{-1}(q^{-1}+q^{-2\overline{s}}) \sum_{2\leq n\leq \min\{m-1,L\}} f^*(n)q^n =$$

$$q^{-2}(1+q^{-1}) \left(\sum_{\deg(\lambda)+2\leq m\leq L+1} q^{-2m} \sum_{2\leq n\leq m-1} f^*(n)q^n + \sum_{m\geq L+2} q^{-2m} \sum_{2\leq n\leq L} f^*(n)q^n \right) =$$

$$q^{-2}(1+q^{-1}) \left(\sum_{\deg(\lambda)+2\leq m\leq L+1} q^{-2m} \sum_{2\leq n\leq m-1} f^*(n)q^n + q^{-2(L+2)} \frac{1}{1-q^{-2}} \sum_{2\leq n\leq L} f^*(n)q^n \right),$$

und für den letzten Summanden

$$\lim_{s\to 1} \sum_{m\geq \deg(\lambda)+2} q^{-2m\overline{s}} q^{-(m+1)}(1+q^{-2\overline{s}}) \sum_{m\leq n\leq L} f^*(n)q^{2n} =$$
$$q^{-1}(1+q^{-2}) \sum_{\deg(\lambda)+2\leq m\leq L} q^{-3m} \sum_{m\leq n\leq L} f^*(n)q^{2n}.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Satz 4.1.3 *Sei $f\colon G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \to \mathbb{C}$ eine unter $\Gamma_0^{(1)}(N)$ linksinvariante harmonische Kokette mit endlichem Träger modulo $\Gamma_0^{(1)}(N)$, dann gilt*

$$\langle f, \mathcal{P}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,1}\rangle := \lim_{s\to 1} \langle f, \mathcal{P}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\rangle =$$
$$3\cdot \lim_{s\to 1} \sum_{m\geq \deg(\lambda)+2} q^{-m\overline{s}} \left(\sum_{\deg(\lambda)+2-v_\infty(\mathfrak{a})\leq n\leq m-1} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & \mathfrak{a}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu \right) q^{-n\overline{s}+m+n-2} + \right.$$
$$\sum_{\max\{\deg(\lambda)+2-v_\infty(\mathfrak{a}),m\}\leq n\leq 2m+3\deg(N)-3} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu \right) q^{-n\overline{s}+2n-1} +$$
$$\sum_{\deg(\lambda)+2-v_\infty(\mathfrak{a})\leq n\leq m} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & \mathfrak{a}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu \right) q^{-(n+1)\overline{s}+m+n} +$$
$$\left. \sum_{\max\{\deg(\lambda)+2-v_\infty(\mathfrak{a}),m+1\}\leq n\leq 2m+3\deg(N)-1} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu \right) q^{-(n+1)\overline{s}+2n} \right)$$

für $v_\infty(\mathfrak{a}) \leq 0$

bzw.

$$\langle f, \mathcal{P}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,1}\rangle := \lim_{s\to 1} \langle f, \mathcal{P}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\rangle =$$

$$3 \cdot \lim_{s\to 1} \sum_{m \geq \deg(\lambda)+2} q^{-m\overline{s}} \left(\sum_{\deg(\lambda)+2-v_\infty\left(\mathfrak{a}+\frac{\mu}{\lambda}\right) \leq n \leq m-1} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & \mathfrak{a}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-n\overline{s}+m+\nu-2} + \right.$$

$$\sum_{m \leq n \leq 2m+3\deg(N)-3} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-n\overline{s}+2n-1} +$$

$$\sum_{\deg(\lambda)+2-v_\infty\left(\mathfrak{a}+\frac{\mu}{\lambda}\right) \leq n \leq m} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & \mathfrak{a}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(n+1)\overline{s}+m+\nu} +$$

$$\left. \sum_{m+1 \leq n \leq 2m+3\deg(N)-1} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(n+1)\overline{s}+2n} \right) \quad \textit{für } v_\infty(\mathfrak{a}) \geq 1,$$

wobei $\nu := \max\{1, n\}$.

Beweis Wie im Beweis des letzten Satzes sei im Folgenden $\mathcal{M} := \Gamma_0^{(1)}(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$, und für $k, l \in \mathbb{Z}$ sei $\pi_\infty^k/\pi_\infty^l := \pi_\infty^k O_\infty/\pi_\infty^l O_\infty$.

Sei $X_Y \in G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*$ ein Vertreter von $Y \in \mathcal{M}$, dann erhält man analog zum Beweis von Satz 4.1.2 zunächst einmal die Gleichungen

$$\langle f, \mathcal{P}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,1}\rangle = \lim_{s\to 1} \langle f, \mathcal{P}_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}\rangle =$$

$$\lim_{s\to 1} 3 \cdot \sum_{Y \in \mathcal{M}} \operatorname{vol}(Y) \cdot \left(\sum_{A | AX_Y \in S} f(AX_Y)\overline{G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AX_Y)} + \sum_{A | AX_Y \in SQ} f(AX_Y)\overline{G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AX_Y)} \right)$$

und weiterhin

$$\lim_{s\to 1} \sum_{A | AX_Y \in S} f(AX_Y)\overline{G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AX_Y)} =$$

$$\lim_{s\to 1} \sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ n \in \mathbb{Z}}} \sum_{u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty(\lambda u + (\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n) \geq 2 \\ v_\infty(u+\gamma\pi_\infty^n - \mathfrak{a}\pi_\infty^n) \geq m}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+n)\overline{s}} q^{m+\nu-2}$$

sowie

$$\lim_{s\to 1} \sum_{A | AX_Y \in SQ} f(AX_Y)\overline{G_{\mathfrak{a},\lambda,\mu,s}(AX_Y)} =$$

$$\lim_{s\to 1} \sum_{\substack{m+1 \geq \deg(\lambda)+3 \\ n \in \mathbb{Z}}} \sum_{u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^{m+1}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty(\lambda u + (\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n) \geq 2 \\ v_\infty(u+\gamma\pi_\infty^n - \mathfrak{a}\pi_\infty^n) \geq m+1}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u+\gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) \cdot$$

$$q^{-(m+1+n)\overline{s}} q^{m+\nu}$$

mit $\nu := \max\{1, n\}$. Zuerst soll

$$\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ n \in \mathbb{Z}}} \sum_{u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty(\lambda u + (\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n) \geq 2 \\ v_\infty(u+\gamma\pi_\infty^n - \mathfrak{a}\pi_\infty^n) \geq m}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+n)\overline{s}} q^{m+\nu-2}$$

näher betrachtet werden. Wegen Satz 3.2.3 kann man im Folgenden davon ausgehen, daß $\deg(\lambda) > \deg(\mu)$.

Für $\underline{n \leq \deg(\lambda)+1}$ kann $v_\infty(\lambda u + (\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n) \geq 2$ nur gelten, wenn $\gamma = 0$ (vgl. hierzu den Beweis von Satz 4.1.2), und als Bedingungen an u ergeben sich daraus

$$v_\infty(\lambda u + \mu\pi_\infty^n) \geq 2 \quad \text{sowie} \quad v_\infty(u - \mathfrak{a}\pi_\infty^n) \geq m.$$

Ist $v_\infty(\mathfrak{a}) \leq 0$, so kann die zweite Bedingung wegen $v_\infty(u) \geq n+1$ und $n \leq \deg(\lambda)+1 < m$ nicht erfüllt werden.
Sei nun $v_\infty(\mathfrak{a}) \geq 1$ angenommen. Beide Ungleichungen zusammen ergeben

$$v_\infty\left(\frac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n + \mathfrak{a}\pi_\infty^n\right) = v_\infty\left(u + \frac{\mu}{\lambda}\pi_\infty^n - (u - \mathfrak{a}\pi_\infty^n)\right) \geq \min\{\deg(\lambda)+2, m\} = \deg(\lambda)+2,$$

d. h. für $n < \deg(\lambda)+2-v_\infty(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a})$ können nicht beide Ungleichungen zugleich gelten. Für $n \geq \deg(\lambda)+2-v_\infty(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a})$ gibt es wegen u, $\mathfrak{a}\pi_\infty^n \in \pi_\infty^{n+1}O_\infty$ genau ein $u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m$, welches beiden Bedingungen genügt, nämlich das mit $u \equiv \mathfrak{a}\pi_\infty^n \mod \pi_\infty^m O_\infty$. Daher ist

$$\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ n \leq \deg(\lambda)+1}} \sum_{u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty(\lambda u + (\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n) \geq 2 \\ v_\infty(u+\gamma\pi_\infty^n - \mathfrak{a}\pi_\infty^n) \geq m}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+n)\overline{s}} q^{m+\nu-2} =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{falls } v_\infty(\mathfrak{a}) \leq 0, \\ \displaystyle\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ \deg(\lambda)+2-v_\infty(\frac{\mu}{\lambda}+\mathfrak{a}) \leq n \leq \deg(\lambda)+1}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & \mathfrak{a}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+n)\overline{s}} q^{m+\nu-2}, & \text{falls } v_\infty(\mathfrak{a}) \geq 1. \end{cases}$$

Gilt $\underline{\deg(\lambda)+2 \leq n \leq m-1}$, so ist $v_\infty(u+\gamma\pi_\infty^n - \mathfrak{a}\pi_\infty^n) \geq m$ im Fall $v_\infty(\mathfrak{a}) \leq 0$ nur für $\gamma \neq 0$ möglich. Wegen $\deg(\lambda) > \deg(\mu)$ ist dann $v_\infty(\lambda u + (\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n) \geq 2$ äquivalent zu $\deg(\gamma) \leq n - \deg(\lambda) - 2$. Da außerdem $v_\infty(u+\gamma\pi_\infty^n - \mathfrak{a}\pi_\infty^n) \geq m$ nur für $v_\infty(\gamma) = v_\infty(\mathfrak{a})$ gelten kann, folgt insbesondere $n \geq \deg(\lambda)+2-v_\infty(\mathfrak{a})$.
Wenn $v_\infty(\mathfrak{a}) \geq 1$ ist, kann $v_\infty(u+\gamma\pi_\infty^n - \mathfrak{a}\pi_\infty^n) \geq m$ nur für $\gamma = 0$ erfüllt werden.
Wegen $u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m$ und $v_\infty(\gamma\pi_\infty^n) \leq n$ für $\gamma \neq 0$ sind in beiden Fällen γ und u eindeutig bestimmt durch $\gamma\pi_\infty^n + u \equiv \mathfrak{a}\pi_\infty^n \mod \pi_\infty^m$, und somit ist

$$\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ \deg(\lambda)+2 \leq n \leq m-1}} \sum_{u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty(\lambda u + (\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n) \geq 2 \\ v_\infty(u+\gamma\pi_\infty^n - \mathfrak{a}\pi_\infty^n) \geq m}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u+\gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+n)\overline{s}} q^{m+\nu-2} =$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ \deg(\lambda)+2-v_\infty(\mathfrak{a}) \leq n \leq m-1}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & \mathfrak{a}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+n)\overline{s}} q^{m+n-2}, & \text{falls } v_\infty(\mathfrak{a}) \leq 0, \\ \displaystyle\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ \deg(\lambda)+2 \leq n \leq m-1}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & \mathfrak{a}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+n)\overline{s}} q^{m+n-2}, & \text{falls } v_\infty(\mathfrak{a}) \geq 1. \end{cases}$$

Für $\underline{n \geq m}$ ergibt sich $\deg(\gamma) \leq n - \deg(\lambda) - 2$ sowie $u = 0$ und hieraus $v_\infty(\gamma - \mathfrak{a}) \geq m - n$. Falls $v_\infty(\mathfrak{a}) \leq 0$, muß daher insbesondere $v_\infty(\mathfrak{a}) \geq \deg(\lambda) + 2 - n$ gelten, und die Bedingungen sind genau dann erfüllt, wenn die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklungen in π_∞ von γ und $\mathfrak{a}$ bei $\pi_\infty^{\deg(\lambda)+2-n}, \ldots, \pi_\infty^{m-n-1}$ übereinstimmen.
Falls $v_\infty(\mathfrak{a}) \geq 1$, so gilt für $\gamma = 0$ sicher $v_\infty(\gamma - \mathfrak{a}) \geq m - n$, und für $\gamma \neq 0$ ist $v_\infty(\gamma - \mathfrak{a}) \geq m - n$ äquivalent zu $\deg(\gamma) \leq n - m$, d. h. man erhält

$$\deg(\gamma) \leq \min\{n - \deg(\lambda) - 2, n - m\} = n - m.$$

In beiden Fällen gibt es also q^{n-m+1} Möglichkeiten für γ, weshalb

$$\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ n \geq m}} \sum_{u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^m} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty(\lambda u + (\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n) \geq 2 \\ v_\infty(u + \gamma\pi_\infty^n - \mathfrak{a}\pi_\infty^n) \geq m}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & u + \gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+n)\overline{s}} q^{m+\nu-2} =$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ n \geq \max\{\deg(\lambda)+2-v_\infty(\mathfrak{a}), m\}}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & \mathfrak{a}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+n)\overline{s}} q^{2n-1}, & \text{falls } v_\infty(\mathfrak{a}) \leq 0, \\ \displaystyle\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ n \geq m}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^m & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+n)\overline{s}} q^{2n-1}, & \text{falls } v_\infty(\mathfrak{a}) \geq 1. \end{cases}$$

Analoge Betrachtungen liefern

$$\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ n \in \mathbb{Z}}} \sum_{u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^{m+1}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty(\lambda u + (\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n) \geq 2 \\ v_\infty(u + \gamma\pi_\infty^n - \mathfrak{a}\pi_\infty^n) \geq m+1}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u + \gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+1+n)\overline{s}} q^{m+\nu} =$$

$$\sum_{m \geq \deg(\lambda)+2} \left(\sum_{\deg(\lambda)+2-v_\infty(\mathfrak{a}) \leq n \leq m} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & \mathfrak{a}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+1+n)\overline{s}} q^{m+n} + \right.$$

$$\left. \sum_{n \geq \max\{\deg(\lambda)+2-v_\infty(\mathfrak{a}), m+1\}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & \mathfrak{a}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+1+n)\overline{s}} q^{2n} \right)$$

für $v_\infty(\mathfrak{a}) \leq 0$ bzw.

$$\sum_{\substack{m \geq \deg(\lambda)+2 \\ n \in \mathbb{Z}}} \sum_{u \in \pi_\infty^{n+1}/\pi_\infty^{m+1}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{F}_q[T] \\ v_\infty(\lambda u + (\mu+\gamma\lambda)\pi_\infty^n) \geq 2 \\ v_\infty(u + \gamma\pi_\infty^n - \mathfrak{a}\pi_\infty^n) \geq m+1}} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & u + \gamma\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+1+n)\overline{s}} q^{m+\nu} =$$

$$\sum_{m \geq \deg(\lambda)+2} \left(\sum_{\deg(\lambda)+2-v_\infty\left(\mathfrak{a}+\frac{\mu}{\lambda}\right) \leq n \leq m} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & \mathfrak{a}\pi_\infty^n \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+1+n)\overline{s}} q^{m+\nu} + \right.$$

$$\left. \sum_{n \geq m+1} f^*\left(\begin{pmatrix} \pi_\infty^{m+1} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix}, \lambda, \mu\right) q^{-(m+1+n)\overline{s}} q^{2n} \right),$$

falls $v_\infty(\mathfrak{a}) \geq 1$. Die Behauptung folgt nun aus Korollar 2.2.9. $\square$

4.2 Hecke-Operatoren

4.2.1 Definition der Hecke-Operatoren

Wie in der Einleitung beschrieben, lassen sich viele Konzepte klassischer Modulformen durch Adelisierung auf andere Körper und Gruppen übertragen. Hier soll die verallgemeinerte adelische Formulierung von Hecke-Operatoren auf harmonische Koketten auf $G(K_\infty)/\Gamma_\infty\langle R\rangle K_\infty^*$ übertragen werden.

Es sei $\mathbb{A}$ der Adelring von $K = \mathbb{F}_q(T)$ und $\mathcal{S}$ die Menge seiner Stellen. Zu einer Stelle $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$ bezeichne $K_\mathfrak{p}$ die Komplettierung bei $\mathfrak{p}$ mit Ganzheitsring $O_\mathfrak{p}$, Ortsuniformisierender $\pi_\mathfrak{p}$ und Bewertung $v_\mathfrak{p}$. Zu jedem $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$ ist die sogenannte $\mathfrak{p}$-Iwahorigruppe $I_\mathfrak{p}$ definiert als

$$I_\mathfrak{p} := \{(g_{ij})_{1\le i,j\le 3} \in G(K_\mathfrak{p}) \mid g_{ij} \in \pi_\mathfrak{p} O_\mathfrak{p} \text{ für alle } i < j\ \}.$$

Es sei

$$\Gamma_\mathfrak{p} := \begin{cases} G(O_\mathfrak{p}), & \text{falls } \mathfrak{p} \neq \infty \text{ und } v_\mathfrak{p}(N) = 0, \\ I_\mathfrak{p}, & \text{falls } \mathfrak{p} = \infty \text{ oder } v_\mathfrak{p}(N) > 0, \end{cases}$$

und

$$\Gamma(\mathbb{A}) = \prod_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}} \Gamma_\mathfrak{p}.$$

Damit gilt $G(\mathbb{A}) = G(K)G(K_\infty)\Gamma(\mathbb{A})$, und man kann einer Funktion

$$f\colon \Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \to \mathbb{C}$$

eine Funktion

$$\varphi\colon G(K)\backslash G(\mathbb{A})/\Gamma(\mathbb{A})\mathbb{A}^* \to \mathbb{C}$$

zuordnen, indem man zu $x \in G(\mathbb{A})$ einen Vertreter der Form $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}\setminus\{\infty\}}, x_\infty\right)$ in $G(K)x\Gamma(\mathbb{A})\mathbb{A}^*$ wählt und

$$\varphi(x) := f(x_\infty)$$

setzt. Dies ist wohldefiniert (siehe hierzu z. B. [Bu], Kap. 3.3, oder [De], Kap. 7.2).

Für $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$ mit $\mathfrak{p} \neq \infty$ und $v_\mathfrak{p}(N) = 0$ seien

$$D_1 := \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 := \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_3 := \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p} \end{pmatrix}$$

und $H_{i,\mathfrak{p}} = 1_{G(O_\mathfrak{p})D_iG(O_\mathfrak{p})}$ die charakteristische Funktion von $G(O_\mathfrak{p})D_iG(O_\mathfrak{p})$ für $1 \le i \le 3$. Die sphärische Hecke-Algebra $H_\mathfrak{p}^{G(O_\mathfrak{p})}$ der $G(O_\mathfrak{p})$-biinvarianten Funktionen auf $G(K_\mathfrak{p})$ mit kompaktem Träger wird erzeugt von $H_{1,\mathfrak{p}}$, $H_{2,\mathfrak{p}}$, $H_{3,\mathfrak{p}} =: H_{3,\mathfrak{p}}^{+1}$ sowie $H_{3,\mathfrak{p}}^{-1} := 1_{G(O_\mathfrak{p})D_3^{-1}G(O_\mathfrak{p})}$ (siehe [Fr], S. 30). Bettet man $g \in G(K_\mathfrak{p})$ in $G(\mathbb{A})$ ein, indem man an allen Stellen $\mathfrak{q} \in \mathcal{S}$ mit $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ die Einheitsmatrix setzt, so operieren die $H_{i,\mathfrak{p}}$ auf der Menge aller Funktionen $\varphi\colon G(K)\backslash G(\mathbb{A})/\Gamma(\mathbb{A})\mathbb{A}^* \to \mathbb{C}$ durch

$$(H_{i,\mathfrak{p}}\varphi)(x) = \int\limits_{G(K_\mathfrak{p})} H_{i,\mathfrak{p}}(g)\varphi(xg)dg,$$

wobei das Haarmaß so normiert sei, daß $G(O_\mathfrak{p})$ das Maß 1 hat. Analoges gilt für $H_{3,\mathfrak{p}}^{-1}$. Dieses Integral läßt sich wie folgt als endliche Summe schreiben.

Satz 4.2.1 *Sei* $\varphi\colon G(K)\backslash G(\mathbb{A})/\Gamma(\mathbb{A})\mathbb{A}^* \to \mathbb{C}$ *eine Funktion. Mit der kanonischen Einbettung von* $G(K_\mathfrak{p})$ *in* $G(\mathbb{A})$ *gilt:*

$$\begin{aligned}
(H_{1,\mathfrak{p}}\varphi)(x) =& \sum_{a,b\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}} \varphi\left(x\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) + \sum_{c\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}} \varphi\left(x\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) +\\
& \varphi\left(x\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}\right),\\
(H_{2,\mathfrak{p}}\varphi)(x) =& \sum_{a,b,c\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}} \varphi\left(x\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) + \sum_{a,b\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}} \varphi\left(x\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}\right) +\\
& \sum_{a\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}} \varphi\left(x\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & a\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}\right),\\
(H_{3,\mathfrak{p}}\varphi)^{\pm 1}(x) =& \varphi(x).
\end{aligned}$$

Beweis Aufgrund von

$$G(O_\mathfrak{p})\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}G(O_\mathfrak{p}) =$$

$$\bigcup_{a,b\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}} \begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}G(O_\mathfrak{p}) \cup \bigcup_{c\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}G(O_\mathfrak{p}) \cup \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}G(O_\mathfrak{p})$$

und der Rechts-$G(O_\mathfrak{p})$-Invarianz von φ erhält man

$$\begin{aligned}
(H_{1,\mathfrak{p}}\varphi)(x) =& \int\limits_{G(K_\mathfrak{p})} H_{i,\mathfrak{p}}(g)\varphi(xg)dg = \int\limits_{G(O_\mathfrak{p})D_1G(O_\mathfrak{p})} \varphi(xg)dg =\\
& \sum_{a,b\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}} \int\limits_{G(O_\mathfrak{p})} \varphi\left(x\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}g\right)dg + \sum_{c\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}} \int\limits_{G(O_\mathfrak{p})} \varphi\left(x\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}g\right)dg +\\
& \int\limits_{G(O_\mathfrak{p})} \varphi\left(x\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}g\right)dg =\\
& \sum_{a,b\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}} \int\limits_{G(O_\mathfrak{p})} \varphi\left(x\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)dg + \sum_{c\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}} \int\limits_{G(O_\mathfrak{p})} \varphi\left(x\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)dg +\\
& \int\limits_{G(O_\mathfrak{p})} \varphi\left(x\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}\right)dg
\end{aligned}$$

und hieraus die Behauptung für $H_{1,\mathfrak{p}}\varphi$ wegen $\int\limits_{G(O_\mathfrak{p})} dg = 1$.

Die Formel für $H_{2,\mathfrak{p}}\varphi$ beweist man analog unter Benutzung von

$$G(O_\mathfrak{p})\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & 0 & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}G(O_\mathfrak{p}) = \bigcup_{a,b,c\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}} \begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}G(O_\mathfrak{p})\cup$$

$$\bigcup_{a,b\in O_{\mathfrak{p}}/\pi_{\mathfrak{p}}O_{\mathfrak{p}}} \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} G(O_{\mathfrak{p}}) \cup \bigcup_{a\in O_{\mathfrak{p}}/\pi_{\mathfrak{p}}O_{\mathfrak{p}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}} & a \\ 0 & 0 & \pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} G(O_{\mathfrak{p}}).$$

Ferner folgt aus

$$G(O_{\mathfrak{p}}) \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} G(O_{\mathfrak{p}}) = \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} G(O_{\mathfrak{p}}),$$

daß

$$(H_{3,\mathfrak{p}}^{+1}\varphi)(x) = \varphi\left(x \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} \right),$$

und die Invarianz von φ unter dem Zentrum $\mathbb{A}^*$ liefert die Behauptung für $H_{3,\mathfrak{p}}^{+1}\varphi$. Für $H_{3,\mathfrak{p}}^{-1}\varphi$ argumentiert man analog. $\square$

Satz 4.2.2 *Seien $\varphi\colon G(K)\backslash G(\mathbb{A})/\Gamma(\mathbb{A})\mathbb{A}^* \to \mathbb{C}$ die zu $f\colon \Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \to \mathbb{C}$ korrespondierende Funktion und $T_{i,\mathfrak{p}}f\colon \Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \to \mathbb{C}$ die Projektion von $H_{i,\mathfrak{p}}\varphi$ auf ∞. Ferner sei*

$$\mathcal{R} := \{r \in \mathbb{F}_q[T] \mid \deg(r) < \deg(\pi_{\mathfrak{p}})\}.$$

Es gilt:

$$(T_{1,\mathfrak{p}}f)(x) = \sum_{a,b\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} x \right) + \sum_{c\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & \pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} x \right) + f\left(\begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \right),$$

$$(T_{2,\mathfrak{p}}f)(x) = \sum_{a,b,c\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & a & ac - b\pi_{\mathfrak{p}} \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}} & c\pi_{\mathfrak{p}} \\ 0 & 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^2 \end{pmatrix} x \right) + \sum_{a,b\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & a\pi_{\mathfrak{p}} & b \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} x \right) +$$

$$\sum_{a\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}} & a \\ 0 & 0 & \pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} x \right),$$

$$(T_{3,\mathfrak{p}}^{\pm 1}f)(x) = f(x).$$

Beweis Die Aussage für $T_{3,\mathfrak{p}}^{\pm 1}f$ ist klar.

Sei $\xi = (\xi_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}\in\mathcal{S}} \in G(\mathbb{A})$ mit $\xi_{\mathfrak{q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K_{\mathfrak{q}})$ für $\mathfrak{q} \neq \infty$ und $\xi_\infty \in G(K_\infty)$. Weiter sei φ die zu f gehörige Funktion auf $G(K)\backslash G(\mathbb{A})/\Gamma(\mathbb{A})\mathbb{A}^*$. Es ist

$$(H_{1,\mathfrak{p}}\varphi)(\xi) =$$

$$\sum_{a,b\in O_{\mathfrak{p}}/\pi_{\mathfrak{p}}O_{\mathfrak{p}}} \varphi\left(\xi \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) + \sum_{c\in O_{\mathfrak{p}}/\pi_{\mathfrak{p}}O_{\mathfrak{p}}} \varphi\left(\xi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) + \varphi\left(\xi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} \right).$$

Man betrachte zunächst $\varphi\left(\xi \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Wegen der Invarianzen von φ kann man das Argument von φ von links mit $\begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \in G(K)$ multiplizieren, ohne den Funktionswert zu ändern. Im Produkt

$$\left(\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\right)_{\mathfrak{q}\in\mathcal{S}} (\xi_\mathfrak{q})_{\mathfrak{q}\in\mathcal{S}} \left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{\mathfrak{q}\in\mathcal{S}\setminus\{\mathfrak{p}\}}, \begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_\mathfrak{p}\right)$$

steht dann an allen Stellen, die von $\mathfrak{p}$ und ∞ verschieden sind, der Eintrag $\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}$, bei $\mathfrak{p}$ steht die Einheitsmatrix und bei ∞ steht $\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\xi_\infty$. Für alle Stellen $\mathfrak{q}$ ungleich $\mathfrak{p},\infty$ ist $\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \in \Gamma_\mathfrak{q}$. Daher liegt die Matrix, die den Eintrag $\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ bei $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{p},\infty$ hat und die Einheitsmatrix bei $\mathfrak{p}$ und ∞, in $\Gamma(\mathbb{A})$, und Rechtsmultiplikation des neuen Arguments hiermit liefert eine Matrix, die an allen Stellen außer ∞ die Einheitsmatrix als Eintrag hat und bei ∞ den Eintrag $\begin{pmatrix}1/\pi_\mathfrak{p} & -a/\pi_\mathfrak{p} & -b/\pi_\mathfrak{p}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xi_\infty$, so daß man

$$\varphi\left(\xi\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}1/\pi_\mathfrak{p} & -a/\pi_\mathfrak{p} & -b/\pi_\mathfrak{p}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xi_\infty\right)$$

erhält. Wenn man nun noch mit $\pi_\mathfrak{p}\in K_\infty^*$ durchmultipliziert, berücksichtigt, daß es kein Unterschied ist, ob man über $a,b\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}$ oder über $-a,-b\in O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}$ summiert und $O_\mathfrak{p}/\pi_\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}\cong\mathcal{R}$ benutzt, so erhält man den ersten Summanden von $T_{1,\mathfrak{p}}f$. Die restlichen beiden Summanden sowie die Formel für $T_{2,\mathfrak{p}}f$ erhält man durch analoge Überlegungen. □

4.2.2 Fourierentwicklung der Hecke-Transformierten

Für ein Primpolynom $\pi_\mathfrak{p}\in\mathbb{F}_q[T]$ gelte für alle $m,n\in\mathbb{Z}$, $u\in K_\infty/\pi_\infty^m O_\infty$, $\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]$ die Konvention

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \frac{\lambda}{\pi_\mathfrak{p}}, \frac{\mu}{\pi_\mathfrak{p}}\right) := 0,\ \text{falls } \pi_\mathfrak{p}\nmid\lambda \text{ oder } \pi_\mathfrak{p}\nmid\mu.$$

Analog seien

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \frac{\lambda}{\pi_\mathfrak{p}}, \mu\right) := 0 =: f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \frac{\mu}{\pi_\mathfrak{p}}\right),$$

falls nicht jeweils sowohl λ als auch μ durch $\pi_\mathfrak{p}$ teilbar ist.

Satz 4.2.3 *Sei $\pi_\mathfrak{p}\in\mathbb{F}_q[T]$ prim vom Grad d und sei wie vor*

$$\mathcal{R} := \{r\in\mathbb{F}_q[T] \mid \deg(r)<\deg(\pi_\mathfrak{p})\}.$$

Für die Hecke-Transformierte $T_{1,\mathfrak{p}}f$ einer Funktion $f\colon \Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \to \mathbb{C}$ gilt

$$(T_{1,\mathfrak{p}}f)\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\Bigg[q^d\left(\sum_{r\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & (u+r\pi_\infty^n)\pi_\mathfrak{p}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \pi_\mathfrak{p}\lambda, \mu-\lambda r\right)\right)+$$
$$q^d f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^d\\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \lambda, \pi_\mathfrak{p}\mu\right) + f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & u\pi_\infty^{-d}\\ 0 & \pi_\infty^{n-d}\end{pmatrix}, \frac{\lambda}{\pi_\mathfrak{p}}, \frac{\mu}{\pi_\mathfrak{p}}\right)\Bigg]\psi_\infty(\lambda v+\mu w).$$

Beweis Gemäß Satz 4.2.2 ist

$$(T_{1,\mathfrak{p}}f)\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\sum_{r,s\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}1 & r & s\\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & 0\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+$$

$$\sum_{t\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & 0 & 0\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & 0 & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=$$

$$\sum_{r,s\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u+r\pi_\infty^n & v+rw+s\\ 0 & \pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^n & \pi_\mathfrak{p}w\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}\right)+$$

$$\sum_{t\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^m & \pi_\mathfrak{p}u & \pi_\mathfrak{p}v\\ 0 & \pi_\infty^n & w+t\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^m & \pi_\mathfrak{p}u & \pi_\mathfrak{p}v\\ 0 & \pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^n & \pi_\mathfrak{p}w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

und dies ist wegen der Invarianz von f unter K_∞^* gleich

$$\sum_{r,s\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m\pi_\mathfrak{p}^{-1} & (u+r\pi_\infty^n)\pi_\mathfrak{p}^{-1} & (v+rw+s)\pi_\mathfrak{p}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+$$

$$\sum_{t\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n\pi_\mathfrak{p}^{-1} & (w+t)\pi_\mathfrak{p}^{-1}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^m & \pi_\mathfrak{p}u & \pi_\mathfrak{p}v\\ 0 & \pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^n & \pi_\mathfrak{p}w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Da f außerdem rechtsinvariant unter Γ_∞ ist, kann man das Argument spaltenweise mit einer Einheit aus O_∞ durchmultiplizieren. Wegen $\pi_\mathfrak{p}=\pi_\infty^{-d}\underbrace{(\pi_\infty^d\pi_\mathfrak{p})}_{\in O_\infty^*}$ ist Obiges gleich

$$\sum_{r,s\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & (u+r\pi_\infty^n)\pi_\mathfrak{p}^{-1} & (v+rw+s)\pi_\mathfrak{p}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+$$

$$\sum_{t\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^d & v\\ 0 & \pi_\infty^{n+d} & (w+t)\pi_\mathfrak{p}^{-1}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & u\pi_\infty^{-d} & \pi_\mathfrak{p}v\\ 0 & \pi_\infty^{n-d} & \pi_\mathfrak{p}w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Setzt man jeweils die Fourierentwicklung von f ein, ist der letzte Summand gemäß der Konvention

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & u\pi_\infty^{-d}\\ 0 & \pi_\infty^{n-d}\end{pmatrix},\frac{\lambda}{\pi_\mathfrak{p}},\frac{\mu}{\pi_\mathfrak{p}}\right)=0,$$

falls nicht sowohl λ als auch μ durch $\pi_\mathfrak{p}$ teilbar sind, gleich

$$f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & u\pi_\infty^{-d} & \pi_\mathfrak{p}v\\ 0 & \pi_\infty^{n-d} & \pi_\mathfrak{p}w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & u\pi_\infty^{-d}\\ 0 & \pi_\infty^{n-d}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda v\pi_\mathfrak{p}+\mu w\pi_\mathfrak{p})=$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\pi_\mathfrak{p}\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & u\pi_\infty^{-d}\\ 0 & \pi_\infty^{n-d}\end{pmatrix},\frac{\lambda}{\pi_\mathfrak{p}},\frac{\mu}{\pi_\mathfrak{p}}\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w)=$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & u\pi_\infty^{-d}\\ 0 & \pi_\infty^{n-d}\end{pmatrix}, \frac{\lambda}{\pi_\mathfrak{p}}, \frac{\mu}{\pi_\mathfrak{p}}\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w).$$

Für den zweiten Summanden erhält man

$$\sum_{t\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m} & u\pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^{d} & v\\ 0 & \pi_\infty^{n+d} & (w+t)\pi_\mathfrak{p}^{-1}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\sum_{t\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m} & u\pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^{d}\\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu(w+t)\pi_\mathfrak{p}^{-1}) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m} & u\pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^{d}\\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w\pi_\mathfrak{p}^{-1})\sum_{t\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\mu t\pi_\mathfrak{p}^{-1}).$$

Falls $\pi_\mathfrak{p}$ ein Teiler von μ ist, so ist $\mu t\pi_\mathfrak{p}^{-1}\in\mathbb{F}_q[T]$ und daher $\psi_\infty(\mu t\pi_\mathfrak{p}^{-1})=1$ für alle $t\in\mathcal{R}$, d. h.

$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m} & u\pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^{d}\\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w\pi_\mathfrak{p}^{-1})\sum_{t\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\mu t\pi_\mathfrak{p}^{-1}) =$$

$$q^d f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m} & u\pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^{d}\\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w\pi_\mathfrak{p}^{-1}) \text{ für } \pi_\mathfrak{p}\mid\mu.$$

Wenn $\pi_\mathfrak{p}\nmid\mu$, teile man μ mit Rest durch $\pi_\mathfrak{p}$:

$$\mu = k\pi_\mathfrak{p}+r \text{ mit } k,r\in\mathbb{F}_q[T],\ 0\le\deg(r)\le d-1.$$

Man erhält $\psi_\infty(\mu t\pi_\mathfrak{p}^{-1})=\psi_\infty((k\pi_\mathfrak{p}+r)t\pi_\mathfrak{p}^{-1})=\psi_\infty(rt\pi_\mathfrak{p}^{-1})$, da $\psi_\infty(kt)=1$ wegen $kt\in\mathbb{F}_q[T]$. Es gilt

$$\sum_{t\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\mu t\pi_\mathfrak{p}^{-1}) = \sum_{t\in\mathcal{R}}\psi_\infty(tr\pi_\mathfrak{p}^{-1}) = \sum_{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{d-1}\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty((\varepsilon_0+\varepsilon_1T+\ldots+\varepsilon_{d-1}T^{d-1})r\pi_\mathfrak{p}^{-1}) =$$

$$\sum_{\varepsilon_0\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\varepsilon_0r\pi_\mathfrak{p}^{-1})\sum_{\varepsilon_1\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\varepsilon_1Tr\pi_\mathfrak{p}^{-1})\ldots\sum_{\varepsilon_{d-1}\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\varepsilon_{d-1}T^{d-1}r\pi_\mathfrak{p}^{-1}).$$

Sei $e:=d-\deg(r)-1$, dann ist $0\le e\le d-1$, und in dem Produkt auf der rechten Seite kommt der Faktor

$$\sum_{\varepsilon_e\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\varepsilon_eT^er\pi_\mathfrak{p}^{-1})$$

vor. Nach Wahl von e ist

$$v_\infty(T^er\pi_\mathfrak{p}^{-1}) = -e-\deg(r)+d = -(d-\deg(r)-1)-\deg(r)+d = 1,$$

also

$$T^er\pi_\mathfrak{p}^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty}a_i\pi_\infty^i \text{ mit } a_i\in\mathbb{F}_q,\ a_1\neq 0.$$

Da nur der Koeffizient vor π_∞ in der Potenzreihenentwicklung von $\varepsilon_eT^er\pi_\mathfrak{p}^{-1}$ den Wert von $\psi_\infty(\varepsilon_eT^er\pi_\mathfrak{p}^{-1})$ bestimmt, ist

$$\sum_{\varepsilon_e\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\varepsilon_eT^er\pi_\mathfrak{p}^{-1}) = \sum_{\varepsilon_e\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\varepsilon_ea_1\pi_\infty) = \sum_{\tilde\varepsilon\in\mathbb{F}_q}\psi_\infty(\tilde\varepsilon\pi_\infty).$$

Mittels Lemma 2.2.2 folgt
$$\sum_{\tilde{\varepsilon}\in\mathbb{F}_q} \psi_\infty(\tilde{\varepsilon}\pi_\infty) = 0,$$
und deswegen ist
$$\sum_{t\in\mathcal{R}} \psi_\infty(\mu t \pi_{\mathfrak{p}}^{-1}) = 0,$$
so daß
$$f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\pi_{\mathfrak{p}}\pi_\infty^d \\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda v + \mu w \pi_{\mathfrak{p}}^{-1})\sum_{t\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\mu t\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}) = 0 \text{ für } \pi_{\mathfrak{p}} \nmid \mu.$$

Zusammenfassend erhält man
$$\sum_{t\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\pi_{\mathfrak{p}}\pi_\infty^d & v \\ 0 & \pi_\infty^{n+d} & (w+t)\pi_{\mathfrak{p}}^{-1} \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$
$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{F}_q[T]\\ \mu\in\pi_{\mathfrak{p}}\mathbb{F}_q[T]}} q^d f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\pi_{\mathfrak{p}}\pi_\infty^d \\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda v + \frac{\mu}{\pi_{\mathfrak{p}}} w) =$$
$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} q^d f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u\pi_{\mathfrak{p}}\pi_\infty^d \\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \lambda, \pi_{\mathfrak{p}}\mu\right)\psi_\infty(\lambda v + \mu w).$$

Abschließend bleibt
$$\sum_{r,s\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & (u+r\pi_\infty^n)\pi_{\mathfrak{p}}^{-1} & (v+rw+s)\pi_{\mathfrak{p}}^{-1} \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$
zu betrachten. Fourierentwicklung von f führt auf
$$\sum_{r,s\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & (u+r\pi_\infty^n)\pi_{\mathfrak{p}}^{-1} & (v+rw+s)\pi_{\mathfrak{p}}^{-1} \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$
$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\sum_{r,s\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & (u+r\pi_\infty^n)\pi_{\mathfrak{p}}^{-1} \\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda(v+rw+s)\pi_{\mathfrak{p}}^{-1} + \mu w) =$$
$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\sum_{r\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & (u+r\pi_\infty^n)\pi_{\mathfrak{p}}^{-1} \\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda(v+rw)\pi_{\mathfrak{p}}^{-1} + \mu w)\sum_{s\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\lambda s\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}).$$
Die Betrachtung von $\sum_{s\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\lambda s\pi_{\mathfrak{p}}^{-1})$ ergibt analog zu obigen Überlegungen für $\sum_{t\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\mu t\pi_{\mathfrak{p}}^{-1})$, daß
$$\sum_{s\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\lambda s\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}) = \begin{cases} q^d, & \text{falls } \pi_{\mathfrak{p}} \mid \lambda, \\ 0, & \text{falls } \pi_{\mathfrak{p}} \nmid \lambda. \end{cases}$$
Daher ist
$$\sum_{r,s\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & (u+r\pi_\infty^n)\pi_{\mathfrak{p}}^{-1} & (v+rw+s)\pi_{\mathfrak{p}}^{-1} \\ 0 & \pi_\infty^n & w \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$

$$\sum_{\substack{\lambda\in\pi_\mathfrak{p}\mathbb{F}_q[T]\\ \mu\in\mathbb{F}_q[T]}} q^d \sum_{r\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & (u+r\pi_\infty^n)\pi_\mathfrak{p}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda(v+rw)\pi_\mathfrak{p}^{-1}+\mu w) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} q^d \sum_{r\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & (u+r\pi_\infty^n)\pi_\mathfrak{p}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \pi_\mathfrak{p}\lambda, \mu\right)\psi_\infty(\underbrace{\lambda(v+rw)+\mu w}_{=\lambda v+(\lambda r+\mu)w}).$$

Die Abbildung $\mu\mapsto\tilde{\mu}:=\lambda r+\mu$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{F}_q[T]$, so daß man den Ausdruck auf der rechten Seite schreiben kann als

$$\sum_{\lambda,\tilde{\mu}\in\mathbb{F}_q[T]} q^d \sum_{r\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & (u+r\pi_\infty^n)\pi_\mathfrak{p}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \pi_\mathfrak{p}\lambda, \tilde{\mu}-\lambda r\right)\psi_\infty(\lambda v+\tilde{\mu}w).$$

□

Satz 4.2.4 *Sei $\pi_\mathfrak{p}\in\mathbb{F}_q[T]$ prim vom Grad d und*

$$\mathcal{R}:=\{r\in\mathbb{F}_q[T]\mid\ \deg(r)<\deg(\pi_\mathfrak{p})\}\,.$$

Für die Hecke-Transformierte $T_{2,\mathfrak{p}}f$ einer Funktion $f:\Gamma_0(N)\backslash G(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^*\to\mathbb{C}$ gilt

$$(T_{2,\mathfrak{p}}f)\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\left[\sum_{r\in\mathcal{R}} q^{2d} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & u\pi_\infty^d+r\pi_\infty^{n+d}\pi_\mathfrak{p}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \pi_\mathfrak{p}\lambda, \pi_\mathfrak{p}\mu-\lambda r\right)+\right.$$

$$\left. q^d\sum_{r\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & \pi_\mathfrak{p}^{-1}\pi_\infty^{-d}(u+r\pi_\infty^n)\\ 0 & \pi_\infty^{n-d}\end{pmatrix}, \lambda, \frac{\mu-\lambda r}{\pi_\mathfrak{p}}\right) + q^d f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & \pi_\mathfrak{p}u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix}, \frac{\lambda}{\pi_\mathfrak{p}}, \mu\right)\right]\psi_\infty(\lambda v+\mu w).$$

Beweis Nach Satz 4.2.2 ist

$$(T_{2,\mathfrak{p}}f)(x) = \sum_{r,s,t\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & r & rt-s\pi_\mathfrak{p}\\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & t\pi_\mathfrak{p}\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+$$

$$\sum_{r,s\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p} & r\pi_\mathfrak{p} & s\\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^2 & 0\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+\sum_{r\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p}^2 & 0 & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{p} & r\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & u & v\\ 0 & \pi_\infty^n & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=$$

$$\sum_{r,s,t\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^m & u\pi_\mathfrak{p}+r\pi_\infty^n & \pi_\mathfrak{p}v+rw+rt-s\pi_\mathfrak{p}\\ 0 & \pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^n & \pi_\mathfrak{p}w+\pi_\mathfrak{p}t\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}^2\end{pmatrix}\right)+$$

$$\sum_{r,s\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^m & \pi_\mathfrak{p}u+r\pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^n & \pi_\mathfrak{p}v+\pi_\mathfrak{p}rw+s\\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^2\pi_\infty^n & \pi_\mathfrak{p}^2w\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}\right)+\sum_{r\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{p}^2\pi_\infty^m & \pi_\mathfrak{p}^2u & \pi_\mathfrak{p}^2v\\ 0 & \pi_\mathfrak{p}\pi_\infty^n & \pi_\mathfrak{p}w+r\\ 0 & 0 & \pi_\mathfrak{p}\end{pmatrix}\right).$$

Umformungen wie zu Beginn im Beweis des letzten Satzes ergeben, daß dies gleich ist zu

$$\sum_{r,s,t\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & u\pi_\infty^d+r\pi_\infty^{n+d}\pi_\mathfrak{p}^{-1} & \pi_\mathfrak{p}^{-2}(\pi_\mathfrak{p}v+rw+rt-\pi_\mathfrak{p}s)\\ 0 & \pi_\infty^{n+d} & \pi_\mathfrak{p}^{-1}(w+t)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+$$

$$\sum_{r,s\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & \pi_\mathfrak{p}^{-1}\pi_\infty^{-d}(u+r\pi_\infty^n) & v+rw+s\pi_\mathfrak{p}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^{n-d} & \pi_\mathfrak{p} w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+\sum_{r\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & \pi_\mathfrak{p} u & \pi_\mathfrak{p} v\\ 0 & \pi_\infty^n & w+\pi_\mathfrak{p}^{-1}r\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Wie im vorherigen Beweis setzt man in die einzelnen Summanden die Fourierentwicklung von f ein. Für den letzten Summanden erhält man

$$\sum_{r\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & \pi_\mathfrak{p} u & \pi_\mathfrak{p} v\\ 0 & \pi_\infty^n & w+\pi_\mathfrak{p}^{-1}r\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\ \sum_{r\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & \pi_\mathfrak{p} u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda\pi_\mathfrak{p} v+\mu(w+\pi_\mathfrak{p}^{-1}r)) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & \pi_\mathfrak{p} u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda\pi_\mathfrak{p} v+\mu w)\sum_{r\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\mu\pi_\mathfrak{p}^{-1}r).$$

Im Beweis des letzten Satzes wurde gezeigt, daß $\sum_{r\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\mu\pi_\mathfrak{p}^{-1}r)$ gleich q^d ist, falls μ von $\pi_\mathfrak{p}$ geteilt wird, und daß die Summe andernfalls verschwindet. Daher ist obiger Ausdruck gleich

$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{F}_q[T]\\ \mu\in\pi_\mathfrak{p}\mathbb{F}_q[T]}} q^d f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & \pi_\mathfrak{p} u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda\pi_\mathfrak{p} v+\mu w) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\pi_\mathfrak{p}\mathbb{F}_q[T]} q^d f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & \pi_\mathfrak{p} u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\frac{\lambda}{\pi_\mathfrak{p}},\mu\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} q^d f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & \pi_\mathfrak{p} u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\frac{\lambda}{\pi_\mathfrak{p}},\mu\right)\psi_\infty(\lambda v+\mu w)$$

gemäß der Konvention, daß $f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m-d} & \pi_\mathfrak{p} u\\ 0 & \pi_\infty^n\end{pmatrix},\frac{\lambda}{\pi_\mathfrak{p}},\mu\right) = 0$ falls nicht sowohl λ als auch μ von $\pi_\mathfrak{p}$ geteilt werden.

Für den mittleren Summanden ergibt sich

$$\sum_{r,s\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & \pi_\mathfrak{p}^{-1}\pi_\infty^{-d}(u+r\pi_\infty^n) & v+rw+s\pi_\mathfrak{p}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^{n-d} & \pi_\mathfrak{p} w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\ \sum_{r,s\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & \pi_\mathfrak{p}^{-1}\pi_\infty^{-d}(u+r\pi_\infty^n)\\ 0 & \pi_\infty^{n-d}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda(v+rw+s\pi_\mathfrak{p}^{-1})+\mu w\pi_\mathfrak{p}) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\ \sum_{r\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & \pi_\mathfrak{p}^{-1}\pi_\infty^{-d}(u+r\pi_\infty^n)\\ 0 & \pi_\infty^{n-d}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda(v+rw)+\mu w\pi_\mathfrak{p})\sum_{s\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\lambda s\pi_\mathfrak{p}^{-1}).$$

Auch hier ist wieder $\sum_{s\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\lambda s\pi_\mathfrak{p}^{-1})=0$, falls $\pi_\mathfrak{p}\nmid\lambda$, und $\sum_{s\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\lambda s\pi_\mathfrak{p}^{-1})=q^d$ sonst, so daß man daraus

$$\sum_{\substack{\lambda\in\pi_\mathfrak{p}\mathbb{F}_q[T]\\ \mu\in\mathbb{F}_q[T]}} q^d\sum_{r\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & \pi_\mathfrak{p}^{-1}\pi_\infty^{-d}(u+r\pi_\infty^n)\\ 0 & \pi_\infty^{n-d}\end{pmatrix},\lambda,\mu\right)\psi_\infty(\lambda(v+rw)+\mu w\pi_\mathfrak{p}) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\pi_{\mathfrak{p}}\mathbb{F}_q[T]} q^d \sum_{r\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & \pi_{\mathfrak{p}}^{-1}\pi_\infty^{-d}(u+r\pi_\infty^n)\\ 0 & \pi_\infty^{n-d}\end{pmatrix}, \lambda, \frac{\mu}{\pi_{\mathfrak{p}}}\right)\psi_\infty(\lambda(v+rw)+\mu w) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} q^d \sum_{r\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & \pi_{\mathfrak{p}}^{-1}\pi_\infty^{-d}(u+r\pi_\infty^n)\\ 0 & \pi_\infty^{n-d}\end{pmatrix}, \lambda, \frac{\mu}{\pi_{\mathfrak{p}}}\right)\psi_\infty(\lambda v+(\lambda r+\mu)w)$$

erhält (es sei wieder an $f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & \pi_{\mathfrak{p}}^{-1}\pi_\infty^{-d}(u+r\pi_\infty^n)\\ 0 & \pi_\infty^{n-d}\end{pmatrix}, \lambda, \frac{\mu}{\pi_{\mathfrak{p}}}\right) = 0$, falls nicht $\lambda,\mu\in\pi_{\mathfrak{p}}\mathbb{F}_q[T]$, erinnert). Mittels der Substitution $\tilde{\mu}=\mu+\lambda r$ ergibt sich

$$\sum_{\lambda,\tilde{\mu}\in\mathbb{F}_q[T]} q^d \sum_{r\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^m & \pi_{\mathfrak{p}}^{-1}\pi_\infty^{-d}(u+r\pi_\infty^n)\\ 0 & \pi_\infty^{n-d}\end{pmatrix}, \lambda, \frac{\tilde{\mu}-\lambda r}{\pi_{\mathfrak{p}}}\right)\psi_\infty(\lambda v+\tilde{\mu}w).$$

Abschließend betrachte man

$$\sum_{r,s,t\in\mathcal{R}} f\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & u\pi_\infty^d + r\pi_\infty^{n+d}\pi_{\mathfrak{p}}^{-1} & \pi_{\mathfrak{p}}^{-2}(\pi_{\mathfrak{p}}v+rw+rt-\pi_{\mathfrak{p}}s)\\ 0 & \pi_\infty^{n+d} & \pi_{\mathfrak{p}}^{-1}(w+t)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\ \sum_{r,s,t\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & u\pi_\infty^d + r\pi_\infty^{n+d}\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\cdot$$
$$\psi_\infty(\lambda\pi_{\mathfrak{p}}^{-2}(\pi_{\mathfrak{p}}v+rw+rt-\pi_{\mathfrak{p}}s)+\mu\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}(w+t)) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]}\ \sum_{r\in\mathcal{R}} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & u\pi_\infty^d + r\pi_\infty^{n+d}\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda\pi_{\mathfrak{p}}^{-2}(\pi_{\mathfrak{p}}v+rw)+\mu\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}w)\cdot$$
$$\sum_{s\in\mathcal{R}}\psi_\infty(-\lambda\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}s)\sum_{t\in R}\psi_\infty(\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}t(\lambda r\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}+\mu)).$$

Wie vor verschwindet die Summe $\sum_{s\in\mathcal{R}}\psi_\infty(-\lambda\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}s)$, falls $\pi_{\mathfrak{p}}\nmid\lambda$, und ist andernfalls gleich q^d. Dies führt auf

$$\sum_{r\in\mathcal{R}}\ \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q[T]} q^d f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & u\pi_\infty^d + r\pi_\infty^{n+d}\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \pi_{\mathfrak{p}}\lambda, \mu\right)\psi_\infty(\lambda\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\pi_{\mathfrak{p}}v+rw)+\mu\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}w)\cdot$$
$$\sum_{t\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}t(\lambda r+\mu)).$$

Für jedes feste $r\in\mathcal{R}$ ist die Abbildung $\mu\mapsto\tilde{\mu}:=\lambda r+\mu$ ein Isomorphismus von $\mathbb{F}_q[T]$, und Substitution führt auf

$$\sum_{r\in\mathcal{R}}\ \sum_{\lambda,\tilde{\mu}\in\mathbb{F}_q[T]} q^d f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & u\pi_\infty^d + r\pi_\infty^{n+d}\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \pi_{\mathfrak{p}}\lambda, \tilde{\mu}-\lambda r\right)\psi_\infty(\lambda v+\tilde{\mu}w\pi_{\mathfrak{p}}^{-1})\sum_{t\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}t\tilde{\mu}).$$

Behandelt man die Summe $\sum_{t\in\mathcal{R}}\psi_\infty(\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}t\tilde{\mu})$ wie gehabt, erhält man

$$\sum_{\lambda,\tilde{\mu}\in\mathbb{F}_q[T]}\ \sum_{r\in\mathcal{R}} q^{2d} f^*\left(\begin{pmatrix}\pi_\infty^{m+d} & u\pi_\infty^d + r\pi_\infty^{n+d}\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}\\ 0 & \pi_\infty^{n+d}\end{pmatrix}, \pi_{\mathfrak{p}}\lambda, \pi_{\mathfrak{p}}\tilde{\mu}-\lambda r\right)\psi_\infty(\lambda v+\tilde{\mu}w).$$

$\square$

Literaturverzeichnis

[Bö] Böttcher, Anna: *Berechnung von rationalen Punkten auf elliptischen Kurven über globalen Funktionenkörpern*, Diplomarbeit, Universität Kassel, Kassel (2008)

[BCDT] Breuil, Christophe; Conrad, Brian; Diamond, Fred; Taylor, Richard: *On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: Wild 3-adic exercises*, Journal of the American Mathematical Society 14, S. 843 – 939 (2001)

[Bu] Bump, Daniel: *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 55, Cambridge University Press, Cambridge (1998)

[De] Deitmar, Anton: *Automorphe Formen*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2010)

[Fr] Frenkel, Edward: *Lectures on the Langlands Program and conformal field theory*, arXiv:hep-th/0512172v1

[Fre] Frey, Gerhard: *Links between stable elliptic curves and certain diophantine equations*, Annales Universitatis Saraviensis, Series Mathematicae 1, S. 1 – 40 (1986)

[Ge] Gebhardt, Max: *Operationen arithmetischer Untergruppen von GL_3 auf Bruhat-Tits-Gebäuden*, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken (1996)

[Hi] Hinrichs, Aicke: *Skript zur Vorlesung „Fourieranalysis“*, Versionsnummer 2939, abgerufen unter http://uni-skripte.lug-jena.de/hinrichs-fourierana.pdf am 21.05.2010

[Kn] Knapp, Anthony: *Elliptic Curves*, Mathematical Notes 40, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1992)

[KK] Koecher, Max; Krieg, Aloys: *Elliptische Funktionen und Modulformen*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2007)

[Ku] Kudla, Stephen: *From modular forms to automorphic representations*, in: *An introduction to the Langlands program*, herausgegeben von Joseph Bernstein und Stephen Gelbart, Birkhäuser, Boston Basel Berlin (2004)

[P1] Petersson, Hans: *Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poincaréscher Reihen*, Mathematische Annalen 103, S. 369 - 436 (1939)

[P2] Petersson, Hans: *Darstellung der eigentlich-automorphen Formen (-2)-ter Dimension durch eine Art Poincaréscher Reihen bei gewissen Grenzkreisgruppen*, Mathematische Annalen 105, S. 206 - 239 (1931)

[P3] Petersson, Hans: *Ein Fundamentalsatz aus der Theorie der ganzen automorphen Formen*, Mathematische Annalen 106, S. 343 - 368 (1932)

[Ri] Ribet, Kenneth: *On modular representations of* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *arising from modular forms*, Inventiones Mathematicae 100, S. 431–476 (1990)

[Rü] Rück, Hans-Georg: *Poincaré series of Drinfeld type*, Archiv der Mathematik 68, S. 190 - 201 (1997)

[Sh] de Shalit, Ehud: *Residues on buildings, and de-Rham cohomology of p-adic symmetric domains*, Duke Mathematical Journal, Band 106, Nummer 1, S. 123 - 191 (2001)

[We] Weil, André: *Dirichlet series and automorphic forms*, Lecture Notes in Mathematics 189, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1971)

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Dissertation selbstständig, ohne unerlaubte Hilfe Dritter angefertigt und andere als die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Dritte waren an der inhaltlich-materiellen Erstellung der Dissertation nicht beteiligt; insbesondere habe ich hierfür nicht die Hilfe eines Promotionsberaters in Anspruch genommen. Kein Teil dieser Arbeit ist in einem anderen Promotions- oder Habilitationsverfahren verwendet worden.

Kassel, den ____________________ ____________________________