

Zur Potentialtheorie des Oseen-Systems

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
am Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
der Universität Kassel

vorgelegt von
Emma Steinbrecher

Kassel, Dezember 2016

Erstgutachter: Prof. Dr. Werner Varnhorn, Universität Kassel
Zweitgutachter: Prof. Dr. Paul Deuring, Université du Littoral Côte d'Opale

Tag der Disputation: 13. Februar 2017

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben:

Mein größter Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Werner Varnhorn, der es mir ermöglicht hat, über interessante Fragestellungen zur Lösungstheorie des Oseen-Systems im Rahmen einer Dissertation weiter zu forschen. Bereits während meines Studiums konnte ich mich bei Fragen an ihn wenden und wurde immer warmherzig von ihm aufgenommen. Er hat mich während meiner ganzen Promotionsphase hervorragend betreut, stand mir immer mit Rat und Tat bei fachlichen Fragen zur Seite und verstand es mich in richtigem Moment zu motivieren und mir Mut zu machen.

Dr. Florian Zanger danke ich für die zahlreichen fachlichen Diskussionen und Anmerkungen sowie für die vielen nicht-wissenschaftlichen und motivierenden Gespräche, die meine Arbeit ebenso unterstützt haben.

Dem gesamten Institut für Mathematik möchte ich für die angenehme und hilfsbereite Arbeitsatmosphäre meinen Dank aussprechen. Besonders sind an dieser Stelle Frau Prof. Dr. Maria Specovius-Neugebauer, Frau Prof. Dr. Dorothee Knees, Carolin Heutling, Damian Bartocha, Herr Dr. Athanasios Stylianou und Yongming Luo zu nennen.

Meinem Mann Alexander Steinbrecher, der stets an mich geglaubt und mich in jeder Hinsicht bestens unterstützt hat, gilt ein großer Dank. Meinem Sohn Richard danke ich für die nötige wohlthuende Ablenkung.

Besonderer Dank geht an meine Schwiegermutter Swetlana Steinbrecher, die es mir ermöglicht hat, nach einem Jahr Elternzeit die Arbeit an meiner Dissertation wieder aufzunehmen, indem sie auf Richard aufpasste. Ich wusste, dass Richard in besten Händen ist und konnte deshalb mit ruhigem Herzen von zu Hause wegbleiben um mich meiner Arbeit zu widmen. Meinem Schwiegervater Waldemar Steinbrecher danke ich ebenso für seine liebe Unterstützung.

Ich danke meiner Mutter Julia Skopin dafür, dass sie stets für mich da ist und ein offenes Ohr für mich hat.

Ich bedanke mich auch bei meinen Verwandten und Freunden für ihre Unterstützung und ihre Aufmunterungen.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	7
1.1 Bezeichnungen	7
1.2 Funktionalanalysis	10
2 Skalare Oseen-Gleichung im \mathbb{R}^3	15
2.1 Zur Potentialtheorie der skalaren Oseen-Gleichung	15
2.2 Randintegralgleichungen	27
3 Hydrodynamische Potentialtheorie	33
4 Oseen-System im \mathbb{R}^3	41
4.1 Einführung	41
4.2 Greenschen Formeln für die Oseen-Operatoren	42
4.3 Fundamentaltensor	47
4.4 Darstellungsformel	58
5 Flächenpotentiale	63
5.1 Definition und Eigenschaften	63
5.2 Flächenpotentiale für den adjungierten Oseen-Operator	70
5.3 Abklingverhalten der Flächenpotentiale für $ x \rightarrow \infty$	74
6 Randwertaufgaben zum Oseen-System	77
6.1 Definition der Randwertaufgaben	77
6.2 Eindeutigkeitssätze	78
6.3 Existenz der Lösungen	82
7 Randwertaufgaben in Gebieten mit Rissen	97
8 Anhang	103
8.1 Berechnungen zur skalaren Oseen-Gleichung	103
8.2 Berechnungen zum Oseen-System	104
Literatur	107
Symbolverzeichnis	111
Erklärung	113

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit entwickeln wir eine explizite Potentialtheorie für die Oseen-Gleichungen und lösen das innere und das äußere Dirichlet-Problem sowie das innere und das äußere adjungierte Neumann-Problem mit einer modifizierten Neumann-Randbedingung. Darüber hinaus betrachten wir eine Randwertaufgabe für die Oseen-Gleichungen in Gebieten mit Rissen, wobei hier die Dirichlet-Bedingung auf dem Rand des Gebietes und Sprünge der Geschwindigkeit und der Normalkomponenten des Oseen-Spannungstensors auf dem Riss vorgeschrieben werden.

Carl Wilhelm Oseen (*17. April 1879 in Lund, †7. November 1944 in Uppsala) war ein schwedischer Mathematiker und Physiker. Er studierte in Lund und Göttingen. Nach seiner Tätigkeit als Lektor für Physik in Lund erhielt er 1909 einen Ruf auf den Lehrstuhl für Mathematische Physik an der Universität Uppsala. 1921 wurde er Mitglied der Königlich Schwedischen Akademie der Wissenschaften sowie 1933 Vorstand des Nobel-Institutes, das vorher unter Arrhenius seinen Schwerpunkt in physikalischer Chemie hatte und sich mit Oseen auf theoretische Physik ausrichtete. 1921 schlug er vor, Einstein den Physik-Nobelpreis für seine Arbeiten über den photoelektrischen Effekt zu verleihen. Oseen formulierte die Grundzüge der Elastizitätstheorie flüssiger Kristalle. Er war einer der ersten schwedischen Physiker, die die Atomtheorie von Niels Bohr akzeptierten.



Im Allgemeinen wird die Strömung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit durch die nichtlinearen instationären Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } (0, T) \times G, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{in } (0, T) \times G, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{auf } (0, T) \times \partial G, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 && \text{in } \{0\} \times G\end{aligned}\tag{0.1}$$

beschrieben, wobei das Strömungsgebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ und $T \in (0, \infty]$ vorgegeben sind. Das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} : (0, T) \times G \rightarrow \mathbb{R}^3$ und der zugehörige Druck $p : (0, T) \times G \rightarrow \mathbb{R}$ der Flüssigkeit sind die gesuchten Funktionen. Die kinematische Viskosität $\nu > 0$, die Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{u}_0 : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ und die auf die Flüssigkeit wirkende äußere Kraft $\mathbf{f} : (0, T) \times G \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind gegeben. Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen gelten für viele wichtige Fluide, z.B. für Wasser und für flüssige Metalle. Im vorliegenden Fall eines dreidimensionalen Strömungsgebiets konnten diese Gleichungen bis heute nicht gelöst werden, d.h., die Existenz einer zeitlich globalen glatten Lösung von (0.1) konnte für beliebige glatte Daten $\nu, \mathbf{f}, \mathbf{u}_0$ bisher nicht nachgewiesen werden. Dieses Pro-

blem gehört zu den sieben Millenniumsproblemen, für deren Lösung das renommierte Clay Mathematics Institute je eine Million Dollar ausgelobt hat.

Durch Linearisierung der zugehörigen stationären Navier-Stokes-Gleichungen um einen von Null verschiedenen konstanten Vektor $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty$ (um die Konvektion nicht völlig aufzugeben wie bei den Stokes-Gleichungen) erhält man im Falle $\mathbf{u}_\infty = (\kappa, 0, 0)^T$ mit $\kappa > 0$ aus (0.1) die so genannten Oseen-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \kappa\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } G, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{in } G, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{auf } \partial G. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Diese wurden 1927 von C. W. Oseen [Ose27] vorgestellt und bisher hauptsächlich in Außengebieten mit Dirichlet-Randbedingung behandelt. Wichtige Beiträge in zwei und drei Raumdimensionen gehen auf Finn [Fin61], [Fin65] zurück. Farwig [Far92], Farwig, Sohr [FS98], Kračmar, Novotný, Pokorný [KNP01] lösen das Außengebiet-Problem für die Oseen-Gleichungen in gewichteten Sobolev-Räumen. Galdi [Gal11] betrachtet das Oseen-System in $W_{loc}^{m,p}$ -Räumen, und Bemelmans [Bem78] sowie Enomoto, Shibata [ES05] die zugehörige Oseen-Halbgruppe im instationären Fall. Kračmar, Medková, Nečasová, Varnhorn [KMN13] beweisen die so genannte Maximum-Modulus-Abschätzung für das Oseen-Problem. Faxén beschäftigt sich in [Fax29] mit der Potentialtheorie der Oseen-Gleichungen und untersucht die zugehörigen RIGL'en (Randintegralgleichungen) auf Lösbarkeit. Bezüglich der skalaren Oseen-Gleichung gehen die wichtigsten Resultate in gewichteten Sobolev-Räumen auf Amrouche, Bouzit [AB08b], [AB08a] und Amrouche, Razafison [AR07] zurück. Skopin [Sko10] und Medkova, Skopin, Varnhorn [MSV12] entwickeln eine explizite Potentialtheorie für die skalare Oseen-Gleichung und lösen in [MSV13] das zugehörige Robin-Problem. Das instationäre Oseen-System wird von Kobayashi, Shibata [KS98] und kürzlich von Deuring [Deu06], [Deu08], [Deu09] untersucht.

Im Einzelnen gliedert sich die vorliegende Arbeit wie folgt:

Nachdem wir im ersten Kapitel die notwendigen mathematischen Grundlagen und Bezeichnungen eingeführt haben, stellen wir im zweiten Kapitel die Potentialtheorie der skalaren Oseen-Gleichung

$$-\nu\Delta u + \kappa\partial_1 u = 0 \quad \text{in } \Omega \text{ bzw. in } \Omega^*$$

mit vorgegebenen Randbedingungen vor. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes C^2 -Gebiet mit zusammenhängendem Rand $\partial\Omega$, so dass $\Omega^* := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ ein Außengebiet ist. Neben dem Dirichlet-Problem betrachten wir hier auch nicht-konventionelle Neumann-Probleme, d.h., wir ersetzen die aus der klassischen Potentialtheorie bekannte Neumann-Bedingung $\partial_n u = b$ auf $\partial\Omega$ durch

$$-\nu\partial_n u + \frac{\kappa}{2}un_1 = b \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Hierzu formulieren wir zunächst Greensche Formeln und definieren die Grundlösung der

skalaren Oseen-Gleichung durch

$$e_\kappa(x) := \frac{1}{4\pi\nu|x|} e^{-\kappa s/2\nu}, \quad x \neq 0.$$

Dabei ist die Funktion $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ mit $s(x) := |x| - x_1$ auf jedem Strahl mit Start im Ursprung, der nicht mit der positiven x_1 -Achse zusammenfällt, proportional zu $|x|$, während s in dem Paraboloiden

$$\mathcal{P}_b := \{x = (x_1, x^*) \in \mathbb{R}^3, x_1 \geq 0, |x^*|^2 \leq bx_1\}, \quad b > 0$$

beschränkt ist (vgl. Abbildung 1 für $b = 1$). Nun leiten wir mit Hilfe der Greenschen Formeln und der Grundlösung eine Darstellungsformel her, die eine in Ω hinreichend glatte Funktion repräsentiert als Summe eines Einfachschichtpotentials, eines Doppelschichtpotentials und eines Volumenpotentials für den skalaren Oseen-Operator. Als Nächstes befassen wir uns mit den Flächenpotentialen stetiger Belegungen und listen deren Eigenschaften auf. Schließlich zeigen wir die Eindeutigkeit der Lösungen der zu untersuchenden RWA'n (Randwertaufgaben) und beweisen deren Existenz mit Hilfe einer RIGL-Methode (Randintegralgleichungsmethode). Durch eine spezielle Wahl der Potentialansätze gelingt uns der Nachweis, dass alle acht RIGL'en (Randintegralgleichungen) eindeutige Lösungen besitzen und folglich die hier verwendeten Potentiale die eindeutigen Lösungen der RWA'n darstellen. Wir gehen dabei analog zur klassischen Potentialtheorie für die Laplace-Gleichung vor, wie sie in zahlreichen Büchern, z.B. in [Gün57], [Wal71], behandelt wird. Im Fall der skalaren Oseen-Gleichung erweist es sich allerdings als aufwendiger die Einfachschicht- und Doppelschichtpotentiale explizit auszurechnen, da die Grundlösung durch die Funktion s ihre Homogenität verloren hat und eine kompliziertere Gestalt besitzt. Außerdem ist der skalare Oseen-Operator im Gegensatz zum Laplace-Operator kein selbstadjungierter Operator mehr, so dass auch der adjungierte Oseen-Operator mit vier weiteren RWA'n zu untersuchen ist.

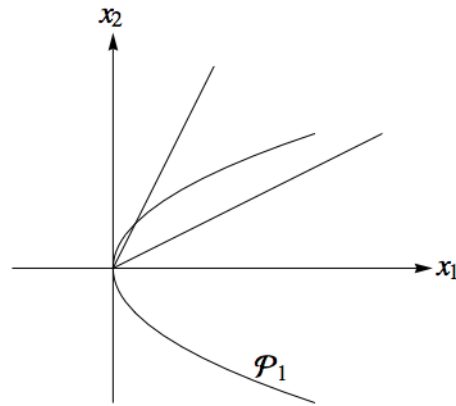


Abbildung 1: Paraboloid \mathcal{P}_1 im \mathbb{R}^2 .

In Kapitel 3 stellen wir bekannte Ergebnisse der hydrodynamischen Potentialtheorie ($\kappa = 0$ in (0.2)) zusammen, die zur Untersuchung des Oseen-Systems benötigt werden. Hier können wir insbesondere auf Odqvist [Odq30], Ladyzhenskaya [Lad69], Deuring, von Wahl, Weidemaier [DvWW88], Deuring, von Wahl [DvW89] und Varnhorn [Var94], [Var04] zurückgreifen.

In den Kapiteln 4 bis 6 formulieren wir das innere Dirichlet-Problem (ID) und das äußere Dirichlet-Problem (AD) sowie das innere Neumann-Problem (IN) und das äußere Neumann-Problem (AN) für das Oseen-System und das adjungierte Oseen-System (mit analogen Abkürzungen (ID*), (AD*), (IN*), (AN*)). Dabei ersetzen wir hier, analog

zum skalaren Fall, die aus der hydrodynamischen Potentialtheorie bekannte Neumann-Bedingung

$$(-\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T + pI_3) \mathbf{n} = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega$$

durch

$$(-\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T + pI_3) \mathbf{n} + \frac{\kappa}{2} \mathbf{u} n_1 = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $\mathbf{n} := (n_1, n_2, n_3)^T$ stets die ins Äußere von Ω weisende Einheitsnormale und I_3 die 3×3 -Einheitsmatrix bezeichnen. Die RWA'n überführen wir mit Hilfe geeigneter Potentialansätze in eindeutig lösbare RIGL-Systeme (Randintegralgleichungssysteme) und konstruieren somit Lösungen der RWA'n. Dabei beschränken wir uns auf die Probleme (ID) und (AD) sowie (IN*) und (AN*). Die anderen vier RWA'n lassen sich analog behandeln. Im Einzelnen gehen wir dabei wie folgt vor:

In Kapitel 4 führen wir die Oseen-Operatoren \mathcal{O} und \mathcal{O}^* sowie die Oseen-Spannungstensoren T^κ und $T^{\kappa*}$ ein und entwickeln entsprechende Greensche Formeln. Im Anschluss stellen wir die Herleitung des im Jahre 1910 von Oseen gefundenen Fundamentaltensors mit der Methode der Fouriertransformation in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ vor und untersuchen dessen Eigenschaften. Für das Stokes-System ($\kappa = 0$ in (0.2)) findet man eine analoge Herleitung in [Lad69]. Darüber hinaus stellen wir den Oseen-Tensor als Summe des Stokes-Tensors und eines Resttensors dar, der für $|x| \rightarrow 0$ beschränkt bleibt. Damit besitzt der Oseen-Tensor die gleiche Singularität wie der Stokes-Tensor. Wir werden sehen, dass aufgrund dieser Tatsache die Regularitätseigenschaften der Oseen-Potentiale, die wir in Kapitel 5 betrachten, im Wesentlichen identisch sind mit den Eigenschaften der hydrodynamischen Potentiale (siehe Kapitel 3). Außerdem leiten wir in Kapitel 4 eine Darstellung für eine Lösung des Oseen-Systems als Summe eines Einfachschicht-, eines Doppelschicht- und eines Volumenpotentials her. In Kapitel 5 befassen wir uns mit den Oseen-Flächenpotentialen. Es zeigt sich, dass diese in die entsprechenden Stokes-Potentiale und stetige Restterme zerlegt werden können. Diese Zerlegung erleichtert die Untersuchung des Verhaltens der Potentiale beim Durchgang durch den Rand. Darüber hinaus formulieren wir das Abklingverhalten der Flächenpotentiale für $|x| \rightarrow \infty$ mit Hilfe nichthomogener Gewichtsfunktionen. Wir stellen fest, dass diese in alle Richtungen außer der positiven x_1 -Achse quadratisch abklingen, da s hier proportional zu r ist, und in dem Nachlaufgebiet \mathcal{P}_b ($b > 0$) jedoch nur wie r^{-1} , da s hier beschränkt ist. In Kapitel 6 präsentieren wir die zu untersuchenden RWA'n und überprüfen diese auf Eindeutigkeit der Lösungen. Aufgrund der Divergenzfreiheit liegt bei dem Problem (ID) für den Randwert \mathbf{b} die Bedingung

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0 \tag{0.3}$$

vor. Wir zeigen nun, wie sich die RWA'n mit Hilfe spezieller Potentialansätze auf Fredholmsche RIGL-Systeme reduzieren lassen, die wir im Anschluss daran untersuchen. Dabei betrachten wir als Erstes die RIGL-Systeme für die Probleme (ID) und (AN*), die sich als zueinander adjungiert erweisen. Wir stellen fest, dass Potentialansätze aus reinem Doppelschicht- bzw. reinem Einfachschichtpotential keine eindeutig

lösbaeren RIGL-Systeme liefern und hiermit der zweite Fall der Fredholmschen Alternative vorliegt. Darüber hinaus können wir hier beweisen, dass der Nullraum des zu (AN*) gehörenden RIGL-Systems von der Einheitsnormalen erzeugt wird, d.h., das zu (ID) gehörende RIGL-System ist genau dann lösbar, wenn seine rechte Seite \mathbf{b} der Bedingung (0.3) genügt. Wir erhalten also im Fall (ID) keine zusätzlichen Bedingungen an den Randwert \mathbf{b} . Bei dem zu (AN*) gehörenden RIGL-System entsteht jedoch eine „künstliche“ Kompatibilitätsbedingung an die rechte Seite. D.h., der hier gewählte Potentialansatz führt uns auf ein RIGL-System, das einerseits nicht eindeutig lösbar ist und andererseits nur für bestimmte rechte Seiten gelöst werden kann. Da wir aber bereits zeigen konnten, dass das Problem (AN*) eine eindeutige Lösung für beliebige Randwerte besitzt, falls diese existiert, modifizieren wir den Potentialansatz und erhalten ein eindeutig lösbares RIGL-System, dessen rechte Seite die vorliegende Kompatibilitätsbedingung automatisch erfüllt. Mit diesem neuen Potentialansatz gelingt es uns also, eine eindeutige Lösung von (AN*) für beliebige Randwerte zu konstruieren.

Bei dem anderen Paar von RWA'n, nämlich dem Problem (AD) und dem Problem (AN*), liegt bei den resultierenden RIGL-Systemen der erste Fall der Fredholmschen Alternative vor, so dass hier das reine Einfachschichtpotential bzw. das reine Doppelschichtpotential eine eindeutige Lösung von (IN*) bzw. (AD) darstellt.

In Kapitel 7 betrachten wir schließlich eine RWA für die Oseen-Gleichungen in einem beschränkten Gebiet mit Rissen, die durch vorgeschriebene Sprünge der Geschwindigkeit und der Normalspannungen modelliert wird (siehe [MV08] im Fall $\kappa = 0$). Konkret betrachten wir das Problem (IDR), gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_q^{\mathbf{v}} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{f} && \text{auf } \partial\Omega \setminus S, \\ \mathbf{v}^i - \mathbf{v}^a &= \mathbf{g} && \text{auf } S, \\ \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n}\right)^i - \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n}\right)^a &= \mathbf{h} && \text{auf } S \cap G. \end{aligned}$$

Dabei ist $\Omega := G \setminus S$ und G ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial G \in C^2$. Der Riss S ist eine nichtleere kompakte Teilmenge der Oberfläche eines beschränkten C^2 -Gebietes $V \subset \mathbb{R}^3$ und darf bis zum Rand von G reichen. Wir schließen allerdings aus, dass der Riss auf dem Rand verläuft, d.h., wir fordern $\overline{G} \cap S = S$ (vgl. Abbildung 2). Mit den Indizes i und a bezeichnen wir die beiden einseitigen Grenzwerte auf dem Riss. Die Dirichlet-Bedingung wird auf dem Rand von G vorgegeben. Den Sprung \mathbf{g} der Geschwindigkeit sowie den Sprung \mathbf{h} der Normalkomponenten des Oseen-Spannungstensors schreiben wir auf dem Riss S vor. Analog zum Problem (ID) ergibt sich auch hier eine notwendigen Bedingung für die

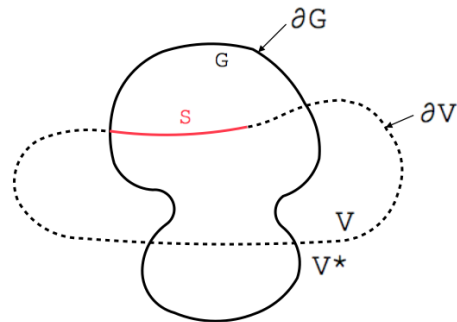


Abbildung 2: Gebiet G mit Riss S .

Lösbarkeit von (IDR), nämlich

$$\int_{\partial\Omega \setminus S} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, do + \int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, do = 0. \quad (0.4)$$

Wir zeigen zunächst, dass eine Lösung (\mathbf{v}, q) von (IDR) mit $\mathbf{g} = \mathbf{h} = \mathbf{0}$ zu einer Lösung des Oseen-Systems in G fortgesetzt werden kann. Wir führen dann das Problem (IDR) auf das Problem (ID) zurück, indem wir eine Lösung von (IDR) als Summe eines über ∂V definierten Einfachschichtpotentials mit Belegung \mathbf{h} , eines über ∂V definierten Doppelschichtpotentials mit Belegung \mathbf{g} sowie einer Lösung des Problems (ID) in G zum Randwert \mathbf{b} auf ∂G konstruieren. Hierfür verwenden wir die in den obigen Kapiteln erarbeiteten Eigenschaften der Potentiale für das Oseen-System.

1 Grundlagen

1.1 Bezeichnungen

Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) bezeichnen wir mit

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{bzw.} \quad |x| = \sqrt{x \cdot x}$$

das Skalarprodukt von x und y bzw. den Betrag von x .

Für eine $m \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ ist $A^T := (a_{ij})_{j=1, \dots, n; i=1, \dots, m}$ die zugehörige transponierte Matrix. Mit

$$|A| := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

definieren wir den Betrag der Matrix A und mit

$$B : C := \sum_{i,j=1}^n b_{ij} c_{ij}$$

die skalare Multiplikation zweier $n \times n$ -Matrizen $B = (b_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$, $C = (c_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$. Für eine $m \times n$ -Matrix A bezeichnen wir mit A^Z bzw. mit A^S die durch das Streichen der letzten Zeile entstandene $(m-1) \times n$ -Matrix bzw. die durch das Streichen der letzten Spalte entstandene $m \times (n-1)$ -Matrix.

Für eine differenzierbare skalare Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den Gradienten von u durch den Spaltenvektor

$$\nabla u := (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)^T,$$

wobei $\partial_k u$ mit $k \in \{1, \dots, n\}$ die partielle Ableitung von u nach der k -ten Variablen bezeichnet, sowie den Laplace-Operator Δ durch

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n \partial_i \partial_i u.$$

Für eine differenzierbare Vektorfunktion $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bezeichnet $\partial_k v_i$ mit $i \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$ die partielle Ableitung der i -ten Komponente v_i nach der k -ten Variablen. Den Gradienten $\nabla \mathbf{v}$ der Vektorfunktion \mathbf{v} setzen wir durch die $m \times n$ -Matrix

$$\nabla \mathbf{v} = (\partial_k v_i)_{i=1, \dots, m; k=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} (\nabla v_1)^T \\ \vdots \\ (\nabla v_m)^T \end{pmatrix}$$

fest. Die Divergenz von \mathbf{v} definieren wir im Fall $m = n$ durch

$$\nabla \cdot \mathbf{v} := \sum_{i=1}^n \partial_i v_i$$

sowie den Laplace-Operator Δ angewandt auf \mathbf{v} durch

$$\Delta \mathbf{v} := (\Delta v_1, \dots, \Delta v_m)^T.$$

Im Fall $m = n = 3$ definieren wir die Rotation von \mathbf{v} durch

$$\nabla \times \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Ist $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,m}$ eine in $x \in \mathbb{R}^n$ definierte Matrixfunktion mit differenzierbaren Komponenten a_{ij} , so bezeichnet $\partial_k a_{ij}$ mit $k \in \{1, \dots, n\}$ die partielle Ableitung der Komponente a_{ij} nach der k -ten Variablen. Wir schreiben

$$\nabla A = ((\partial_k a_{ij})_{i=1,\dots,m, k=1,\dots,n})_{j=1,\dots,m}$$

für den $m \times m \times n$ -Tensor der ersten Ableitungen der Matrix A . Wir wenden also den Gradienten auf jede Spalte der Matrix A an und erhalten somit einen $m \times m \times n$ -Tensor. Die Divergenz von A berechnen wir im Falle $m = n$ ebenso spaltenweise, d.h., wir erhalten den Zeilenvektor

$$\nabla \cdot A := \left(\sum_{i=1}^n \partial_i a_{ij} \right)_{j=1,\dots,n}.$$

Den Laplace-Operator angewandt auf eine Matrix definieren wir schließlich komponentenweise, d.h., es gilt

$$\Delta A = (\Delta a_{ij})_{i,j=1,\dots,m}.$$

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, d.h. eine nichtleere offene zusammenhängende Menge, $\partial\Omega$ der Rand von Ω und $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$ der Abschluss von Ω .

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Mit $C^k(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum der in Ω definierten und k -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Im Fall von Vektorfunktionen $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) schreiben wir $C^k(\Omega)^n$. Den Raum der stetigen Funktionen nennen wir $C(\Omega)$ bzw. $C(\Omega)^n$ anstatt $C^0(\Omega)$ bzw. $C^0(\Omega)^n$.

Sei $x \in \mathbb{R}^3$, $x' \in \mathbb{R}^2$ und $\varepsilon > 0$. Mit

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^3, |x - y| < \varepsilon\} \quad \text{bzw.} \quad K'_\varepsilon(x') := \{y \in \mathbb{R}^2, |x' - y| < \varepsilon\}$$

bezeichnen wir die offene Kugel mit Radius ε um x im \mathbb{R}^3 bzw. um x' im \mathbb{R}^2 . Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit $\partial\Omega \neq \emptyset$. Für $x_0 \in \partial\Omega$ führen wir durch Verschiebung und Drehung des ursprünglichen Koordinatensystems ein so genanntes lokales Koordinatensystem mit

Ursprung in x_0 ein. Die neuen Koordinaten von $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir mit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) =: (\xi^*, \xi_3)$ und nennen diese lokale Koordinaten von x . Sei $m \in \mathbb{N}$. Ein Gebiet Ω heißt C^m -Gebiet, oder wir sagen auch Ω ist ein Gebiet mit Rand der Klasse C^m , geschrieben $\partial\Omega \in C^m$, falls für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ Konstanten $\varepsilon > 0$, $\beta > 0$ und eine Funktion $g \in C^m(\overline{K'_\varepsilon(0)})$ existieren, so dass

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon,\beta,g}(x_0) \cap \partial\Omega &= \{(\xi^*, \xi_3), \quad \xi_3 = g(\xi^*), |\xi^*| < \varepsilon\}, \\ U_{\varepsilon,\beta,g}(x_0) \cap \Omega &= \{(\xi^*, \xi_3), \quad g(\xi^*) - \beta < \xi_3 < g(\xi^*), |\xi^*| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

gilt. Dabei bezeichnet $U_{\varepsilon,\beta,g}(x_0)$ die offene Menge

$$U_{\varepsilon,\beta,g}(x_0) = \{(\xi^*, \xi_3) \in \mathbb{R}^3, \quad |g(\xi^*) - \xi_3| < \beta, |\xi^*| < \varepsilon\}.$$

In dieser Arbeit betrachten wir beschränkte und unbeschränkte C^2 -Gebiete mit kompaktem Rand, so dass die Konstanten ε , β unabhängig von $x_0 \in \partial\Omega$ gewählt werden können. In diesem Fall existiert eine Konstante $\gamma = \gamma(\Omega)$ mit

$$\|g\|_{C^2(\overline{K'_\varepsilon(0)})} \leq \gamma$$

für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ (vgl. [Soh01]).

Ist Ω ein beschränktes C^1 -Gebiet und $y \in \partial\Omega$, so existiert genau ein äußerer Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(y)$ in y . Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes C^2 -Gebiet, so existiert für $x, y \in \partial\Omega$ eine Konstante $C > 0$ mit

$$|(x - y) \cdot \mathbf{n}(y)| \leq C |x - y|^2. \quad (1.1)$$

Einen Beweis dieser hilfreichen Ungleichung findet man z.B. in [Sko10].

Satz 1.1 (Gaußscher Integralsatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes C^1 -Gebiet. Sei $\mathbf{n} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ der äußere Einheitsnormalenvektor. Sei $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ integrierbar in Ω und $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ definiert auf $\partial\Omega$. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) \, dy = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(y) \cdot \mathbf{n}(y) \, do. \quad (1.2)$$

Beweis: Vgl. [DL00] Proposition 4, S. 229. □

Satz 1.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes C^1 -Gebiet. Sei*

$$k : (\mathbb{R}^3 \times \partial\Omega) \setminus \{(y, y), y \in \partial\Omega\} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und seien $C > 0$ und $\alpha \in [0, 2)$ mit

$$|k(x, y)| \leq C |x - y|^{-\alpha} \quad \text{für } |x - y| \rightarrow 0. \quad (1.3)$$

Dann ist die Funktion

$$K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad K(x) = \int_{\partial\Omega} k(x, y) \, do_y$$

stetig.

Beweis: Siehe [Hac97], s. 290. □

In dieser Arbeit betrachten wir ein beschränktes C^2 -Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit zusammenhängendem Rand, so dass $\Omega^* := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ ein Außengebiet ist, d.h. ein Gebiet, dessen Komplement kompakt ist. Mit \mathbf{n} bezeichnen wir stets den ins Äußere von Ω weisenden Einheitsnormalenvektor. Ist $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $u : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so bezeichnen wir mit u^i bzw. u^a den Grenzwert von Innen bzw. von Außen, d.h., für $x \in \partial\Omega$ gilt

$$u^i(x) = \lim_{\Omega \ni z \rightarrow x \in \partial\Omega} u(z) \quad \text{bzw.} \quad u^a(x) = \lim_{\Omega^* \ni z \rightarrow x \in \partial\Omega} u(z). \quad (1.4)$$

Mit o, O bezeichnen wir die Landau-Symbole: Für eine Funktion f schreiben wir

$$f(x) = O(|x|^{-\alpha}) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty$$

bzw.

$$f(x) = O(|x|^{-\alpha}) \quad \text{für } |x| \rightarrow 0,$$

falls eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|f(x)| |x|^\alpha \leq C$ für $|x| \rightarrow \infty$ bzw. $|x| \rightarrow 0$ gilt. Wir schreiben

$$f(x) = o(|x|^{-\alpha}) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty$$

bzw.

$$f(x) = o(|x|^{-\alpha}) \quad \text{für } |x| \rightarrow 0,$$

falls $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| |x|^\alpha = 0$ bzw. $\lim_{|x| \rightarrow 0} |f(x)| |x|^\alpha = 0$ gilt.

1.2 Funktionalanalysis

In diesem Kapitel wollen wir die Grundlagen zu den so genannten Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art zusammenstellen. Seien X, Y \mathbb{R} -Vektorräume. Wir bezeichnen die Menge aller beschränkten linearen Operatoren von X nach Y mit $\mathcal{L}(X, Y)$, den Wertebereich eines Operators $T : X \rightarrow Y$ mit $\mathcal{R}(T) := \{Tx, x \in X\}$ und den Nullraum von T mit $\mathcal{N}(T) := \{x \in X, Tx = 0\}$.

Satz 1.3 (Banach) *Seien X, Y Banach-Räume. Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv, so folgt $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Beweis: Einen Beweis findet man in [AV05]. □

Definition 1.4 *Seien X, Y \mathbb{R} -Vektorräume.*

(i) *Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Bilinearform, wenn für $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, x_1, x_2 \in X$ und $y, y_1, y_2 \in Y$ gilt*

- $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
- $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$

$$\bullet \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle.$$

(ii) Eine Bilinearform heißt nicht entartet, wenn sowohl zu jedem $x \in X \setminus \{0\}$ ein $y \in Y$ mit $\langle x, y \rangle \neq 0$ existiert, als auch zu jedem $y \in Y \setminus \{0\}$ ein $x \in X$ mit $\langle x, y \rangle \neq 0$ existiert.

(iii) Ein Tripel $(X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt Dualsystem, wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine nicht entartete Bilinearform auf $X \times Y$ ist.

Definition 1.5 Seien $(X_1, Y_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ und $(X_2, Y_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ zwei Dualsysteme. Zwei Operatoren $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ und $S \in \mathcal{L}(Y_2, Y_1)$ heißen duale oder zueinander adjungierte Operatoren, wenn für alle $x \in X_1, y \in Y_2$ gilt

$$\langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, Sy \rangle_1.$$

In diesem Fall bezeichnen wir den zu T adjungierten Operator S mit T^* .

Satz 1.6 (Satz von Schauder) Seien X und Y Banach-Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist T genau dann kompakt, wenn T^* kompakt ist.

Beweis: Vgl. [Alt06], Satz 10.6, S. 387. □

Satz 1.7 Für $T : X \rightarrow Y$ gilt

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T^*)_{\perp}.$$

Dabei bezeichnet

$$\mathcal{N}(T^*)_{\perp} := \{y \in Y, \langle y, y^* \rangle = 0 \forall y^* \in \mathcal{N}(T^*)\}$$

den Annihilator von $\mathcal{N}(T^*)$ in X .

Beweis: Vgl. [Wer00], Satz III.4.5, S. 112. □

Satz 1.8 (Satz von Riesz-Schauder) Sei X ein normierter Raum. Sei $T \in \mathcal{L}(X, X)$ ein kompakter Operator und $I : X \rightarrow X$ der identische Operator auf X . Sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt

$$(i) \mathcal{N}(\lambda I - T) < \infty,$$

$$(ii) \mathcal{R}(\lambda I - T) \subset X \text{ abgeschlossen,}$$

$$(iii) \dim \mathcal{N}(\lambda I - T) = \text{codim } \mathcal{R}(\lambda I - T)$$

Dabei ist die Kodimension $\text{codim } \mathcal{R}(\lambda I - T)$ des Bildes von $\lambda I - T$ als die Dimension des Quotientenraumes $X/(\mathcal{R}(\lambda I - T))$ definiert, d.h.,

$$\text{codim } \mathcal{R}(\lambda I - T) := \dim X/(\mathcal{R}(\lambda I - T)).$$

Beweis: Einen Beweis dieses Satzes findet man z.B. in ([Wer00]) oder ([Alt06]). \square

Der Satz von Riesz-Schauder besagt also, dass ein Operator der Form $\lambda I - T$ ($\lambda \neq 0$) mit einem kompakten Operator T genau dann injektiv ($\dim \mathcal{N}(\lambda I - T) = 0$) ist, wenn er surjektiv ($\text{codim } \mathcal{R}(\lambda I - T) = 0$) ist. Dies bedeutet, dass die folgende so genannte Fredholmsche Alternative auf T anwendbar ist.

Satz 1.9 (Fredholmsche Alternative) *Seien X, Y Banach-Räume, $(X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Dualsystem. Sei $T \in \mathcal{L}(X, X)$ ein kompakter Operator und $T^* \in \mathcal{L}(Y, Y)$ der zu T adjungierte Operator. Sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen:*

Fall 1: Die homogenen Gleichungen

$$\lambda\varphi - T\varphi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lambda\psi - T^*\psi = 0 \quad (1.5)$$

besitzen nur die triviale Lösung. In diesem Fall besitzen die inhomogenen Gleichungen

$$\lambda\varphi - T\varphi = b \quad \text{bzw.} \quad \lambda\psi - T^*\psi = b^* \quad (1.6)$$

für jedes $b \in X$ bzw. jedes $b^ \in Y$ genau eine Lösung $\varphi \in X$ bzw. $\psi \in Y$.*

Fall 2: Es existieren $n = \dim \mathcal{N}(\lambda I - T) = \dim \mathcal{N}(\lambda I - T^)$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichungen (1.5). In diesem Fall sind die inhomogenen Gleichungen (1.6) genau dann lösbar, wenn*

$$\langle b, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{N}(\lambda I - T^*),$$

bzw.

$$\langle b^*, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{N}(\lambda I - T)$$

gilt.

Beweis: Dies folgt aus Satz 1.8 von Riesz-Schauder und Satz 1.7. \square

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes C^1 -Gebiet. Eine Gleichung der Form

$$\lambda\varphi(x) - \int_{\partial\Omega} k(x, y)\varphi(y) dy = b(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (1.7)$$

heißt Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art. Dabei sind die Konstante $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sowie die Funktionen $b : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $k : \partial\Omega \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, während $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion ist. Die Funktion k nennen wir Kernfunktion. Diese erzeugt einen Integraloperator der Form

$$K\varphi(x) := \int_{\partial\Omega} k(x, y)\varphi(y) dy. \quad (1.8)$$

Dabei setzen wir $\varphi \in C(\partial\Omega)$ voraus. Der Funktionen-Raum $C(\partial\Omega)$ ist ein Banach-Raum bzgl. der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Das Tripel $(C(\partial\Omega), C(\partial\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein Dualsystem mit der nicht entarteten Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definiert durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{\partial\Omega} f(x)g(x) dx, \quad f, g \in C(\partial\Omega).$$

Die Fredholmsche Alternative (Satz 1.9) ist somit auf (1.7) anwendbar, wenn wir zeigen können, dass der Integraloperator K ein kompakter Operator ist, der $C(\partial\Omega)$ in sich abbildet. Nun stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen an die Funktion k der Integraloperator K kompakt ist. Dieses Problem wurde z.B. in [Kre89] ausführlich behandelt. Hier sind die wichtigsten Resultate:

Definition 1.10 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes C^1 -Gebiet. Eine stetige Funktion

$$k : (\partial\Omega \times \partial\Omega) \setminus \{(y, y), y \in \partial\Omega\} \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt schwach singulär, falls Konstanten $C > 0$, $\alpha \in [0, 2)$ existieren, so dass die Ungleichung

$$|k(x, y)| \leq C |x - y|^{-\alpha} \quad \text{für } |x - y| \rightarrow 0$$

gilt.

Satz 1.11 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes C^1 -Gebiet. Dann ist der Integraloperator $K : C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)$ definiert durch

$$K\varphi(x) := \int_{\partial\Omega} k(x, y)\varphi(y) do_y \tag{1.9}$$

mit einem stetigen oder einem schwach singulären Kern k ein kompakter Operator.

Beweis: Einen Beweis findet man z.B. in [Kre89]. □

2 Skalare Oseen-Gleichung im \mathbb{R}^3

2.1 Zur Potentialtheorie der skalaren Oseen-Gleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes C^2 -Gebiet mit zusammenhängendem Rand $\partial\Omega$, so dass $\Omega^* := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ ein Außengebiet ist. Das Ziel dieses Kapitels ist es, die homogene skalare Oseen-Gleichung

$$-\nu\Delta u + \kappa\partial_1 u = 0 \quad (2.1)$$

in Ω (in diesem Fall sprechen wir von einem inneren Problem) und in Ω^* (in diesem Fall sprechen wir von einem äußeren Problem) unter gegebenen Randbedingungen zu lösen. In (2.1) ist u eine gesuchte skalare Funktion und ν, κ gegebene positive Konstanten. Wir betrachten das Dirichlet-Problem für die skalare Oseen-Gleichung (2.1), bei dem die gesuchte Funktion u auf dem Rand vorgeschrieben ist, d.h.,

$$u = b \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (2.2)$$

sowie das Neumann-Problem, bei dem die klassische Neumann-Randbedingung $\partial_{\mathbf{n}}u = b$ auf $\partial\Omega$ durch die so genannte Oseen-Neumann-Randbedingung

$$-\nu\partial_{\mathbf{n}}u + \frac{\kappa}{2}un_1 = b \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.3)$$

ersetzt wird. Dabei bezeichnet $\partial_{\mathbf{n}}u$ die Richtungsableitung von u in Richtung der ins Äußere von Ω weisenden Einheitsnormalen $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Die Funktion $b \in C(\partial\Omega)$ ist der vorgegebene Randwert. Beim Dirichlet-Problem verlangen wir $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und beim Neumann-Problem $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so dass außerdem $\partial_{\mathbf{n}}u(x)$ für jedes $x \in \partial\Omega$ existiert und $\partial_{\mathbf{n}}u(x - h\mathbf{n}(x))$ gleichmäßig für alle $x \in \partial\Omega$ für $h \rightarrow 0_+$ gegen $\partial_{\mathbf{n}}u(x)$ konvergiert (siehe [Vla88]).

Setzen wir $\kappa = 0$ in (2.1) und (2.3), so erhalten wir die klassischen Randwertprobleme für die Laplace-Gleichung $-\Delta u = 0$, die mit Hilfe der Potentialtheorie und der RIGL-Methode gelöst werden können (siehe [Gün57], [Mar68], [Wal71]).

Wir definieren nun die Oseen-Operatoren

$$\mathcal{O} := -\nu\Delta + \kappa\partial_1, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{O}^* := -\nu\Delta - \kappa\partial_1, \quad (2.5)$$

die bzgl. der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definiert durch $\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} uv \, dy$, zueinander adjungiert sind. Darüber hinaus benötigen wir die Differentialoperatoren

$$\nabla^{\kappa} : u \mapsto \nabla^{\kappa}u := -\nu\nabla u + \frac{\kappa}{2} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\nabla^{\kappa*} : u \mapsto \nabla^{\kappa*} u := -\nu \nabla u - \frac{\kappa}{2} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Diese nennen wir Oseen-Gradienten.

Wir fassen die zu betrachteten RWA'n zusammen:

$$(id) \quad \mathcal{O}u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = b \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (2.8)$$

$$(ad) \quad \mathcal{O}u = 0 \quad \text{in } \Omega^*, \quad u = b \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (2.9)$$

$$(in) \quad \mathcal{O}u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \nabla^{\kappa} u \cdot \mathbf{n} = b \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (2.10)$$

$$(an) \quad \mathcal{O}u = 0 \quad \text{in } \Omega^*, \quad \nabla^{\kappa} u \cdot \mathbf{n} = b \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.11)$$

sowie

$$(id^*) \quad \mathcal{O}^* u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = b \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (2.12)$$

$$(ad^*) \quad \mathcal{O}^* u = 0 \quad \text{in } \Omega^*, \quad u = b \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (2.13)$$

$$(in^*) \quad \mathcal{O}^* u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \nabla^{\kappa*} u \cdot \mathbf{n} = b \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (2.14)$$

$$(an^*) \quad \mathcal{O}^* u = 0 \quad \text{in } \Omega^*, \quad \nabla^{\kappa*} u \cdot \mathbf{n} = b \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (2.15)$$

Wie in der klassischen Potentialtheorie formulieren wir als Erstes die zugehörigen Greenschen Formeln. Es seien dazu $u, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend glatte Funktionen in einem beschränkten C^1 -Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand $\partial\Omega$. Dann gelten die ersten beiden Greenschen Formeln

$$\int_{\Omega} u \mathcal{O}v \, dy = \int_{\partial\Omega} u \nabla^{\kappa} v \cdot \mathbf{n} \, do + \int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v \, dy + \int_{\Omega} \kappa u \partial_1 v \, dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\kappa}{2} u v n_1 \, do, \quad (2.16)$$

$$\int_{\Omega} v \mathcal{O}^* u \, dy = \int_{\partial\Omega} v \nabla^{\kappa*} u \cdot \mathbf{n} \, do + \int_{\Omega} \nu \nabla v \cdot \nabla u \, dy - \int_{\Omega} \kappa v \partial_1 u \, dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\kappa}{2} u v n_1 \, do, \quad (2.17)$$

und die zweite Greensche Formel

$$\int_{\Omega} (u \mathcal{O}v - v \mathcal{O}^* u) \, dy = \int_{\partial\Omega} (u \nabla^{\kappa} v \cdot \mathbf{n} - v \nabla^{\kappa*} u \cdot \mathbf{n}) \, do. \quad (2.18)$$

Diese Formeln können mit Hilfe des Satzes von Gauß und der Greenschen Formeln für den Laplace-Operator bewiesen werden (siehe [Sko10]).

Die Fundamentallösungen e_{κ}, e_{κ}^* der skalaren Oseen-Operatoren $\mathcal{O}, \mathcal{O}^*$ im \mathbb{R}^3 sind definiert für $x \neq 0$ durch

$$e_{\kappa}(x) := \frac{1}{4\pi\nu r} \exp\left(-\frac{\kappa s}{2\nu}\right), \quad (2.19)$$

$$e_{\kappa}^*(x) := \frac{1}{4\pi\nu r} \exp\left(-\frac{\kappa p}{2\nu}\right), \quad (2.20)$$

mit $r = r(x) := |x|$, $s = s(x) := r - x_1$ und $p = p(x) := r + x_1$ (siehe [AB08a], [Gal11]).

Wir schauen uns die Funktion s genauer an. Mit Hilfe von Kugelkoordinaten lässt sich zeigen (siehe [Sko10]), dass für $x = (x_1, x^*) \in \mathbb{R}^3$ die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{|x^*|^2}{|x|} &\leq s(x) \leq \frac{|x^*|^2}{|x|} && \text{für } x_1 \geq 0, \\ |x| &\leq s(x) \leq 2|x| && \text{für } x_1 \leq 0. \end{aligned}$$

Ist $x = ta \in \mathbb{R}^3$ mit $t \geq 0$ und $0 \neq a \in \mathbb{R}^3$ ein Strahl, der im Nullpunkt startet, so gilt mit $r(x) = t|a|$ die Beziehung

$$s(x) = t(|a| - a_1) = \frac{|a| - a_1}{|a|} r,$$

d.h., s ist auf jedem Strahl, der nicht mit der positiven x_1 -Achse zusammenfällt, pro-

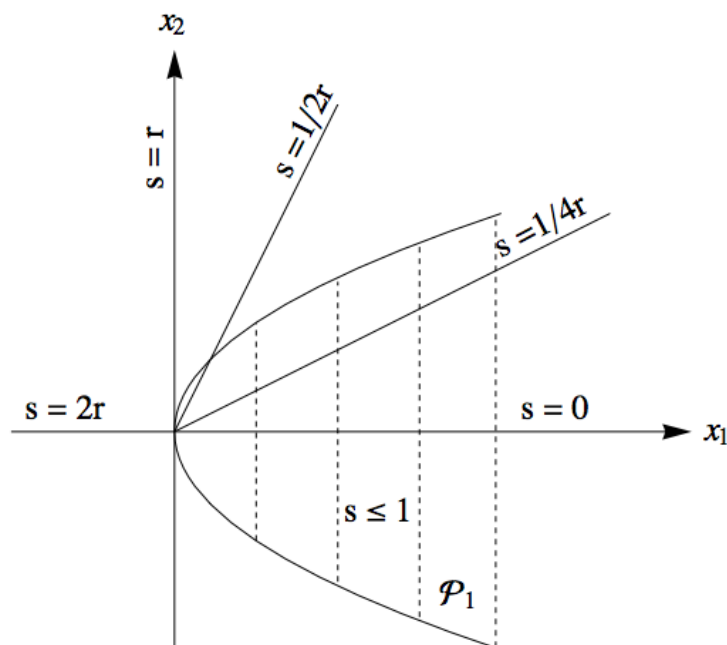


Abbildung 3:

portional zu r . Sei nun $x = (x_1, x^*) \in \mathbb{R}^3$ mit $x_1 \geq 0$ und $|x^*|^2 \leq bx_1$ mit $b > 0$, so erhalten wir aus den obigen Ungleichungen

$$s(x) \leq \frac{|x^*|^2}{|x|} \leq \frac{bx_1}{|x|} \leq b,$$

d.h., s ist in dem Paraboloiden

$$\mathcal{P}_b := \{x = (x_1, x^*) \in \mathbb{R}^3, x_1 \geq 0, |x^*|^2 \leq bx_1\}, \quad b > 0$$

beschränkt. In Abbildung 3 werden einige Strahlen im \mathbb{R}^2 dargestellt und das Verhalten der Funktion s auf diesen Strahlen angegeben (vgl. [Far92]). Darüber hinaus ist in dieser Abbildung der Paraboloid

$$\mathcal{P}_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \geq 0, x_2^2 \leq x_1\}$$

im \mathbb{R}^2 zu sehen, in dem die Funktion s durch 1 beschränkt ist. Die Abbildungen 4 und 5 zeigen die Funktion s als Funktion im \mathbb{R}^2 aus verschiedenen Perspektiven.

Die obige Funktion p erhält man durch Spiegelung der Funktion s an der x_2x_3 -Ebene.

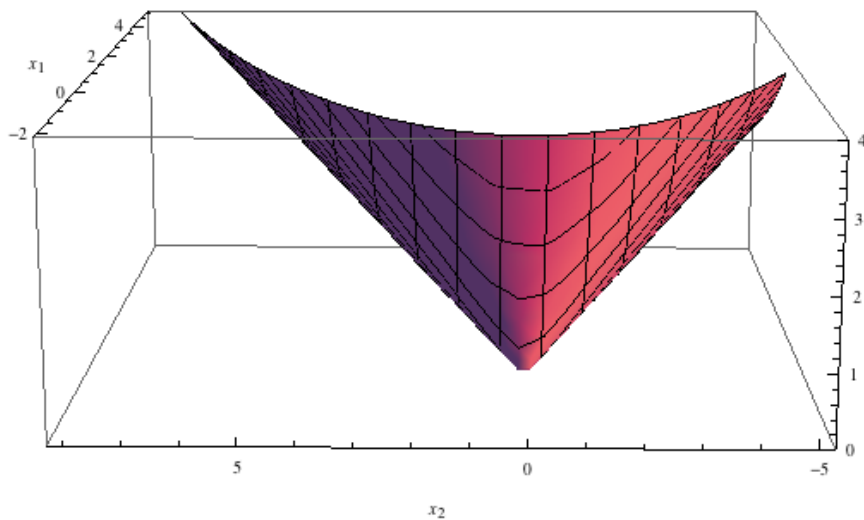


Abbildung 4: Funktion s im \mathbb{R}^2

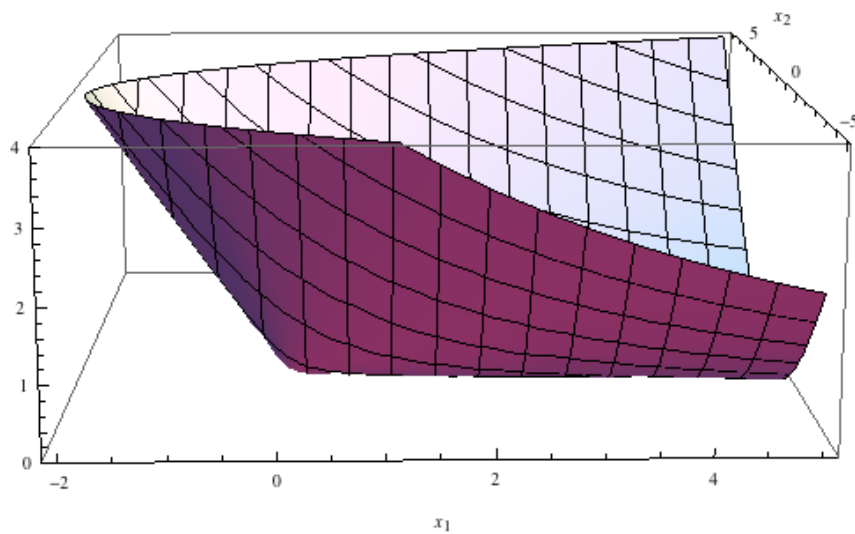


Abbildung 5: Funktion s im \mathbb{R}^2

Wir wollen im Folgenden Aussagen über das Abklingverhalten der Grundlösungen $e_\kappa(x)$, $e_\kappa^*(x)$ für $|x| \rightarrow \infty$ machen. Mit

$$\partial_1 s(x) = -\frac{s(x)}{|x|}, \quad \nabla s(x) = \frac{x}{|x|} - (1, 0, 0)$$

und

$$\partial_1 p(x) = \frac{p(x)}{|x|}, \quad \nabla p(x) = \frac{x}{|x|} + (1, 0, 0)$$

erhalten wir zunächst

$$|\nabla s(x)| = \sqrt{\frac{2s(x)}{|x|}}, \quad |\nabla p(x)| = \sqrt{\frac{2p(x)}{|x|}}.$$

Außerdem gilt

$$s(x) = p(-x)$$

und

$$e_\kappa(x) = e_\kappa^*(-x),$$

sowie

$$\mathcal{O}e_\kappa(x) = \mathcal{O}^*e_\kappa^*(x) = 0.$$

Wir benötigen die folgenden Gewichtsfunktionen, um das Abklingverhalten der Fundamentallösungen und deren Ableitungen zu beschreiben:

Definition 2.1 Sei $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $r = r(x) = |x|$ sowie $s = s(x) = r - x_1$ und $p = p(x) = r + x_1$. Die Funktionen η_b^a bzw. μ_b^a , definiert durch

$$\eta_b^a(x) := (1 + r)^a (1 + s)^b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

bzw.

$$\mu_b^a(x) := (1 + r)^a (1 + p)^b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

heißen Gewichtsfunktionen.

Damit gelten für $|x| \rightarrow \infty$ die folgenden Abklingbedingungen:

$$\begin{aligned} e_\kappa(x) &= O(\eta_{-1}^{-1}(x)), & \nabla e_\kappa(x) &= O(\eta_{-3/2}^{-3/2}(x)), & \partial^2 e_\kappa(x) &= O(\eta_{-2}^{-2}(x)), \\ e_\kappa^*(x) &= O(\mu_{-1}^{-1}(x)), & \nabla e_\kappa^*(x) &= O(\mu_{-3/2}^{-3/2}(x)), & \partial^2 e_\kappa^*(x) &= O(\mu_{-2}^{-2}(x)). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Einen Beweis dieser Aussage findet man in [Sko10].

Wir benötigen außerdem das folgende Lemma, auf das wir im Beweis des Satzes 6.2 zurückgreifen.

Lemma 2.2 *Es gilt*

$$\frac{1}{3}\pi R^{-1} \leq \int_{\partial K_R(0)} \eta_{-2}^{-2}(x) \, do \leq 2\pi R^{-1} \quad \text{für } R \rightarrow \infty \quad (2.22)$$

bzw.

$$\frac{1}{3}\pi R^{-1} \leq \int_{\partial K_R(0)} \mu_{-2}^{-2}(x) \, do \leq 2\pi R^{-1} \quad \text{für } R \rightarrow \infty. \quad (2.23)$$

Beweis: Wir zeigen, dass die Abschätzungen (2.22) gelten. Mit Kugelkoordinaten folgt zunächst

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_R(0)} \eta_{-2}^{-2}(x) \, do &= 2\pi \int_0^\pi (1+R)^{-2} (1+s(R,\theta))^{-2} R^2 \sin \theta \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi (1+R)^{-2} (1+R(1-\cos \theta))^{-2} R^2 \sin \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

Wir substituieren $t = R - R \cos \theta$, $dt/d\theta = R \sin \theta$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_R(0)} \eta_{-2}^{-2}(x) \, do &= 2\pi \int_0^{2R} (1+R)^{-2} (1+t)^{-2} R \, dt \\ &= 2\pi (1+R)^{-2} R \int_0^{2R} (1+t)^{-2} \, dt \\ &= 2\pi (1+R)^{-2} R \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^{2R} \\ &= 4\pi \frac{R^2}{(1+R)^2(1+2R)}. \end{aligned}$$

O.B.d.A. sei $R > 1$. Dann gilt

$$4\pi \frac{R^2}{(1+R)^2(1+2R)} \geq 4\pi \frac{R^2}{4R^2 \cdot 3R} = \frac{1}{3}\pi R^{-1}$$

sowie

$$4\pi \frac{R^2}{(1+R)^2(1+2R)} \leq 4\pi \frac{R^2}{R^2 \cdot 2R} = 2\pi R^{-1}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass

$$\frac{1}{3}\pi R^{-1} \leq \int_{\partial K_R(0)} \eta_{-2}^{-2}(x) \, do \leq 2\pi R^{-1}$$

für $R \rightarrow \infty$ gilt. Die Abschätzungen (2.23) werden analog bewiesen. \square

Mit Hilfe der zweiten Greenschen Formel (2.18) für den skalaren Oseen-Operator und der Fundamentallösung e_κ erhalten wir nun die folgende Darstellungsformel für eine hinreichend glatte Funktion v in einem beschränkten C^2 -Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$: In $x \in \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} v(x) = & - \int_{\partial\Omega} e_\kappa(x-y)(\nabla^\kappa v \cdot \mathbf{n})(y) \, do_y + \int_{\partial\Omega} v(y) \nabla_y^{\kappa*} e_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{n}(y) \, do_y \\ & + \int_{\Omega} e_\kappa(x-y) \mathcal{O}v(y) \, dy. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Genau wie in der klassischen Potentialtheorie stellen die drei Integrale auf der rechten Seite das Einfachschichtpotential, das Doppelschichtpotential und das Volumenpotential für den skalaren Oseen-Operator dar.

Im nächsten Satz beweisen wir Eindeutigkeitsaussagen für die oben definierten RWA'n der skalaren Oseen-Gleichung.

Satz 2.3 *Die RWA'n (id) (vgl. (2.8)), (id*) (vgl. (2.12)), (in) (vgl. (2.10)) und (in*) (vgl. (2.14)) besitzen höchstens eine Lösung. Die RWA'n (ad) (vgl. (2.9)) und (ad*) (vgl. (2.13)) besitzen höchstens eine Lösung, wenn die gesuchte Funktion u die Abklingbedingung*

$$u(x) = o(1) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty \quad (2.25)$$

erfüllt. Das Problem (an) (vgl. (2.11)) besitzt höchstens eine Lösung, wenn die gesuchte Funktion u die Abklingbedingungen

$$u(x) = O(\eta_{-1}^{-1}(x)), \quad \nabla u(x) = O(\eta_{-3/2}^{-3/2}(x)) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty \quad (2.26)$$

erfüllt. Das Problem (an) (vgl. (2.15)) besitzt höchstens eine Lösung, wenn die gesuchte Funktion u die Abklingbedingungen*

$$u(x) = O(\mu_{-1}^{-1}(x)), \quad \nabla u(x) = O(\mu_{-3/2}^{-3/2}(x)) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty \quad (2.27)$$

erfüllt (vgl. Definition 2.1).

Beweis: Ist u die Differenz zweier Lösungen von (id) oder (ad), wobei wir im Falle von (ad) die Gültigkeit der Abklingbedingungen (2.25) voraussetzen, so folgt die Eindeutigkeit mit Hilfe des Maximumprinzips für elliptische Differentialgleichungen 2. Ordnung (siehe [Eva98] Theorem 1, Theorem 3, S 327 ff). Für die adjungierte Oseen-Gleichung erfolgt der Beweis analog. Um die Eindeutigkeit der Lösungen für das Problem (in) zu beweisen, wenden wir die erste Greensche Formel (2.16) mit $u = v$ auf die Differenz u zweier Lösungen an und erhalten mit $u\partial_1 u = \frac{1}{2}\partial_1(u^2)$ aus dem Satz von Gauß

$$0 = \int_{\partial\Omega} u \underbrace{(\nabla^\kappa u \cdot \mathbf{n})}_{=0} \, do + \int_{\Omega} \nu |\nabla u|^2 \, dy + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\kappa}{2} \partial_1(u^2) \, dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\kappa}{2} u^2 n_1 \, do}_{=0}.$$

Es folgt $u = c$ in Ω , wobei die Konstante c wegen der Randbedingung

$$\nabla^\kappa u \cdot \mathbf{n} = \nabla u \cdot \mathbf{n} + \frac{\kappa}{2} u n_1 = 0$$

auf $\partial\Omega$ verschwindet. Dies impliziert die Eindeutigkeit für (in), im Gegensatz zur Laplace-Gleichung. Bei (an) wenden wir die erste Greensche Formel (2.16) mit $u = v$ auf die Differenz u zweier Lösungen in $\Omega_R^* := \Omega^* \cap K_R(0)$ an. Hier ist $K_R(0)$ die offene Kugel um den Ursprung mit Radius $R > 0$ so, dass $\bar{\Omega} \subset K_R(0)$ gilt. Wir erhalten dann

$$0 = \int_{\partial K_R(0)} u \nabla^\kappa u \cdot \mathbf{n} \, do + \int_{\Omega_R^*} \nu |\nabla u|^2 \, dy,$$

wobei das Flächenintegral für $R \rightarrow \infty$ verschwindet, wenn u den Abklingbedingungen (2.26) genügt (siehe [Sko10]). Die Eindeutigkeit für (in*) und (an*) wird analog bewiesen. Dabei benutzen wir die erste Greensche Formel (2.17) für den adjungierten Oseen-Operator. \square

Wie wir aus der Darstellungsformel (2.24) gesehen haben, können auch Lösungen v der skalaren Oseen-Gleichung als Summe dreier Potentiale dargestellt werden, nämlich eines Einfachschichtpotentials mit der Belegung $\nabla^\kappa v \cdot \mathbf{n}$, eines Doppelschichtpotentials mit der Belegung v und eines Volumenpotentials mit der Belegung $\mathcal{O}v$. Im Folgenden wollen wir daher die Eigenschaften solcher Potentiale mit allgemeinen stetigen Belegungen untersuchen. Die Einfachschichtpotentiale mit Belegungen $\varphi, \psi \in C(\partial\Omega)$ sind dabei definiert durch

$$e^\kappa \varphi(x) := \int_{\partial\Omega} e_\kappa(x-y) \varphi(y) \, do_y, \quad x \notin \partial\Omega, \quad (2.28)$$

$$e^{\kappa*} \psi(x) := \int_{\partial\Omega} e_\kappa^*(x-y) \psi(y) \, do_y, \quad x \notin \partial\Omega, \quad (2.29)$$

und die Doppelschichtpotentiale mit Belegungen $\varphi, \psi \in C(\partial\Omega)$ durch

$$d^\kappa \varphi(x) := \int_{\partial\Omega} \nabla_y^{\kappa*} e_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{n}(y) \varphi(y) \, do_y =: \int_{\partial\Omega} d^\kappa(x,y) \varphi(y) \, do_y, \quad x \notin \partial\Omega, \quad (2.30)$$

$$d^{\kappa*} \psi(x) := \int_{\partial\Omega} \nabla_y^\kappa e_\kappa^*(x-y) \cdot \mathbf{n}(y) \psi(y) \, do_y =: \int_{\partial\Omega} d^{\kappa*}(x,y) \psi(y) \, do_y, \quad x \notin \partial\Omega. \quad (2.31)$$

Die explizite Darstellung der Kerne $d^\kappa(x,y)$ und $d^{\kappa*}(x,y)$ mit $x \neq y$ haben wir im Anhang (siehe Kapitel 8.1) hergeleitet. Die Potentiale $e^\kappa \varphi, d^\kappa \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$ lösen die skalare Oseen-Gleichung, d.h., es gilt

$$\mathcal{O}e^\kappa \varphi(x) = \mathcal{O}d^\kappa \varphi(x) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega.$$

Analog lösen die Potentiale $e^{\kappa^*}\psi$, $d^{\kappa^*}\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$ die adjungierte skalare Oseen-Gleichung, d.h., es gilt

$$\mathcal{O}^* e^{\kappa^*}\psi(x) = \mathcal{O}^* d^{\kappa^*}\psi(x) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega.$$

Neben den obigen Potentialen benötigen wir die so genannten Oseen-Normalableitungen der Einfachschichtpotentiale $e^\kappa\varphi$ und $e^{\kappa^*}\psi$, die in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von $\partial\Omega$ durch

$$h^\kappa\varphi(x) := \nabla^\kappa e^\kappa\varphi(x) \cdot \mathbf{n}(x') =: \int_{\partial\Omega} h^\kappa(x, y)\varphi(y) \, do_y, \quad x \in U \setminus \partial\Omega, \quad (2.32)$$

$$h^{\kappa^*}\psi(x) := \nabla^{\kappa^*} e^{\kappa^*}\psi(x) \cdot \mathbf{n}(x') =: \int_{\partial\Omega} h^{\kappa^*}(x, y)\psi(y) \, do_y, \quad x \in U \setminus \partial\Omega \quad (2.33)$$

definiert sind. Dabei ist $x' \in \partial\Omega \in C^2$ die eindeutig bestimmte Projektion von $x \in U$ auf $\partial\Omega$. Die explizite Darstellung von h^κ , h^{κ^*} findet man ebenso im Anhang (siehe Kapitel 8.1).

Die Kerne d^κ , h^κ , d^{κ^*} und h^{κ^*} erfüllen auf $\partial\Omega$ die folgenden Identitäten:

Lemma 2.4 Für $x, y \in \partial\Omega$ mit $x \neq y$ gilt

$$h^\kappa(x, y) = d^{\kappa^*}(y, x), \quad h^{\kappa^*}(x, y) = d^\kappa(y, x). \quad (2.34)$$

Beweis: Für $x, y \in \partial\Omega$ mit $x \neq y$ errechnen wir mit Hilfe der expliziten Darstellung (siehe Kapitel 8.1) von h^κ und d^{κ^*} :

$$\begin{aligned} h^\kappa(x, y) &= \left(\frac{(x-y) \cdot \mathbf{n}(x)}{4\pi r^3} + \frac{\kappa(x-y) \cdot \mathbf{n}(x)}{8\pi\nu r^2} \right) \exp\left(-\frac{\kappa|x-y| - (x_1 - y_1)}{2\nu} \right) \\ &= - \left(\frac{(y-x) \cdot \mathbf{n}(x)}{4\pi r^3} + \frac{\kappa(y-x) \cdot \mathbf{n}(x)}{8\pi\nu r^2} \right) \exp\left(-\frac{\kappa|y-x| + (y_1 - x_1)}{2\nu} \right) \\ &= d^{\kappa^*}(y, x). \end{aligned}$$

Die zweite Identität folgt analog. □

Wir stellen nun die Fundamentallösung e_κ der Oseen-Gleichung als Summe der Fundamentallösung e der Laplace-Gleichung und eines Restterms \tilde{e}_κ dar. Damit lassen sich auch die Flächenpotentiale des Oseen-Operators mit Hilfe der entsprechenden Flächenpotentiale des Laplace-Operators darstellen, wobei sich die verbleibenden Restterme als stetige Funktionen erweisen. Dies bedeutet, dass alle Flächenpotentiale des Oseen-Operators die gleiche Singularität wie die entsprechenden Flächenpotentiale des Laplace-Operators besitzen.

Sei im Folgenden o.B.d.A. $\nu = 1$. Für $0 \neq x \in \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$e_\kappa(x) = \frac{1}{4\pi|x|} + \frac{1}{4\pi|x|} (e^{-\kappa s/2} - 1) =: e(x) + \tilde{e}_\kappa(x). \quad (2.35)$$

Die Funktion e ist dabei die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung. Für die Funktion \tilde{e}_κ gilt

$$|\tilde{e}_\kappa(x)| \leq \frac{1}{4\pi|x|} \frac{\kappa s}{2} \leq \frac{1}{4\pi|x|} \kappa|x| = \frac{\kappa}{4\pi} \quad (2.36)$$

für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^3$. Denn mit dem Mittelwertsatz existiert zu $s > 0$ ein $\xi \in (0, \frac{\kappa s}{2})$ mit

$$e^{-\kappa s/2} - 1 = \frac{\kappa s}{2} \left. \frac{d}{ds} e^{-\kappa s/2} \right|_{s=\xi} = -\frac{\kappa s}{2} e^{-\kappa \xi/2},$$

also

$$|e^{-\kappa s/2} - 1| \leq \frac{\kappa s}{2}$$

für alle $s > 0$. Nun setzen wir die Darstellung (2.35) in die oben definierten Potentiale ein und erhalten für $\varphi \in C(\partial\Omega)$ und $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$

$$e^\kappa \varphi(x) = e\varphi(x) + \tilde{e}^\kappa \varphi(x) \quad (2.37)$$

mit dem Einfachschichtpotential

$$e\varphi(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi|x-y|} \varphi(y) \, do_y$$

des Laplace-Operators, sowie dem Potential

$$\tilde{e}^\kappa \varphi(x) = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\frac{1}{4\pi|x-y|} (e^{-\kappa s(x-y)/2} - 1)}_{=:\tilde{e}_\kappa(x,y)} \varphi(y) \, do_y \quad (2.38)$$

mit beschränktem Kern \tilde{e}_κ wegen (2.36). Somit ist $\tilde{e}^\kappa \varphi$ stetig im \mathbb{R}^3 . Für das Doppelschichtpotential $d^\kappa \varphi$ erhalten wir für $\varphi \in C(\partial\Omega)$ und $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$

$$d^\kappa \varphi(x) = d\varphi(x) + \tilde{d}^\kappa \varphi(x) \quad (2.39)$$

mit dem Doppelschichtpotential

$$d\varphi(x) = \int_{\partial\Omega} -\frac{(x-y) \cdot \mathbf{n}(y)}{4\pi|x-y|^3} \varphi(y) \, do_y \quad (2.40)$$

des Laplace-Operators, sowie dem Potential

$$\tilde{d}^\kappa \varphi(x) = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\left(-\frac{\kappa(x-y) \cdot \mathbf{n}(y)}{8\pi|x-y|^2} e^{-\kappa s/2} - \frac{(x-y) \cdot \mathbf{n}(y)}{4\pi|x-y|^3} (e^{-\kappa s/2} - 1) \right)}_{=:\tilde{d}^\kappa(x,y)} \varphi(y) \, do_y. \quad (2.41)$$

Dabei erfüllt der Kern \tilde{d}^κ die Bedingung (1.3), denn es gilt

$$|\tilde{d}^\kappa(x, y)| \leq \frac{\kappa}{8\pi} \frac{1}{|x - y|} + \frac{\kappa}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} = \frac{3\kappa}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}$$

für alle $x \neq y$. D.h., $\tilde{d}^\kappa\varphi$ ist mit Satz 1.2 stetig im \mathbb{R}^3 . Für die Oseen-Normalableitung $h^\kappa\varphi$ des Einfachschichtpotentials erhalten wir für $\varphi \in C(\partial\Omega)$ und $x \in U \setminus \partial\Omega$

$$h^\kappa\varphi(x) = h\varphi(x) + \tilde{h}^\kappa\varphi(x) \quad (2.42)$$

mit der Normalableitung des Einfachschichtpotentials

$$h\varphi(x) = -\nabla e\varphi(x) \cdot \mathbf{n}(x') = \int_{\partial\Omega} \frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(x')}{4\pi|x - y|^3} \varphi(y) \, do_y \quad (2.43)$$

des Laplace-Operators, sowie dem Potential

$$\tilde{h}^\kappa\varphi(x) = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\left(\frac{\kappa(x - y) \cdot \mathbf{n}(y)}{8\pi|x - y|^2} e^{-\kappa s/2} + \frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(y)}{4\pi|x - y|^3} (e^{-\kappa s/2} - 1) \right)}_{=: \tilde{h}^\kappa(x, y)} \varphi(y) \, do_y. \quad (2.44)$$

Dabei erfüllt der Kern \tilde{h}^κ die Bedingung (1.3), denn es gilt wie oben

$$|\tilde{h}^\kappa(x, y)| \leq \frac{3\kappa}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}$$

für alle $x \neq y$. D.h., $\tilde{h}^\kappa\varphi$ ist mit Satz 1.2 stetig in U . Damit lässt sich der nächste Satz beweisen:

Satz 2.5 *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine Umgebung von $\partial\Omega$. Sei $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Für jedes $x \in \partial\Omega$ existieren die so genannten direkten Werte $e^\kappa\varphi(x)$, $d^\kappa\varphi(x)$, $h^\kappa\varphi(x)$ der durch (2.28), (2.30) und (2.32) definierten Funktionen.*
- (ii) $e^\kappa\varphi \in C(\mathbb{R}^3)$.
- (iii) $d^\kappa\varphi \in C(\overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ mit

$$(d^\kappa\varphi)^i - d^\kappa\varphi = \frac{1}{2}\varphi = d^\kappa\varphi - (d^\kappa\varphi)^a. \quad (2.45)$$

- (iv) $h^\kappa\varphi \in C(U \cap \overline{\Omega}) \cap C(U \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega))$ mit

$$(h^\kappa\varphi)^i - h^\kappa\varphi = -\frac{1}{2}\varphi = h^\kappa\varphi - (h^\kappa\varphi)^a. \quad (2.46)$$

Beweis: Alle Aussagen erhält man mit den Darstellungen (2.37), (2.39), (2.42) und mit Satz 1.2 sowie den entsprechenden Aussagen für die Laplace-Gleichung (siehe z.B. [Wal71]). \square

Analog erhalten wir für den adjungierten Oseen-Operator:

Satz 2.6 *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine Umgebung von $\partial\Omega$. Sei $\psi \in C(\partial\Omega)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Für jedes $x \in \partial\Omega$ existieren die so genannten direkten Werte $e^{\kappa^*}\psi(x)$, $d^{\kappa^*}\psi(x)$, $h^{\kappa^*}\psi(x)$ der durch (2.29), (2.31) und (2.33) definierten Funktionen.*

(ii) $e^{\kappa^*}\psi \in C(\mathbb{R}^3)$.

(iii) $d^{\kappa^*}\psi \in C(\bar{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ mit

$$(d^{\kappa^*}\psi)^i - d^{\kappa^*}\psi = \frac{1}{2}\psi = d^{\kappa^*}\psi - (d^{\kappa^*}\psi)^a. \quad (2.47)$$

(iv) $h^{\kappa^*}\psi \in C(U \cap \bar{\Omega}) \cap C(U \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega))$ mit

$$(h^{\kappa^*}\psi)^i - h^{\kappa^*}\psi = -\frac{1}{2}\psi = h^{\kappa^*}\psi - (h^{\kappa^*}\psi)^a. \quad (2.48)$$

Aus dem Abklingverhalten der Fundamentallösungen e_κ , e_κ^* lassen sich Aussagen über das Abklingverhalten der entsprechenden Potentiale angeben:

Lemma 2.7

(i) *Die Einfachschichtpotentiale $e^\kappa\varphi$ und $e^{\kappa^*}\psi$ erfüllen für $|x| \rightarrow \infty$ die folgenden Abklingbedingungen:*

$$e^\kappa\varphi(x) = O(\eta_{-1}^{-1}(x)), \quad \nabla e^\kappa\varphi(x) = O(\eta_{-3/2}^{-3/2}(x)), \quad (2.49)$$

$$e^{\kappa^*}\psi(x) = O(\mu_{-1}^{-1}(x)), \quad \nabla e^{\kappa^*}\psi(x) = O(\mu_{-3/2}^{-3/2}(x)). \quad (2.50)$$

(ii) *Die Doppelschichtpotentiale $d^\kappa\varphi$ und $d^{\kappa^*}\psi$ erfüllen für $|x| \rightarrow \infty$ die folgenden Abklingbedingungen:*

$$d^\kappa\varphi(x) = O(\eta_{-1}^{-1}(x)), \quad \nabla d^\kappa\varphi(x) = O(\eta_{-3/2}^{-3/2}(x)), \quad (2.51)$$

$$d^{\kappa^*}\psi(x) = O(\mu_{-1}^{-1}(x)), \quad \nabla d^{\kappa^*}\psi(x) = O(\mu_{-3/2}^{-3/2}(x)). \quad (2.52)$$

Beweis: Alle Aussagen erhält man wegen des kompakten Randes $\partial\Omega$ und (2.21). \square

2.2 Randintegralgleichungen

In diesem Kapitel wollen wir nun die RWA'n (2.8) - (2.15) mit Hilfe der RIGL-Methode lösen. Dazu wählen wir als Ansatz für die Lösungen Doppel- bzw. Einfachschichtpotentiale mit unbekanntem Belegungen. Diese ermitteln wir, indem wir die zugehörigen RIGL'en lösen. Wir werden sehen, dass alle acht RIGL'en, die wir mit den Sprungrelationen aus Satz 2.5 und Satz 2.6 erhalten, eindeutige Lösungen besitzen.

Satz 2.8

(i) Das Doppelschichtpotential $d^\kappa \varphi$ mit $\varphi \in C(\partial\Omega)$ bzw. das Doppelschichtpotential $d^{\kappa*} \psi$ mit $\psi \in C(\partial\Omega)$ ist genau dann eine Lösung des Problems (id) (siehe (2.8)) bzw. (id*) (siehe (2.12)) zum Randwert $b \in C(\partial\Omega)$, wenn φ bzw. ψ eine Lösung der RIGL

$$\frac{1}{2}\varphi + d^\kappa \varphi = b \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.53)$$

bzw.

$$\frac{1}{2}\psi + d^{\kappa*} \psi = b \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.54)$$

darstellt.

(ii) Das Doppelschichtpotential $d^\kappa \varphi$ mit $\varphi \in C(\partial\Omega)$ bzw. das Doppelschichtpotential $d^{\kappa*} \psi$ mit $\psi \in C(\partial\Omega)$ ist genau dann eine Lösung des Problems (ad) (siehe (2.9)) bzw. (ad*) (siehe (2.13)) zum Randwert $b \in C(\partial\Omega)$, wenn φ bzw. ψ eine Lösung der RIGL

$$-\frac{1}{2}\varphi + d^\kappa \varphi = b \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.55)$$

bzw.

$$-\frac{1}{2}\psi + d^{\kappa*} \psi = b \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.56)$$

darstellt.

Beweis: „ \Rightarrow “ Ist $u = d^\kappa \varphi$ die Lösung von (id) bzw. (ad), so gilt

$$b = (d^\kappa \varphi)^i \quad \text{bzw.} \quad b = (d^\kappa \varphi)^a,$$

was mit Satz 2.5 die Beziehung (2.53) bzw. (2.55) impliziert.

„ \Leftarrow “ Genügt andererseits φ der RIGL (2.53) bzw. (2.55), so nimmt die Funktion $d^\kappa \varphi$ wiederum mit Satz 2.5 auf $\partial\Omega$ den Randwert b stetig an. Wegen $\mathcal{O}d^\kappa \varphi = 0$ außerhalb des Randes $\partial\Omega$ folgt die Behauptung.

Die Aussagen für die adjungierte skalare Oseen-Gleichung beweist man analog. \square

Satz 2.9

(i) Das Einfachschichtpotential $e^\kappa \varphi$ mit $\varphi \in C(\partial\Omega)$ bzw. das Einfachschichtpotential $e^{\kappa^*} \psi$ mit $\psi \in C(\partial\Omega)$ ist genau dann eine Lösung des Problems (in) (siehe (2.10)) bzw. (in^{*}) (siehe (2.14)) zum Randwert $b \in C(\partial\Omega)$, wenn φ bzw. ψ eine Lösung der RIGL

$$-\frac{1}{2}\varphi + h^\kappa \varphi = b \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.57)$$

bzw.

$$-\frac{1}{2}\psi + h^{\kappa^*} \psi = b \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.58)$$

darstellt.

(ii) Das Einfachschichtpotential $e^\kappa \varphi$ mit $\varphi \in C(\partial\Omega)$ bzw. das Einfachschichtpotential $e^{\kappa^*} \psi$ mit $\psi \in C(\partial\Omega)$ ist genau dann eine Lösung des Problems (an) (siehe (2.11)) bzw. (an^{*}) (siehe (2.15)) zum Randwert $b \in C(\partial\Omega)$, wenn φ bzw. ψ eine Lösung der RIGL

$$\frac{1}{2}\varphi + h^\kappa \varphi = b \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.59)$$

bzw.

$$\frac{1}{2}\psi + h^{\kappa^*} \psi = b \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.60)$$

darstellt.

Beweis: „ \Rightarrow “ Ist $e^\kappa \varphi$ die Lösung von (in) bzw. (an), so gilt

$$b = (h^\kappa \varphi)^i \quad \text{bzw.} \quad b = (h^\kappa \varphi)^a,$$

was mit Satz 2.5 die Beziehung (2.57) bzw. (2.59) impliziert.

„ \Leftarrow “ Genügt andererseits φ der RIGL (2.57) bzw. (2.59), so gilt wiederum mit Satz 2.5

$$(h^\kappa \varphi)^i = b \quad \text{bzw.} \quad (h^\kappa \varphi)^a = b \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

d.h., $e^\kappa \varphi$ genügt der Neumann-Bedingung auf $\partial\Omega$. Wegen $\mathcal{O}e^\kappa \varphi = 0$ außerhalb des Randes $\partial\Omega$ folgt die Behauptung. Die Aussagen für die adjungierte skalare Oseen-Gleichung beweist man analog. \square

Bei den RIGL'en (2.53) - (2.60) handelt es sich um Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art in $C(\partial\Omega)$. Im nächsten Satz zeigen wir nämlich, dass die Operatoren d^κ und h^κ schwach singuläre Kerne besitzen und deswegen mit Satz 1.11 kompakt auf $C(\partial\Omega)$ sind.

Satz 2.10 Die Operatoren d^κ , $d^{\kappa*}$, h^κ und $h^{\kappa*} : C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)$ sind kompakt.

Beweis: Mit den expliziten Darstellungen von $d^\kappa(\cdot, \cdot)$ und $h^\kappa(\cdot, \cdot)$ (siehe Anhang, Kapitel 8.1) und mit (1.1) gibt es ein $C > 0$, so dass für $x, y \in \partial\Omega$, $x \neq y$ gilt

$$|d^\kappa(x, y)| = \frac{1}{4\pi} \left| -\frac{(x-y) \cdot \mathbf{n}(y)}{r^3} - \frac{k}{2\nu} \frac{(x-y) \cdot \mathbf{n}(y)}{r^2} \right| |e^{-\kappa s/2\nu}| \leq C \frac{1}{r},$$

sowie analog

$$|h^\kappa(x, y)| \leq C \frac{1}{r},$$

mit $r = |x - y|$, $s = r - (x_1 - y_1)$. Mit Definition 1.10 besitzen die Operatoren d^κ und h^κ schwach singuläre Kerne und sind somit nach Satz 1.11 kompakt. Analog wird die Aussage für $d^{\kappa*}$ und $h^{\kappa*}$ bewiesen. \square

Satz 2.11 Für die Operatoren d^κ , $h^{\kappa*}$, $d^{\kappa*}$, $h^\kappa : C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)$ gilt

$$\langle d^\kappa \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, h^{\kappa*} \psi \rangle \quad \text{und} \quad \langle d^{\kappa*} \psi, \varphi \rangle = \langle \psi, h^\kappa \varphi \rangle$$

für alle $\varphi, \psi \in C(\partial\Omega)$ mit der Bilinearform $\langle f, g \rangle := \int_{\partial\Omega} fg$ do.

Beweis: Mit (2.34) folgt

$$\begin{aligned} \langle d^\kappa \varphi, \psi \rangle &= \int_{\partial\Omega} d^\kappa \varphi(x) \psi(x) \, do_x = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} d^\kappa(x, y) \varphi(y) \, do_y \psi(x) \, do_x \\ &= \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} h^{\kappa*}(y, x) \psi(x) \, do_x \varphi(y) \, do_y = \langle \varphi, h^{\kappa*} \psi \rangle, \end{aligned}$$

vgl. (2.30) und (2.33). Die zweite Identität wird analog bewiesen. \square

Wir können nun die Fredholmsche Alternative (Satz 1.9) auf die RIGL'en (2.53) - (2.60) anwenden.

Satz 2.12 Für die Nullräume der Operatoren

$$\pm \frac{1}{2}I + d^\kappa, \pm \frac{1}{2}I + h^\kappa, \pm \frac{1}{2}I + d^{\kappa*}, \pm \frac{1}{2}I + h^{\kappa*} : C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)$$

gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \left(\frac{1}{2}I + d^\kappa \right) &= \mathcal{N} \left(\frac{1}{2}I + h^{\kappa*} \right) = \{0\}, & \mathcal{N} \left(-\frac{1}{2}I + d^\kappa \right) &= \mathcal{N} \left(-\frac{1}{2}I + h^{\kappa*} \right) = \{0\} \\ \mathcal{N} \left(\frac{1}{2}I + h^\kappa \right) &= \mathcal{N} \left(\frac{1}{2}I + d^{\kappa*} \right) = \{0\}, & \mathcal{N} \left(-\frac{1}{2}I + h^\kappa \right) &= \mathcal{N} \left(-\frac{1}{2}I + d^{\kappa*} \right) = \{0\} \end{aligned}$$

Beweis: Wir beweisen die Eigenschaft nur für das erste Paar der Operatoren. Der Rest wird analog bewiesen. Sei $\psi \in C(\partial\Omega)$ eine Lösung von $\frac{1}{2}\psi + h^{\kappa^*}\psi = 0$. Dann gilt

$$0 = \frac{1}{2}\psi + h^{\kappa^*}\psi \stackrel{(2.48)}{=} (h^{\kappa^*}\psi)^a \stackrel{(2.33)}{=} \nabla^{\kappa^*} e^{\kappa^*}\psi \cdot \mathbf{n},$$

d.h., das Einfachschichtpotential $e^{\kappa^*}\psi$ genügt der homogenen Neumann-Randbedingung (vgl. (2.15)). Außerdem besitzt $e^{\kappa^*}\psi$ die für Neumann-Probleme geforderte Regularität (siehe Seite 15 und Satz 2.6), d.h., das Einfachschichtpotential $e^{\kappa^*}\psi$ löst das Problem (an*) (siehe (2.15)) zum Randwert 0. Darüber hinaus erfüllt das Einfachschichtpotential $e^{\kappa^*}\psi$ die Abklingbedingungen (2.27) (siehe (2.50)), d.h., $e^{\kappa^*}\psi$ ist die eindeutige Lösung von (an*) zum Randwert 0, also gilt $e^{\kappa^*}\psi = 0$ in Ω^* . Aufgrund der Stetigkeit des Einfachschichtpotentials $e^{\kappa^*}\psi$ gilt

$$(e^{\kappa^*}\psi)^i = (e^{\kappa^*}\psi)^a = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

d.h., $e^{\kappa^*}\psi$ löst das Problem (id*) zum Randwert 0, also gilt $e^{\kappa^*}\psi = 0$ im \mathbb{R}^3 . Ferner liefern die Sprungrelationen (2.48) für die Oseen-Normalableitung des Einfachschichtpotentials $e^{\kappa^*}\psi$

$$0 = (h^{\kappa^*}\psi)^i - (h^{\kappa^*}\psi)^a = -\psi \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

d.h., $\mathcal{N}(\frac{1}{2}I + h^{\kappa^*}) = \{0\}$. Mit der Fredholmschen Alternative und Satz 2.11 gilt auch $\mathcal{N}(\frac{1}{2}I + d^{\kappa^*}) = \{0\}$. Die restlichen Aussagen werden analog bewiesen. \square

Der Satz 2.12 besagt also, dass die zu (2.53) - (2.60) zugehörigen homogenen RIGL'en alle nur triviale Lösungen besitzen. Mit Satz 1.9 (Fredholmsche Alternative) folgt somit die eindeutige Lösbarkeit der inhomogenen RIGL'en (2.53) - (2.60) für jeden Randwert $b \in C(\partial\Omega)$.

Satz 2.13 *Das Problem (id) (siehe (2.8)) ist durch das Doppelschichtpotential $d^{\kappa}\varphi$ für jedes $b \in C(\partial\Omega)$ eindeutig lösbar, wobei $\varphi \in C(\partial\Omega)$ die eindeutig bestimmte Lösung der RIGL $\frac{1}{2}\varphi + d^{\kappa}\varphi = b$ auf $\partial\Omega$ ist.*

Das Problem (an) (siehe (2.15)) ist durch das Einfachschichtpotential $e^{\kappa^*}\psi$ für jedes $b \in C(\partial\Omega)$ eindeutig lösbar, wobei $\psi \in C(\partial\Omega)$ die eindeutig bestimmte Lösung der RIGL $\frac{1}{2}\psi + h^{\kappa^*}\psi = b$ auf $\partial\Omega$ ist.*

Das Problem (id) (siehe (2.12)) ist durch das Doppelschichtpotential $d^{\kappa^*}\psi$ für jedes $b \in C(\partial\Omega)$ eindeutig lösbar, wobei $\psi \in C(\partial\Omega)$ die eindeutig bestimmte Lösung der RIGL $\frac{1}{2}\psi + d^{\kappa^*}\psi = b$ auf $\partial\Omega$ ist.*

Das Problem (an) (siehe (2.11)) für die skalare Oseen-Gleichung ist durch das Einfachschichtpotential $e^{\kappa}\varphi$ für jedes $b \in C(\partial\Omega)$ eindeutig lösbar, wobei $\varphi \in C(\partial\Omega)$ die eindeutig bestimmte Lösung der RIGL $\frac{1}{2}\varphi + h^{\kappa}\varphi = b$ auf $\partial\Omega$ ist.

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 2.3. Bei den äußeren Neumann-Problemen können wir Satz 2.3 anwenden, da $e^\kappa\varphi$ und $e^{\kappa^*}\psi$ das erforderliche Abklingverhalten besitzen (vgl. (2.49) und (2.50)). Die Existenz der Lösungen folgt aus Satz 2.8(i) bzw. aus Satz 2.9 (ii) und Satz 2.12. \square

Satz 2.14 *Das Problem (ad) (siehe (2.9)) ist durch das Doppelschichtpotential $d^\kappa\varphi$ für jedes $b \in C(\partial\Omega)$ eindeutig lösbar, wobei $\varphi \in C(\partial\Omega)$ die eindeutig bestimmte Lösung der RIGL $-\frac{1}{2}\varphi + d^\kappa\varphi = b$ auf $\partial\Omega$ ist.*

Das Problem (in) (siehe (2.14)) ist durch das Einfachschichtpotential $e^{\kappa^*}\psi$ für jedes $b \in C(\partial\Omega)$ eindeutig lösbar, wobei $\psi \in C(\partial\Omega)$ die eindeutig bestimmte Lösung der RIGL $-\frac{1}{2}\psi + h^{\kappa^*}\psi = b$ auf $\partial\Omega$ ist.*

Das Problem (ad) (siehe (2.13)) ist durch das Doppelschichtpotential $d^{\kappa^*}\psi$ für jedes $b \in C(\partial\Omega)$ eindeutig lösbar, wobei $\psi \in C(\partial\Omega)$ die eindeutig bestimmte Lösung der RIGL $-\frac{1}{2}\psi + d^{\kappa^*}\psi = b$ auf $\partial\Omega$ ist.*

Das Problem (in) (siehe (2.10)) für die skalare Oseen-Gleichung ist durch das Einfachschichtpotential $e^\kappa\varphi$ für jedes $b \in C(\partial\Omega)$ eindeutig lösbar, wobei $\varphi \in C(\partial\Omega)$ die eindeutig bestimmte Lösung der RIGL $-\frac{1}{2}\varphi + h^\kappa\varphi = b$ auf $\partial\Omega$ ist.

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 2.3. Bei den äußeren Dirichlet-Problemen können wir Satz 2.3 anwenden, da $d^\kappa\varphi$ und $d^{\kappa^*}\psi$ das erforderliche Abklingverhalten besitzen (vgl. (2.51) und (2.52)). Die Existenz der Lösungen folgt aus Satz 2.8(ii) bzw. aus Satz 2.9 (i) und Satz 2.12. \square

3 Hydrodynamische Potentialtheorie

In diesem Kapitel stellen wir die wichtigsten Resultate aus der hydrodynamischen Potentialtheorie zur Lösung der stationären Stokes-Gleichungen in dreidimensionalen Gebieten zusammen, die wir für unsere Zwecke benötigen. Die hydrodynamischen Potentiale wurden 1929 von Lichtenstein [Lic68] und Odqvist [Odq30] unabhängig voneinander konstruiert und deren Eigenschaften untersucht. Wichtige Ergebnisse zu den Stokes-Gleichungen findet man außerdem in [Lad69], [DvWW88], [DvW89], [Var94], [Var04].

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega$ der Klasse C^2 . Wir betrachten die Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Dabei sind das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ und der zugehörige Druck $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchten Funktionen. Das auf die Flüssigkeit wirkende äußere Kraftfeld $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben.

Wir definieren die folgenden formalen Differentialoperatoren:

$$\mathcal{S} : \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{S} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{S}^* : \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{S}^* \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta \mathbf{u} - \nabla p \\ -\nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$T : \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \mapsto T \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = -2D\mathbf{u} + pI_3, \quad (3.3)$$

$$T^* : \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \mapsto T^* \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = -2D\mathbf{u} - pI_3. \quad (3.4)$$

Dabei ist

$$D\mathbf{u} := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

der so genannte Deformationstensor und I_3 die 3×3 -Einheitsmatrix.

Im Folgenden bezeichnet $\mathbf{n} = \mathbf{n}(y)$ stets die ins Äußere von Ω weisende Einheitsnormale in $y \in \partial\Omega$. Es gelten die folgenden hydrodynamischen Greenschen Formeln:

Satz 3.1 (Erste Greensche Formeln für die Stokes-Operatoren) *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^1$. Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^2(\Omega)^3$ und $p, q \in C^1(\Omega)$, so dass $T_p^* \mathbf{u} \mathbf{n}$ und $T_q^* \mathbf{v} \mathbf{n}$ stetig fortsetzbar auf $\partial\Omega$ sowie $\mathcal{S}_p^* \mathbf{u}$ und $\mathcal{S}_q^* \mathbf{v}$ integrierbar in Ω sind.*

Dann gelten die ersten hydrodynamischen Greenschen Formeln

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{S}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} dy &= \int_{\partial\Omega} T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} do + 2 \int_{\Omega} D\mathbf{u} : D\mathbf{v} dy \\ &+ \int_{\Omega} \{(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})q\} dy \end{aligned} \quad (3.5)$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \cdot \mathbf{S}_q^{\mathbf{v}} dy &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot T_q^{\mathbf{v}} \mathbf{n} do + 2 \int_{\Omega} D\mathbf{u} : D\mathbf{v} dy \\ &+ \int_{\Omega} \{\mathbf{u} \cdot (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})) + (\nabla \cdot \mathbf{u})q - p(\nabla \cdot \mathbf{v})\} dy. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Im Fall divergenzfreier Vektorfunktionen \mathbf{u} und \mathbf{v} entfällt jeweils das letzte Integral.

Die ersten hydrodynamischen Greenschen Formeln (3.5) und (3.6) liefern durch Subtraktion die zweite hydrodynamische Greensche Formel:

Satz 3.2 (Zweite Greensche Formel für die Stokes-Operatoren) *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1 gilt die zweite hydrodynamische Greensche Formel*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\mathbf{S}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \cdot \mathbf{S}_q^{\mathbf{v}} \right) dy &= \int_{\partial\Omega} \left(T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot T_q^{\mathbf{v}} \mathbf{n} \right) do \\ &+ \int_{\Omega} \{(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}))\} dy. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Im Fall divergenzfreier Vektorfunktionen \mathbf{u} und \mathbf{v} entfällt das letzte Integral.

Einen Beweis der Greenschen Formeln für die Stokes-Gleichungen findet man z.B. in [Var91]. Mit Hilfe der zweiten Greenschen Formel können wir den nächsten Satz beweisen.

Satz 3.3 *Die Stokes-Operatoren \mathbf{S} und \mathbf{S}^* sind bzgl. der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definiert durch $\langle (\mathbf{u}, p)^T, (\mathbf{v}, q)^T \rangle := \int_{\Omega} (\mathbf{u}, p)^T \cdot (\mathbf{v}, q)^T dy$, für genügend glatte divergenzfreie Funktionen \mathbf{u}, \mathbf{v} mit $\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0$ auf $\partial\Omega$ zueinander adjungiert.*

Beweis: Wegen $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ sowie $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ auf $\partial\Omega$ folgt aus der zweiten Greenschen Formel (3.7)

$$\left\langle \mathbf{S}_p^{\mathbf{u}}, \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}, \mathbf{S}_q^{\mathbf{v}} \right\rangle = \int_{\Omega} \left(\mathbf{S}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \cdot \mathbf{S}_q^{\mathbf{v}} \right) dy = 0,$$

wie behauptet. □

Satz 3.4 (Dritte Greensche Formeln für die Stokes-Operatoren) *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1 gelten die dritten hydrodynamischen Greenschen Formeln*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{S}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} dy &= \int_{\partial\Omega} ((-\nabla \mathbf{u} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} + p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})) do + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dy \\ &+ \int_{\Omega} (-p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})q) dy \end{aligned} \quad (3.8)$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S}_q^{\mathbf{v}} dy &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot (-\nabla \mathbf{v} \mathbf{n}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})q) do + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dy \\ &+ \int_{\Omega} ((\nabla \cdot \mathbf{u})q - p(\nabla \cdot \mathbf{v})) dy. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Im Fall divergenzfreier Vektorfunktionen \mathbf{u} und \mathbf{v} entfällt jeweils das letzte Integral.

Beweis: Es gilt zunächst

$$\int_{\Omega} \mathcal{S}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} dy = \int_{\Omega} (-\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \nabla p \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{u})q dy.$$

Wegen

$$(\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (\partial_i \partial_i u_j) v_j = \partial_i ((\partial_i u_j) v_j) - (\partial_i u_j) (\partial_i v_j) = \nabla \cdot ((\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{v}) - \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$$

sowie

$$\nabla p \cdot \mathbf{v} = (\partial_j p) v_j = \partial_j (p v_j) - p (\partial_j v_j) = \nabla \cdot (p \mathbf{v}) - p \nabla \cdot \mathbf{v}$$

folgt mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dy &= \int_{\partial\Omega} ((\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} do - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dy \\ &= \int_{\partial\Omega} (\nabla \mathbf{u} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} do - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dy \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} dy = \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) do - \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dy$$

und somit die Gleichung (3.8). Die Gleichung (3.9) wird analog gezeigt. \square

Satz 3.5 (Vierte Greensche Formel für die Stokes-Operatoren) *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1 gilt die vierte hydrodynamische Greensche Formel*

$$\int_{\Omega} \left(\mathbf{S}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \cdot \mathbf{S}_q^{*\mathbf{v}} \right) dy = \int_{\partial\Omega} (((-\nabla\mathbf{u} + pI_3)\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot ((-\nabla\mathbf{v} - qI_3)\mathbf{n})) \, do.$$

Wir definieren nun den Fundamentaltensor der Stokes-Gleichungen, dessen Eigenschaften in [DvWW88], [DvW89] ausführlich untersucht werden.

Definition 3.6 *Der Fundamentaltensor E der Stokes-Gleichungen im \mathbb{R}^3 ist eine Lösung des Systems $\mathbf{S}E = \delta I_4$ in $S'(\mathbb{R}^3)^4$ und stellt eine 4×4 -Matrix dar, die für $x \neq 0$ definiert ist durch*

$$\begin{aligned} E_{jk}(x) &:= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{x_j x_k}{|x|^3} + \delta_{jk} |x|^{-1} \right) \quad \text{für } j, k = 1, 2, 3, \\ E_{4k}(x) = E_{k4}(x) &:= \frac{x_k}{4\pi|x|^3} \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \\ E_{44}(x) &:= \delta(x). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dabei bezeichnet δ_{jk} das Kronecker-Symbol und δ die Delta-Distribution im \mathbb{R}^3 .

Für den Fundamentaltensor E^* der adjungierten Stokes-Gleichungen im \mathbb{R}^3 , d.h., für eine Lösung des Systems $\mathbf{S}^*E^* = \delta I_4$ in $S'(\mathbb{R}^3)^4$, gilt

$$\begin{aligned} E_{jk}^*(x) &= E_{jk}(x) \quad \text{für } j, k = 1, 2, 3, \\ E_{4k}^*(x) = E_{k4}^*(x) &= -E_{4k}(x) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \\ E_{44}^*(x) &= E_{44}(x). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sei nun (\mathbf{u}, p) eine Lösung der Stokes-Gleichungen in einem beschränkten C^2 -Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, d.h., in Ω gilt $\mathbf{S}_p^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sei $x \in \Omega$. Setze für $k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} v_j &:= E_{jk}(x - \cdot) \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \\ q &:= E_{4k}(x - \cdot). \end{aligned}$$

Wenden wir nun die zweite Greensche Formel (3.7) auf (\mathbf{u}, p) und (\mathbf{v}, q) in $\Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(x)}$ mit genügend kleinem $\varepsilon > 0$ an, d.h., wir schneiden um die Singularität x eine hinreichend kleine Kugel aus, so erhalten wir für $(\mathbf{u}, p)^T(x) = (u_1, u_2, u_3, p)^T(x)$ die folgende

Darstellung für $x \in \Omega$ und $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
u_k(x) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(y) \cdot (E_{jk})_{j=1,2,3}(x-y) dy \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} \left(T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{n} \right) (y) \cdot (E_{jk})_{j=1,2,3}(x-y) do_y \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(y) \cdot \left(T^* (E_{jk})_{j=1,2,3,4} \right) (x-y) \mathbf{n}(y) do_y,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(y) \cdot (E_{j4})_{j=1,2,3}(x-y) dy \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} \left(T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{n} \right) (y) \cdot (E_{j4})_{j=1,2,3}(x-y) do_y \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(y) \cdot \left(T^* (E_{j4})_{j=1,2,3,4} \right) (x-y) \mathbf{n}(y) do_y.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Für $x \notin \Omega$ erhalten wir in (3.12) und (3.13) Null auf der linken Seite. Einen Beweis der Darstellungsformeln (3.12) und (3.13) findet man z.B. in [Lad69].

Wie in der klassischen Potentialtheorie kann eine Lösung (\mathbf{u}, p) des Stokes-Systems als Summe dreier Potentiale dargestellt werden, nämlich eines hydrodynamischen Einfachschichtpotentials mit Belegungsdichte $T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{n}$, eines hydrodynamischen Doppelschichtpotentials mit Belegungsdichte \mathbf{u} und eines hydrodynamischen Volumenpotentials mit Belegungsdichte $-\Delta \mathbf{u} + \nabla p$.

Als Nächstes definieren wir die hydrodynamischen Einfach- bzw. Doppelschichtpotentiale mit einer allgemeinen Belegungsdichte $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ und betrachten ihre Eigenschaften.

Das Einfachschichtpotential für den Stokes-Operator mit Belegungsdichte $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ ist definiert für $x \notin \partial\Omega$ durch die vierdimensionale Vektorfunktion

$$\mathbf{E}\Psi(x) := \int_{\partial\Omega} E^S(x-y)\Psi(y) do_y. \tag{3.14}$$

Seinen Geschwindigkeitsanteil bezeichnen wir mit $\mathbf{E}^\bullet \Psi$, d.h., es gilt

$$\mathbf{E}^\bullet \Psi(x) := \int_{\partial\Omega} E^{SZ}(x-y)\Psi(y) do_y. \tag{3.15}$$

Das Einfachschichtpotential für den adjungierten Stokes-Operator mit Belegungsdichte $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ ist definiert für $x \notin \partial\Omega$ durch

$$\mathbf{E}^* \Psi(x) := \int_{\partial\Omega} E^{*S}(x-y)\Psi(y) do_y \tag{3.16}$$

sowie sein Geschwindigkeitsanteil durch

$$\mathbf{E}^{*\bullet}\Psi(x) := \int_{\partial\Omega} E^{*SZ}(x-y)\Psi(y) do_y. \quad (3.17)$$

Wegen (3.11) gilt für $x \notin \partial\Omega$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{*\bullet}\Psi(x) &= \mathbf{E}^\bullet\Psi(x), \\ (\mathbf{E}^{*\Psi})_4(x) &= -(\mathbf{E}\Psi)_4(x). \end{aligned}$$

Das Doppelschichtpotential für den Stokes-Operator und sein Geschwindigkeitsanteil bzw. das Doppelschichtpotential für den adjungierten Stokes-Operator und sein Geschwindigkeitsanteil mit Belegungsdichte $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ sind definiert für $x \notin \partial\Omega$ durch

$$D\Psi(x) := \int_{\partial\Omega} D(x,y)\Psi(y) do_y, \quad (3.18)$$

$$D^\bullet\Psi(x) := \int_{\partial\Omega} D^Z(x,y)\Psi(y) do_y, \quad (3.19)$$

$$D^*\Psi(x) := \int_{\partial\Omega} D^*(x,y)\Psi(y) do_y, \quad (3.20)$$

$$D^{*\bullet}\Psi(x) := \int_{\partial\Omega} D^{*Z}(x,y)\Psi(y) do_y, \quad (3.21)$$

mit den 4×3 -Matrizen

$$\begin{aligned} D(x,y) &:= (T_y^* E(x-y)\mathbf{n}(y))^T, \\ D^*(x,y) &:= (T_y E^*(x-y)\mathbf{n}(y))^T. \end{aligned}$$

Dabei gilt für $k = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} D_{kj}(x,y) &= \partial_{x_i} E_{jk}(x-y)n_i(y) + \partial_{x_j} E_{ik}(x-y)n_i(y) \\ &\quad - E_{4k}(x-y)\delta_{ij}n_i(y), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} D_{kj}^*(x,y) &= \partial_{x_i} E_{jk}^*(x-y)n_i(y) + \partial_{x_j} E_{ik}^*(x-y)n_i(y) \\ &\quad + E_{4k}^*(x-y)\delta_{ij}n_i(y). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Für die explizite Darstellung der Matrix D gilt (vgl. [Var94])

$$D_{kj}(x,y) = -\frac{3}{4\pi} \frac{(x_k - y_k)(x_j - y_j)(x - y) \cdot \mathbf{n}(y)}{|x - y|^5} \quad \text{für } k, j = 1, 2, 3, \quad (3.24)$$

$$D_{4j}(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{3(x_j - y_j)(x - y) \cdot \mathbf{n}(y)}{|x - y|^5} - \frac{n_j}{|x - y|^3} \right) \quad \text{für } j = 1, 2, 3. \quad (3.25)$$

Für die 4×3 -Matrix D^* gilt mit (3.11) für $k, j = 1, 2, 3$

$$D_{kj}^*(x, y) = D_{kj}(x, y), \quad (3.26)$$

$$D_{4j}^*(x, y) = -D_{4j}(x, y). \quad (3.27)$$

Für das Doppelschichtpotential $D^\bullet a$ mit einer konstanten Belegung $a \in \mathbb{R}^3$ gilt speziell (vgl. [Var94])

$$Da(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \Omega^*, \\ \frac{1}{2}a & \text{für } x \in \partial\Omega, \\ a & \text{für } x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.28)$$

Wir benötigen außerdem die Normalspannungen der Einfachschichtpotentiale. Diese sind in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von $\partial\Omega$ definiert und haben die Gestalt

$$H^\bullet \Psi(x) := T_x(\mathbf{E}\Psi(x))\mathbf{n}(x') = \int_{\partial\Omega} T_x(E^S(x-y)\Psi(y))\mathbf{n}(x') do_y \quad (3.29)$$

$$=: \int_{\partial\Omega} H(x, y)\Psi(y) do_y,$$

$$H^{*\bullet} \Psi(x) := T_x^*(\mathbf{E}^*\Psi(x))\mathbf{n}(x') = \int_{\partial\Omega} T_x^*(E^{*S}(x-y)\Psi(y))\mathbf{n}(x') do_y \quad (3.30)$$

$$=: \int_{\partial\Omega} H^*(x, y)\Psi(y) do_y.$$

Dabei gilt für $k, i = 1, 2, 3$

$$H_{ki}(x, y) = -\partial_{x_j} E_{ki}(x-y)n_j(x') - \partial_{x_k} E_{ji}(x-y)n_j(x') + E_{4i}(x-y)\delta_{jk}n_j(x'), \quad (3.31)$$

$$H_{ki}^*(x, y) = -\partial_{x_j} E_{ki}(x-y)n_j(x') - \partial_{x_k} E_{ji}(x-y)n_j(x') - E_{4i}^*(x-y)\delta_{jk}n_j(x'). \quad (3.32)$$

Hier ist $x' \in \partial\Omega$ die eindeutig bestimmte Projektion von $x \in U$ auf $\partial\Omega \in C^2$. Die explizite Darstellung der 3×3 -Matrix H besitzt die folgende Gestalt:

$$H_{kj}(x, y) = \frac{3}{4\pi} \frac{(x_k - y_k)(x_j - y_j)(x - y) \cdot \mathbf{n}(x')}{|x - y|^5} \quad \text{für } k, j = 1, 2, 3. \quad (3.33)$$

Für die 3×3 -Matrix H^* gilt mit (3.11) die Identität

$$H^*(x, y) = H(x, y). \quad (3.34)$$

Die beiden expliziten Darstellungen (3.24) und (3.33) sowie (3.26) und (3.34) implizieren für $x, y \in \partial\Omega$, $x \neq y$

$$H^*(x, y) = H(x, y) = D^Z(y, x) = D^{*Z}(y, x). \quad (3.35)$$

Satz 3.7 Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine Umgebung von $\partial\Omega$. Sei $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ und seien $\mathbf{E}^\bullet\Psi$, $\mathbf{D}^\bullet\Psi$, $\mathbf{H}^\bullet\Psi$ wie in (3.15), (3.19) und (3.29) definiert. Dann existieren die so genannten direkten Werte $\mathbf{E}^\bullet\Psi(x)$, $\mathbf{D}^\bullet\Psi(x)$, $\mathbf{H}^\bullet\Psi(x)$ für $x \in \partial\Omega$ und für die Grenzwerte von Innen und von Außen gelten die folgenden Relationen (vgl. (1.4)):

$$(\mathbf{E}^\bullet\Psi)^i = \mathbf{E}^\bullet\Psi = (\mathbf{E}^\bullet\Psi)^a, \quad (3.36)$$

$$(\mathbf{D}^\bullet\Psi)^i - \mathbf{D}^\bullet\Psi = \frac{1}{2}\Psi = \mathbf{D}^\bullet\Psi - (\mathbf{D}^\bullet\Psi)^a, \quad (3.37)$$

$$(\mathbf{H}^\bullet\Psi)^i - \mathbf{H}^\bullet\Psi = -\frac{1}{2}\Psi = \mathbf{H}^\bullet\Psi - (\mathbf{H}^\bullet\Psi)^a. \quad (3.38)$$

Beweis: Einen Beweis findet man z.B. in [Lad69]. □

Die Potentiale $\mathbf{D}^\bullet\Psi$, $\mathbf{D}^{*\bullet\Psi}$, $\mathbf{H}^\bullet\Psi$ und $\mathbf{H}^{*\bullet\Psi}$ besitzen auf $\partial\Omega$ je einen schwach singulären Kern. Dies folgt mit (1.1) aus den expliziten Darstellungen der Kerne (3.24) und (3.33).

Wir sehen also, dass sich die hydrodynamischen Potentiale beim Durchgang durch den Rand ähnlich verhalten wie die klassischen Potentiale der skalaren Laplace-Gleichung: Der Geschwindigkeitsanteil des Einfachschichtpotentials ist stetig im ganzen Raum \mathbb{R}^3 , während der Geschwindigkeitsanteil des Doppelschichtpotentials sowie die Normalspannungen des Einfachschichtpotentials beim Durchgang durch den Rand springen.

4 Oseen-System im \mathbb{R}^3

4.1 Einführung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega$ der Klasse C^2 . Wir betrachten die Oseen-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \kappa\partial_1\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dabei sind das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ und der zugehörige Druck $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ der Strömung die gesuchten Funktionen. Die kinematische Viskosität $\nu > 0$, das auf die Flüssigkeit wirkende äußere Kraftfeld $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ und die positive reelle Konstante κ sind gegeben. Die erste Gleichung in (4.1) stellt ein System von 3 Gleichungen dar. Die vierte Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ fordert die Divergenzfreiheit der Vektorfunktion \mathbf{u} .

O.B.d.A setzen wir $\nu = 1$ und definieren die so genannten Oseen-Operatoren \mathcal{O} , \mathcal{O}^* durch

$$\mathcal{O} : \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -\Delta\mathbf{u} + \kappa\partial_1\mathbf{u} + \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{O}^* : \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{O}_p^{*\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -\Delta\mathbf{u} - \kappa\partial_1\mathbf{u} - \nabla p \\ -\nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Satz 4.1 Die Oseen-Operatoren \mathcal{O} und \mathcal{O}^* sind zueinander adjungiert bzgl. der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definiert durch $\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} \right\rangle := \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} dy$, d.h., es gilt

$$\left\langle \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}}, \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}, \mathcal{O}_q^{*\mathbf{v}} \right\rangle$$

für genügend glatte divergenzfreie Funktionen \mathbf{u} , \mathbf{v} mit $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ auf $\partial\Omega$.

Beweis: Wegen der Darstellungen

$$\mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} = S_p^{\mathbf{u}} + \begin{pmatrix} \kappa\partial_1\mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{O}_p^{*\mathbf{u}} = S_p^{*\mathbf{u}} - \begin{pmatrix} \kappa\partial_1\mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der Adjungiertheit der Operatoren S und S^* (vgl. Satz 3.3) gilt zunächst

$$\left\langle \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}}, \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}, S_q^{*\mathbf{v}} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} \kappa\partial_1\mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wegen $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ auf $\partial\Omega$ folgt mit Hilfe des Satzes von Gauß

$$\left\langle \begin{pmatrix} \kappa\partial_1\mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} \right\rangle = - \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \kappa\partial_1\mathbf{v} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und somit die Behauptung. \square

Mit Hilfe von (3.3) und (3.4) definieren wir folgende Differentialoperatoren:

$$T^\kappa : \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \mapsto T^\kappa \mathbf{u} = T_p \mathbf{u} + \frac{\kappa}{2} (\mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad (4.4)$$

$$T^{\kappa*} : \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \mapsto T^{\kappa*} \mathbf{u} = T_p^* \mathbf{u} - \frac{\kappa}{2} (\mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad (4.5)$$

mit

$$(\mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Operatoren T^κ und $T^{\kappa*}$ nennen wir Oseen-Spannungstensoren.

4.2 Greenschen Formeln für die Oseen-Operatoren

Mit Hilfe der oben eingeführten Differentialoperatoren formulieren wir nun die Greenschen Formeln für die Oseen-Operatoren.

Satz 4.2 (Erste Greensche Formel für die Oseen-Operatoren) *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^1$. Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^2(\Omega)^3$ und $p, q \in C^1(\Omega)$, so dass $T^\kappa \mathbf{u} \mathbf{n}$ und $T^{\kappa*} \mathbf{v} \mathbf{n}$ stetig fortsetzbar auf $\partial\Omega$ sowie $\mathcal{O}_p^{\mathbf{u}}$ und $\mathcal{O}_q^{\mathbf{v}}$ integrierbar in Ω sind. Dann gelten die ersten Greenschen Formeln für die Oseen-Operatoren:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} dy &= \int_{\partial\Omega} T^\kappa \mathbf{u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} do + 2 \int_{\Omega} D\mathbf{u} : D\mathbf{v} dy \\ &\quad - \int_{\Omega} \kappa \mathbf{u} \cdot \partial_1 \mathbf{v} dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\kappa}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) n_1 do \\ &\quad + \int_{\Omega} \{(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + q(\nabla \cdot \mathbf{u})\} dy, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \cdot \mathcal{O}_q^{\mathbf{v}} dy &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot T^{\kappa*} \mathbf{v} \mathbf{n} do + 2 \int_{\Omega} D\mathbf{u} : D\mathbf{v} dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \partial_1 \mathbf{u} \cdot \kappa \mathbf{v} dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\kappa}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) n_1 do \\ &\quad + \int_{\Omega} \{\mathbf{u} \cdot (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})) + q(\nabla \cdot \mathbf{u}) - p(\nabla \cdot \mathbf{v})\} dy. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Im Fall divergenzfreier Vektorfunktionen \mathbf{u} und \mathbf{v} entfallen die jeweils letzten Integrale.

Beweis: Der Oseen-Operator \mathcal{O} besitzt die Darstellung

$$\mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} = \mathcal{S}_p^{\mathbf{u}} + \begin{pmatrix} \kappa \partial_1 \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit dem Stokes-Operator \mathcal{S} (siehe (3.1)). So folgt zunächst mit der ersten Greenschen Formel (3.5) für den Stokes-Operator

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} dy &= \int_{\Omega} \mathcal{S}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} dy + \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \kappa \partial_1 \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} dy \\ &= \int_{\partial\Omega} T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} do + 2 \int_{\Omega} D\mathbf{u} : D\mathbf{v} dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \{(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + q(\nabla \cdot \mathbf{u})\} dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \kappa \partial_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dy. \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Gauß gilt für das letzte Integral

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \kappa \partial_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dy &= \int_{\Omega} (\kappa \partial_1(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \kappa \mathbf{u} \cdot \partial_1 \mathbf{v}) dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \kappa(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) n_1 do - \int_{\Omega} \kappa \mathbf{u} \cdot \partial_1 \mathbf{v} dy \end{aligned}$$

und somit folgt wegen $(\mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{0})\mathbf{n} = n_1 \mathbf{u}$ die Beziehung

$$T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} + \frac{\kappa}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) n_1 = \left(T_p^{\mathbf{u}} + \frac{\kappa}{2}(\mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = T_p^{\kappa \mathbf{u}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$$

und damit die Behauptung.

Analog lässt sich auch die erste Greensche Formel (4.7) für den adjungierten Oseen-Operator herleiten. \square

Satz 4.3 (Zweite Greensche Formel für die Oseen-Operatoren) *Unter den gleichen Voraussetzung wie im Satz 4.2 gilt die zweite Greensche Formel für die Oseen-Operatoren:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \cdot \mathcal{O}^* \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} \right) dy &= \int_{\partial\Omega} \left(T_p^{\kappa \mathbf{u}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot T_q^{\kappa^* \mathbf{v}} \mathbf{n} \right) do \\ &\quad + \int_{\Omega} \{(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}))\} dy. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Im Fall divergenzfreier Vektorfunktionen \mathbf{u} und \mathbf{v} entfällt das letzte Integral.

Beweis: Subtrahiert man die Gleichung (4.7) von der Gleichung (4.6), so ergibt sich die Behauptung aufgrund von

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \kappa \mathbf{u} \cdot \partial_1 \mathbf{v} \, dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\kappa}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) n_1 \, do - \int_{\Omega} \partial_1 \mathbf{u} \cdot \kappa \mathbf{v} \, dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\kappa}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) n_1 \, do \\ & = - \int_{\Omega} \kappa \partial_1 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, dy + \int_{\partial\Omega} \kappa (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) n_1 \, do = 0. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe anderer Greenschen Formeln lassen sich weitere RWA'n für das Oseen-System untersuchen. Im Folgenden geben wir einige Beispiele für solche Formeln an. Dazu führen wir nun die folgenden Differentialoperatoren ein:

$$K : \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \mapsto K \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = -\nabla \mathbf{u} + p I_3 + \frac{\kappa}{2} (\mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad (4.9)$$

$$K^* : \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \mapsto K^* \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = -\nabla \mathbf{u} - p I_3 - \frac{\kappa}{2} (\mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{0}). \quad (4.10)$$

Satz 4.4 (Dritte Greensche Formel für die Oseen-Operatoren) *Unter den gleichen Voraussetzung wie im Satz 4.2 gilt die dritte Greensche Formel für die Oseen-Operatoren:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} \, dy &= \int_{\partial\Omega} K_p^{\mathbf{u}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, do + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} \frac{\kappa}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) n_1 \, do - \int_{\Omega} \kappa \mathbf{u} \cdot \partial_1 \mathbf{v} \, dy \\ &+ \int_{\Omega} (-p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})q) \, dy, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \cdot \mathcal{O}_q^{\mathbf{v}} \, dy &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot K_q^* \mathbf{v} \mathbf{n} \, do + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dy \\ &- \int_{\partial\Omega} \frac{\kappa}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) n_1 \, do + \int_{\Omega} \partial_1 \mathbf{u} \cdot \kappa \mathbf{v} \, dy \\ &+ \int_{\Omega} ((\nabla \cdot \mathbf{u})q - p(\nabla \cdot \mathbf{v})) \, dy. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Im Fall divergenzfreier Vektorfunktionen \mathbf{u} und \mathbf{v} entfallen die jeweils letzten Integrale.

Beweis: Die dritte Greensche Formel für die Oseen-Operatoren folgt sofort aus der dritten hydrodynamischen Greenschen Formel (vgl. Satz 3.4). \square

Satz 4.5 (Vierte Greensche Formel für die Oseen-Operatoren) *Unter den gleichen Voraussetzung wie im Satz 4.2 gilt die vierte Greensche Formel für die Oseen-Operatoren:*

$$\int_{\Omega} \left(\mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \cdot \mathcal{O}_q^{\ast \mathbf{v}} \right) dy = \int_{\partial\Omega} K_p^{\mathbf{u}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - K_q^{\ast \mathbf{v}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} do \quad (4.13)$$

Beweis: Die vierte Greensche Formel für die Oseen-Operatoren wird durch die Subtraktion der Gleichung (4.12) von der Gleichung (4.11) bewiesen. \square

Satz 4.6 (Fünfte Greensche Formel für die Oseen-Operatoren) *Unter den gleichen Voraussetzung wie im Satz 4.2 gilt die fünfte Greensche Formel für die Oseen-Operatoren:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} dy &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} + p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) do \\ &+ \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) + \kappa \partial_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} -(\nabla \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) do \\ &+ \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})q - (\nabla \cdot \mathbf{v})p dy, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \cdot \mathcal{O}_q^{\ast \mathbf{v}} dy &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{v})) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})q do \\ &+ \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{u} \cdot \kappa \partial_1 \mathbf{v} dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\nabla \cdot \mathbf{v}) do \\ &+ \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})q dy. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Im Fall divergenzfreier Vektorfunktionen \mathbf{u} und \mathbf{v} entfallen die jeweils letzten beiden Integrale.

Beweis: Für die Herleitung dieser Formeln benötigen wir die folgenden Identitäten aus der Vektoranalysis:

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (4.16)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (4.17)$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}. \quad (4.18)$$

Mit der ersten Identität (4.16) gilt zunächst

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} dy \\ &= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} -\Delta \mathbf{u} + \kappa \partial_1 \mathbf{u} + \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} dy \\ &= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \kappa \partial_1 \mathbf{u} + \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} dy \\ &= \int_{\Omega} (-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} + \kappa \partial_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla p \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{u})q) dy. \end{aligned}$$

Nun vereinfachen wir die einzelnen Summanden. Mit Summenkonvention erhalten wir

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \partial_j(\partial_i u_i) v_j = \partial_j(v_j \partial_i u_i) - (\partial_j v_j)(\partial_i u_i) = \nabla \cdot (\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u})) - (\nabla \cdot \mathbf{v})(\nabla \cdot \mathbf{u}),$$

und der Satz von Gauß liefert dann

$$\int_{\Omega} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dy = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\nabla \cdot \mathbf{u}) do - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v})(\nabla \cdot \mathbf{u}) dy.$$

Ebenso erhalten wir mit dem Satz von Gauß aus (4.17) und (4.18) die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dy &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dy + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) dy \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dy + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) do \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dy + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} do, \end{aligned}$$

und ersetzt man hier \mathbf{u} durch $\nabla \times \mathbf{u}$, so folgt

$$\int_{\Omega} (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} dy = \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dy + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} do.$$

Außerdem erhält man wegen

$$\nabla p \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (p\mathbf{v}) - p \nabla \cdot \mathbf{v}$$

aus dem Satz von Gauß die Beziehung

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dy = \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, do - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dy.$$

Fasst man diese Umformungen zusammen, so folgt (4.14). Die Gleichung (4.15) wird analog bewiesen. \square

Satz 4.7 (Sechste Greensche Formel für die Oseen-Operatoren) *Unter den gleichen Voraussetzung wie im Satz 4.2 gilt die sechste Greensche Formel für die Oseen-Operatoren:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \cdot \mathcal{O}_q^{\mathbf{v}} \, dy &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{v})) \cdot \mathbf{u} \, do \quad (4.19) \\ &+ \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})q \, do \\ &+ \int_{\partial\Omega} \kappa(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})n_1 \, do \\ &+ \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, do. \end{aligned}$$

Im Fall divergenzfreier Vektorfunktionen \mathbf{u} und \mathbf{v} entfällt das letzte Integral.

4.3 Fundamentaltensor

Als Nächstes beschäftigen wir uns mit dem Fundamentaltensor der Oseen-Gleichungen, der in [Ose27] von Oseen hergeleitet wurde. Wir stellen in dieser Arbeit die Herleitung des Fundamentaltensors mit der Methode der Fouriertransformation in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)^4$ vor (im Fall $\kappa = 0$ siehe [Lad69]). Dazu verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

Wir definieren den so genannten Schwartzschen Raum (Raum der schnell fallenden Funktionen) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ durch

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \sup_x |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^3\}. \quad (4.20)$$

Ein stetiges, lineares Funktional f auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ heißt temperierte Distribution. Die Menge der temperierten Distributionen bildet den topologischen Dualraum von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Dieser wird mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ bezeichnet. Aufgrund dieser Dualität spricht man auch von den langsam wachsenden Distributionen im Gegensatz zu den schnell fallenden Funktionen.

Für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ verwenden wir die folgenden Bezeichnungen für die Fouriertransformation (FT) im \mathbb{R}^3 : Sei

$$\begin{aligned} \hat{u}(\alpha) &:= Fu(\alpha) := c \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\alpha \cdot x} u(x) \, dx, \\ u(x) &= (F^{-1}\hat{u})(x) := c \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\alpha \cdot x} \hat{u}(\alpha) \, d\alpha, \end{aligned}$$

mit $c = (2\pi)^{-3/2}$. Für die FT gelten bekanntlich die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\widehat{\partial_j u} &= i\alpha_j \hat{u}, \\ \partial_j \hat{u} &= -i\alpha_j \widehat{u}, \\ F^{-1}(\partial_j \hat{u}) &= -i\alpha_j F^{-1}\hat{u}, \\ \partial_j(F^{-1}\hat{u}) &= F^{-1}(i\alpha_j \hat{u}).\end{aligned}$$

Für eine temperierte Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ definieren wir

$$\begin{aligned}\hat{T}(\varphi) &= T(\hat{\varphi}), \\ F^{-1}(T(\varphi)) &= T(F^{-1}\varphi)\end{aligned}$$

für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Die obigen Eigenschaften gelten analog für die Fouriertransformation der temperierten Distributionen.

Handelt es sich um eine reguläre Distribution, d.h., diese wird durch eine lokal integrierbare Funktion f erzeugt, so bezeichnen wir sowohl die Funktion als auch die zugehörige reguläre Distribution mit f .

Satz 4.8 Die Lösung $E^\kappa = (E_{jk}^\kappa)_{j,k=1,2,3,4}$ von

$$\mathcal{O}E^\kappa = \delta I_4 \quad (4.21)$$

in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)^4$ besitzt die folgende Gestalt:

$$E_{jk}^\kappa(x) := (\delta_{jk}\Delta - \partial_j\partial_k)\Phi(s(x)) \text{ für } j, k = 1, 2, 3 \quad (4.22)$$

mit

$$\Phi(s) = \frac{1}{4\pi\kappa} \int_0^{\kappa s/2} \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} d\xi, \quad s(x) = |x| - x_1, \quad (4.23)$$

und

$$E_{4k}^\kappa(x) = E_{k4}^\kappa(x) = -\partial_k \frac{1}{4\pi|x|} \text{ für } k = 1, 2, 3, \quad (4.24)$$

sowie

$$E_{44}^\kappa(x) = \delta(x) - \kappa E_{14}^\kappa(x). \quad (4.25)$$

Wir nennen die 4×4 -Matrix E^κ den Fundamentaltensor der Oseen-Gleichungen.

Beweis: Sei $k = 1, 2, 3$. Dann gilt für die k -te Spalte $E_k^\kappa := (E_{jk}^\kappa)_{j=1,2,3,4}$

$$\begin{aligned}F(\mathcal{O}E_k^\kappa)(\alpha) &= \begin{pmatrix} F(-\Delta E_{jk}^\kappa + \kappa\partial_1 E_{jk}^\kappa + \partial_j E_{4k}^\kappa)_{j=1,2,3} \\ F(\partial_i E_{ik}^\kappa) \end{pmatrix}(\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} (|\alpha|^2 \hat{E}_{jk}^\kappa + \kappa i\alpha_1 \hat{E}_{jk}^\kappa + i\alpha_j \hat{E}_{4k}^\kappa)_{j=1,2,3} \\ i\alpha_i \hat{E}_{ik}^\kappa \end{pmatrix}(\alpha) \\ &= c(\delta_{jk})_{j=1,2,3,4}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dabei benutzen wir hier die Summenkonvention. Die letzte Gleichheit folgt aus

$$F\delta = c.$$

Skalare Multiplikation der ersten drei Gleichungen in (4.26) mit α ergibt nun

$$|\alpha|^2 \alpha_j \hat{E}_{jk}^\kappa + \kappa i \alpha_1 \alpha_j \hat{E}_{jk}^\kappa + i \alpha_j \alpha_j \hat{E}_{4k}^\kappa = c \alpha_k,$$

und wegen der vierten Gleichung in (4.26) (beachte $k < 4$) folgt

$$i|\alpha|^2 \hat{E}_{4k}^\kappa = c \alpha_k,$$

also

$$\hat{E}_{4k}^\kappa(\alpha) = -\frac{i c \alpha_k}{|\alpha|^2}.$$

Dieses Ergebnis setzen wir in (4.26) ein und erhalten für $j = 1, 2, 3$

$$\hat{E}_{jk}^\kappa(\alpha) = \delta_{jk} \frac{c|\alpha|^2}{|\alpha|^2(|\alpha|^2 + i\kappa\alpha_1)} - \frac{c\alpha_j\alpha_k}{|\alpha|^2(|\alpha|^2 + i\kappa\alpha_1)}.$$

Sei nun $k = 4$. Mit der gleichen Vorgehensweise erhalten wir wegen

$$i\alpha_i \hat{E}_{i4}^\kappa = c$$

die Gleichung

$$-i|\alpha|^2 c - i\kappa\alpha_1 c + i|\alpha|^2 \hat{E}_{44}^\kappa = 0,$$

also

$$\begin{aligned} \hat{E}_{44}^\kappa(\alpha) &= \frac{c(|\alpha|^2 + i\kappa\alpha_1)}{|\alpha|^2}, \\ \hat{E}_{j4}^\kappa(\alpha) &= -\frac{i c \alpha_j}{|\alpha|^2}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir E_{jk}^κ aus \hat{E}_{jk}^κ durch inverse Fouriertransformation. Aus Kapitel 2 ist bekannt, dass die Funktion $e_\kappa(x) = \frac{1}{4\pi|x|} \exp(-\frac{\kappa}{2}(|x| - x_1))$ Grundlösung für den skalaren Oseen-Operator $-\Delta + \kappa\partial_1$ darstellt, d.h., es gilt in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$

$$(-\Delta + \kappa\partial_1) \frac{1}{4\pi|x|} e^{-\kappa(|x|-x_1)/2} = \delta(x).$$

Wir definieren nun eine Funktion $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\Phi(s) := \frac{1}{4\pi\kappa} \int_0^{\kappa s/2} \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} d\xi, \quad s(x) := |x| - x_1.$$

Man rechnet leicht nach (vgl. Beweis von Lemma 4.9)

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(x) &= \frac{d^2\Phi(s)}{ds^2} |\nabla s(x)|^2 + \frac{d\Phi(s)}{ds} \Delta s(x) \\ &= \frac{1}{4\pi|x|} \left(s \frac{(\kappa s/2)e^{-\kappa s/2} + e^{-\kappa s/2} - 1}{\kappa s^2/2} + \frac{1 - e^{-\kappa s/2}}{\kappa s/2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi|x|} e^{-\kappa(|x|-x_1)/2}.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$(-\Delta + \kappa\partial_1)(\Delta\Phi) = \delta.$$

Es folgt

$$c = F\delta = F((-\Delta + \kappa\partial_1)(\Delta\Phi)) = (-i^2|\alpha|^2 + \kappa i\alpha_1) i^2|\alpha|^2 \hat{\Phi} = -|\alpha|^2(|\alpha|^2 + \kappa i\alpha_1)\hat{\Phi},$$

also

$$\hat{\Phi}(\alpha) = -\frac{c}{|\alpha|^2(|\alpha|^2 + \kappa i\alpha_1)}$$

und

$$F^{-1}\left(-\frac{c}{|\alpha|^2(|\alpha|^2 + \kappa i\alpha_1)}\right) = \Phi.$$

Somit gilt für $j, k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}E_{jk}^\kappa(x) &= F^{-1}\left(\hat{E}_{jk}^\kappa(\alpha)\right)(x) = F^{-1}\left(-\delta_{jk}|\alpha|^2\hat{\Phi}(\alpha) + \alpha_j\alpha_k\hat{\Phi}(\alpha)\right)(x) \\ &= \delta_{jk}\Delta F^{-1}(\hat{\Phi}(\alpha))(x) - \partial_j\partial_k F^{-1}(\hat{\Phi}(\alpha))(x) = (\delta_{jk}\Delta - \partial_j\partial_k)\Phi(x),\end{aligned}$$

wie behauptet. Mit der Grundlösung $e(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$ der Laplace-Gleichung, d.h., mit $-\Delta e(x) = \delta(x)$, gilt

$$|\alpha|^2\hat{e}(\alpha) = c \quad \Leftrightarrow \quad \hat{e}(\alpha) = \frac{c}{|\alpha|^2}.$$

Damit erhalten wir für $j = 4, k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}E_{4k}^\kappa(x) &= E_{k4}^\kappa(x) = F^{-1}\left(\hat{E}_{4k}^\kappa(\alpha)\right)(x) = F^{-1}\left(-\frac{ic\alpha_k}{|\alpha|^2}\right)(x) = -\partial_k F^{-1}\left(\frac{c}{|\alpha|^2}\right) \\ &= -\partial_k F^{-1}(\hat{e}(\alpha)) = -\partial_k e(x) = -\partial_k \frac{1}{4\pi|x|}.\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$E_{44}^\kappa(x) = F^{-1}\left(\hat{E}_{44}^\kappa(\alpha)\right)(x) = F^{-1}\left(c - \kappa\hat{E}_{14}^\kappa(\alpha)\right)(x) = \delta(x) - \kappa E_{14}^\kappa(x).$$

□

Wir zerlegen nun den Oseen-Fundamentaltensor in den Stokes-Fundamentaltensor und einen Restterm, der für $|x| \rightarrow 0$ beschränkt ist (siehe Lemma 4.9 und Lemma 4.13 sowie Pokorný in [Pok99]).

Lemma 4.9 Für $j, k = 1, 2, 3, 4$ gilt

$$E_{jk}^\kappa(x) = E_{jk}(x) + \tilde{E}_{jk}^\kappa(x) \quad (4.27)$$

mit

$$\tilde{E}_{jk}^\kappa(x) = \frac{d^2\Phi(s)}{ds^2} \left(\delta_{jk} \frac{2s}{r} - \frac{x_j x_k}{r^2} + \frac{\delta_{1j} x_k + \delta_{1k} x_j}{r} - \delta_{1j} \delta_{1k} \right) \quad (4.28)$$

$$+ \left(\frac{d\Phi(s)}{ds} - \frac{1}{8\pi} \right) \left(\delta_{jk} \frac{1}{r} + \frac{x_j x_k}{r^3} \right) \text{ für } j, k = 1, 2, 3,$$

$$\tilde{E}_{j4}^\kappa(x) = \tilde{E}_{4j}^\kappa(x) = 0 \text{ für } j = 1, 2, 3,$$

$$\tilde{E}_{44}^\kappa(x) = -\kappa \frac{x_1}{4\pi r^3}.$$

Dabei bezeichnet E_{jk} mit $j, k = 1, 2, 3, 4$ den Fundamentaltensor der Stokes-Gleichungen (vgl. (3.10)), Φ die in (4.23) definierte Funktion und $r = |x|$.

Beweis: Mit

$$\Delta\Phi(x) = \frac{d^2\Phi(s)}{ds^2} |\nabla s(x)|^2 + \frac{d\Phi(s)}{ds} \Delta s(x) \quad (4.29)$$

und

$$\partial_j \partial_k \Phi(x) = \frac{d^2\Phi(s)}{ds^2} \partial_j s(x) \partial_k s(x) + \frac{d\Phi(s)}{ds} \partial_j \partial_k s(x) \quad (4.30)$$

sowie

$$\partial_j s(x) = \frac{x_j}{r} - \delta_{1j}, \quad (4.31)$$

$$\partial_j \partial_k s(x) = \delta_{jk} \frac{1}{r} - \frac{x_j x_k}{r^3}, \quad (4.32)$$

$$|\nabla s(x)|^2 = \frac{2s}{r}, \quad (4.33)$$

$$\Delta s(x) = \frac{2}{r} \quad (4.34)$$

folgt aus (4.22), (4.24) sowie (4.25) die Behauptung, wobei der Fundamentaltensor E der Stokes-Gleichungen dazu addiert und wieder abgezogen wird. \square

Wir werden im Laufe dieser Arbeit hauptsächlich die Darstellung aus Lemma 4.9 verwenden, unter anderem bei der Betrachtung des asymptotischen Verhaltens des Fundamentaltensors bzw. zur Darstellung der Oberflächenpotentiale und Untersuchung ihrer Eigenschaften, weil es sich damit einfacher rechnen lässt und uns die bekannten Eigenschaften des Fundamentaltensors der Stokes-Gleichungen zur Verfügung stehen.

Als Nächstes beweisen wir einige Eigenschaften der oben verwendeten Funktion Φ .

Lemma 4.10 Die in Satz 4.8 definierte Funktion

$$\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(s) = \frac{1}{4\pi\kappa} \int_0^{\kappa s/2} \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} d\xi$$

ist eine C^∞ -Funktion und erfüllt die Abschätzungen

$$\left| \frac{d^n \Phi(s)}{ds^n} \right| \leq \frac{C_n}{(1+s)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.35)$$

für $s \in [0, \infty)$.

Beweis: Siehe [Fax29] S. 5. □

Mit der Reihendarstellung der Exponentialfunktion erhalten wir

$$\begin{aligned} 8\pi \frac{d\Phi(s)}{ds} &= \frac{1 - e^{-\kappa s/2}}{\kappa s/2} & (4.36) \\ &= \frac{2}{\kappa s} - \frac{2}{\kappa s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\kappa s}{2}\right)^n \frac{1}{n!} = \frac{2}{\kappa s} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\kappa s}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\kappa s}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\kappa s}{2}\right)^n \frac{1}{(n+1)!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\kappa s}{2}\right)^n \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} 8\pi \frac{d^2\Phi(s)}{ds^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\kappa s}{2}\right)^{n-1} \left(-\frac{\kappa}{2}\right) \frac{n}{(n+1)!} & (4.37) \\ &= -\frac{\kappa}{4} - \frac{\kappa}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\kappa s}{2}\right)^n \frac{n+1}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Damit können wir das nächste Lemma beweisen.

Lemma 4.11 Der Tensor E^0 stimmt mit dem Fundamentaltensor E der Stokes-Gleichungen überein.

Beweis: Mit den obigen Reihendarstellungen (4.36) und (4.37) der Ableitungen der Funktion Φ gilt

$$\left. \frac{\partial \Phi(s, \kappa)}{\partial s} \right|_{\kappa=0} = \frac{1}{8\pi}$$

sowie

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi(s, \kappa)}{\partial s^2} \right|_{\kappa=0} = 0.$$

Es folgt

$$\tilde{E}_{jk}^0(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $j, k = 1, 2, 3, 4$. Mit (4.28) gilt somit die Behauptung. \square

Lemma 4.12 *Für die Funktion Φ existiert eine Konstante $C > 0$ mit*

$$\left| \frac{d\Phi(s)}{ds} - \frac{1}{8\pi} \right| \leq Cs \quad (4.38)$$

für alle $s \geq 0$.

Beweis: Es gilt

$$\frac{d\Phi(s)}{ds} - \frac{1}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1 - e^{-\kappa s/2}}{\kappa s/2} - 1 \right).$$

Seien $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(s) := 1 - \alpha s - e^{-\alpha s}$ sowie $g(s) := \alpha s^2$, $\alpha > 0$. Sei $s \in (0, \infty)$. Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (0, s)$ mit

$$\frac{1 - \alpha s - e^{-\alpha s}}{\alpha s^2} = \frac{(e^{-\alpha \xi} - 1)}{2\xi}.$$

Weiterhin existiert mit dem Mittelwertsatz ein $\eta \in (0, \xi)$ mit

$$e^{-\alpha \xi} - 1 = -\alpha \xi e^{-\alpha \eta}.$$

Also gilt für $s > 0$

$$\left| \frac{1 - \alpha s - e^{-\alpha s}}{\alpha s^2} \right| = \left| \frac{e^{-\alpha \xi} - 1}{2\xi} \right| \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Folglich erhalten wir für $s > 0$ mit $\alpha = \frac{\kappa}{2}$ die Abschätzung

$$\left| \frac{d\Phi(s)}{ds} - \frac{1}{8\pi} \right| \leq \frac{\kappa}{8\pi} \frac{\kappa}{4} s.$$

Für $s = 0$ gilt diese Abschätzung ebenso, denn sowohl die linke als auch die rechte Seite sind gleich Null. Alternativ kann man das Lemma auch mit Hilfe der Reihendarstellung (4.36) beweisen. \square

Lemma 4.13 *Für die in Lemma 4.9 definierte Matrix \tilde{E}^κ gilt*

$$\tilde{E}_{jk}^\kappa(x) = O(1) \quad \text{für } |x| \rightarrow 0 \quad (4.39)$$

und alle $j, k = 1, 2, 3$.

Beweis: Für die Funktion $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x) = |x| - x_1$ aus Satz 4.8 gilt $s(x) \geq 0$ sowie $s(x) \leq 2|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Mit (4.35) und Lemma 4.12 folgt dann für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \left| \tilde{E}_{jk}^\kappa(x) \right| &\leq \frac{\hat{C}}{(1+s(x))^2} + \left| \frac{d\Phi(s)}{ds} - \frac{1}{8\pi} \right| \frac{2}{r} \\ &\leq \hat{C} + \tilde{C} \frac{s}{r} \leq C \end{aligned}$$

für $j, k = 1, 2, 3$. Es gibt also ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$\left| \tilde{E}_{jk}^\kappa(x) \right| \leq C \quad \text{für } |x| \rightarrow 0.$$

□

Mit Lemma 4.13 und aufgrund der Tatsache, dass der Druck E_{4j}^κ für $j = 1, 2, 3$ mit dem Druck E_{4j} übereinstimmt (siehe (3.10) und (4.24)) haben wir gezeigt, dass der Fundamentaltensor E^κ der Oseen-Gleichungen bis auf die Komponente E_{44}^κ bei $x = 0$ die gleiche Singularität wie der Fundamentaltensor E der Stokes-Gleichungen besitzt (vgl. [Lad69]). Nun betrachten wir das asymptotische Verhalten des Fundamentaltensors E^κ für $r \rightarrow \infty$. Dazu benötigen wir die in Definition 2.1 definierten Gewichtsfunktionen η_b^a bzw. μ_b^a .

Lemma 4.14 *Der Fundamentaltensor E^κ erfüllt für $|x| \rightarrow \infty$ die folgenden Abklingbedingungen:*

$$\begin{aligned} E^{\kappa ZS}(x) &= O(\eta_{-1}^{-1}(x)), \\ \partial_i E^{\kappa ZS}(x) &= O(\eta_{-3/2}^{-3/2}(x)), \quad i = 1, 2, 3, \\ \partial_{ij} E^{\kappa ZS}(x) &= O(\eta_{-2}^{-2}(x)), \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \partial_i^n E_{j4}^\kappa(x) &= O(|x|^{-(n+2)}), \quad i, j = 1, 2, 3, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beweis: Wir zeigen lediglich die ersten zwei Identitäten, die anderen werden analog bewiesen. Aus (4.22), (4.29) und (4.30) folgt zunächst für $j, k = 1, 2, 3$ die Darstellung

$$E_{jk}^\kappa(x) = \frac{d^2\Phi}{ds^2} (\delta_{jk} |\nabla s(x)|^2 - \partial_j s(x) \partial_k s(x)) + \frac{d\Phi}{ds} (\Delta s(x) - \partial_j \partial_k s(x)). \quad (4.40)$$

Mit den Identitäten (4.32) - (4.35) erhalten wir dann für alle $x \neq 0$

$$\left| E_{jk}^\kappa(x) \right| \leq C_1 \frac{s}{(1+s)^2 r} + C_2 \frac{1}{(1+s)r},$$

also

$$\left| E_{jk}^\kappa(x) \right| (1+r)(1+s) \leq C_1 \frac{s}{1+s} \frac{1+r}{r} + C_2 \frac{1+r}{r} \leq C \frac{1+r}{r} \leq 2C$$

für $r = |x| \geq 1$, d.h., die erste Behauptung gilt. Für die zweite Identität berechnen wir $\partial_i E_{jk}^\kappa$ für $i, j, k = 1, 2, 3$ und erhalten mit (4.32) bis (4.34) für $x \neq 0$ die Darstellung

$$\begin{aligned}
\partial_i E_{jk}^\kappa(x) &= \frac{d^3 \Phi}{ds^3} \partial_i s(x) \left(\delta_{jk} |\nabla s(x)|^2 - \partial_j s(x) \partial_k s(x) \right) \\
&\quad + \frac{d^2 \Phi}{ds^2} \left(\delta_{jk} \partial_i \frac{2s(x)}{r} - \partial_i \partial_k s(x) \partial_j s(x) - \partial_i \partial_j s(x) \partial_k s(x) \right) \\
&\quad + \frac{d^2 \Phi}{ds^2} \partial_i s(x) (\Delta s(x) - \partial_j \partial_k s(x)) \\
&\quad + \frac{d\Phi}{ds} \left(\partial_i \frac{2}{r} - \partial_i \left(\delta_{jk} \frac{1}{r} - \frac{x_j x_k}{r^3} \right) \right) \\
&= \frac{d^3 \Phi}{ds^3} \partial_i s(x) \left(\delta_{jk} |\nabla s(x)|^2 - \partial_j s(x) \partial_k s(x) \right) \\
&\quad + \frac{d^2 \Phi}{ds^2} \left(\delta_{jk} \frac{2\partial_i s(x)}{r} - \delta_{jk} \frac{2s(x)x_i}{r^3} - \partial_i \partial_k s(x) \partial_j s(x) - \partial_i \partial_j s(x) \partial_k s(x) \right) \\
&\quad + \frac{d^2 \Phi}{ds^2} \partial_i s(x) (\Delta s(x) - \partial_j \partial_k s(x)) \\
&\quad + \frac{d\Phi}{ds} \left(-\frac{2x_i}{r^3} + \frac{\delta_{jk} x_i}{r^3} + \frac{\delta_{ij} x_k + \delta_{ik} x_j}{r^3} - \frac{3x_j x_k x_i}{r^5} \right).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt mit (4.32) - (4.34) für $x \neq 0$ die Abschätzung

$$|\partial_i E_{jk}^\kappa(x)| \leq C_1 \frac{s^{3/2}}{(1+s)^{3r^{3/2}}} + C_2 \frac{s^{1/2}}{(1+s)^{2r^{3/2}}} + C_3 \frac{s}{(1+s)^{2r^2}} + C_4 \frac{1}{(1+s)r^2}.$$

Damit gilt wie oben

$$\begin{aligned}
|E_{jk}^\kappa(x)| (1+r)^{3/2} (1+s)^{3/2} &\leq C_1 \frac{s^{3/2}}{(1+s)^{3/2}} \frac{(1+r)^{3/2}}{r^{3/2}} + C_2 \frac{s^{1/2}}{(1+s)^{1/2}} \frac{(1+r)^{3/2}}{r^{3/2}} \\
&\quad + C_3 \frac{s^{1/2}}{(1+s)^{1/2}} \frac{(1+r)^{3/2}}{r^{3/2}} \frac{s^{1/2}}{r^{1/2}} + C_4 \frac{(1+s)^{1/2}}{r^{1/2}} \frac{(1+r)^{3/2}}{r^{3/2}} \\
&\leq C
\end{aligned}$$

für $r \geq 1$. Dabei haben wir hier die Abschätzung $s(x) \leq 2r$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ verwendet. \square

Analog leiten wir nun den Fundamentaltensor $E^{\kappa*}$ der adjungierten Oseen-Gleichungen her, stellen diesen in Abhängigkeit des Fundamentaltensors E^* der Stokes-Gleichungen dar (vgl. (3.11)) und geben dessen asymptotisches Verhalten für $r \rightarrow \infty$ an.

Satz 4.15 Die Lösung $E^{\kappa*} = (E_{jk}^{\kappa*})_{j,k=1,2,3,4}$ von

$$\mathcal{O}^* E^{\kappa*} = \delta I_4 \quad (4.41)$$

in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)^4$ besitzt die folgende Gestalt:

$$E_{jk}^{\kappa*}(x) := (\delta_{jk}\Delta - \partial_j\partial_k)\Phi(p(x)) \text{ für } j, k = 1, 2, 3 \quad (4.42)$$

mit

$$\Phi(p) = \frac{1}{4\pi\kappa} \int_0^{\kappa p/2} \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} d\xi, \quad p(x) = |x| + x_1, \quad (4.43)$$

und

$$E_{4k}^{\kappa*}(x) = E_{k4}^{\kappa*}(x) = \partial_k \frac{1}{4\pi|x|} \text{ für } k = 1, 2, 3, \quad (4.44)$$

sowie

$$E_{44}^{\kappa*}(x) = \delta(x) - \kappa E_{14}^{\kappa*}(x). \quad (4.45)$$

Wir nennen $E^{\kappa*}$ den Fundamentaltensor der adjungierten Oseen-Gleichungen.

Beweis: Analog zum Satz 4.8. □

Mit den Ableitungen der in (4.43) definierten Funktion p , nämlich

$$\begin{aligned} \partial_j p(x) &= \frac{x_j}{r} + \delta_{1j}, \\ \partial_j \partial_k p(x) &= \delta_{jk} \frac{1}{r} - \frac{x_j x_k}{r^3} = \partial_j \partial_k s(x), \\ |\nabla p(x)|^2 &= \frac{2p}{r}, \\ \Delta p(x) &= \frac{2}{r} = \Delta s(x), \end{aligned}$$

lässt sich eine zu (4.28) analoge Darstellung für den Fundamentaltensor der adjungierten Oseen-Gleichungen herleiten:

Lemma 4.16 Für $j, k = 1, 2, 3, 4$ gilt

$$E_{jk}^{\kappa*}(x) = E_{jk}^*(x) + \tilde{E}_{jk}^{\kappa*}(x) \quad (4.46)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{jk}^{\kappa*}(x) &= \frac{d^2\Phi(p)}{dp^2} \left(\delta_{jk} \frac{2p}{r} - \frac{x_j x_k}{r^2} - \frac{\delta_{1j} x_k + \delta_{1k} x_j}{r} - \delta_{1j} \delta_{1k} \right) \\ &\quad + \left(\frac{d\Phi(p)}{dp} - \frac{1}{8\pi} \right) \left(\delta_{jk} \frac{1}{r} + \frac{x_j x_k}{r^3} \right) \quad \text{für } j, k = 1, 2, 3, \\ \tilde{E}_{j4}^{\kappa*}(x) &= \tilde{E}_{4j}^{\kappa*}(x) = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, 3, \\ \tilde{E}_{44}^{\kappa*}(x) &= \kappa \frac{x_1}{4\pi r^3}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Dabei bezeichnet E_{jk}^* mit $j, k = 1, 2, 3, 4$ den Fundamentaltensor der adjungierten Stokes-Gleichungen (vgl. (3.11)), Φ die in (4.43) definierte Funktion, $p = r + x_1$ und $r = |x|$.

Lemma 4.17 *Der Fundamentaltensor $E^{\kappa*}$ erfüllt für $|x| \rightarrow \infty$ die folgenden Abklingbedingungen:*

$$\begin{aligned} E^{\kappa*ZS}(x) &= O(\mu_{-1}^{-1}(x)), \\ \partial_i E^{\kappa*ZS}(x) &= O(\mu_{-3/2}^{-3/2}(x)), \quad i = 1, 2, 3, \\ \partial_{ij} E^{\kappa*ZS}(x) &= O(\mu_{-2}^{-2}(x)), \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \partial_i^n E_{j4}^{\kappa*}(x) &= O(|x|^{-(n+2)}), \quad i, j = 1, 2, 3, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dabei ist die Gewichtsfunktion μ in Definition 2.1 definiert.

Für die Fundamentaltensoren E^κ , $E^{\kappa*}$ der Oseen-Gleichungen gelten die folgenden Eigenschaften:

Satz 4.18 *Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt*

$$\mathcal{O}_x E^\kappa(x - y) = \delta(x - y) I_4, \tag{4.48}$$

$$\mathcal{O}_x^* E^{\kappa*}(x - y) = \delta(x - y) I_4, \tag{4.49}$$

$$E^\kappa(x - y) = E^{\kappa*}(y - x), \quad x \neq y, \tag{4.50}$$

$$\mathcal{O}_y^* E^\kappa(x - y) = \delta(x - y) I_4, \tag{4.51}$$

$$\mathcal{O}_y E^{\kappa*}(x - y) = \delta(x - y) I_4. \tag{4.52}$$

Dabei werden die Operatoren \mathcal{O} und \mathcal{O}^* auf die Spalten der Matrizen E^κ und $E^{\kappa*}$ angewandt.

Beweis: Die Identitäten (4.48) und (4.49) folgen aus Satz 4.8 und Satz 4.15. Die Identitäten (4.51) und (4.52) folgen aus (4.50) und (4.49) bzw. (4.48). Wegen

$$s(x - y) = p(y - x)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt für die Restterme \tilde{E}^κ und $\tilde{E}^{\kappa*}$ in (4.28) und (4.47) die Beziehung

$$\tilde{E}^{\kappa ZS}(x - y) = \tilde{E}^{\kappa* ZS}(y - x) \quad \text{für } x \neq y.$$

Mit (3.11) folgt

$$E^{\kappa ZS}(x - y) = E^{\kappa* ZS}(y - x) \quad \text{für } x \neq y.$$

Außerdem erhalten wir für $j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} E_{j4}^{\kappa*}(y - x) &= E_{j4}^*(y - x) + \tilde{E}_{j4}^{\kappa*}(y - x) \stackrel{(3.11)}{=} -E_{j4}(y - x) + 0 \\ &= E_{j4}(x - y) = E_{j4}^\kappa(x - y) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} E_{44}^{\kappa*}(y - x) &= E_{44}^*(y - x) + \delta(y - x) + \kappa \frac{y_1 - x_1}{4\pi r^3} \\ &= \delta(x - y) - \kappa \frac{x_1 - y_1}{4\pi r^3} = E_{44}(x - y) + \tilde{E}_{44}^\kappa(x - y) = E_{44}^\kappa(x - y). \end{aligned}$$

□

4.4 Darstellungsformel

Mit Hilfe des Fundamentaltensors E^κ der Oseen-Gleichungen, der zweiten Greenschen Formel (4.8) für die Oseen-Operatoren und den zu den Stokes-Gleichungen gehörenden Darstellungsformeln (3.12), (3.13) können wir eine Darstellungsformel für die Lösungen der Oseen-Gleichungen herleiten.

Satz 4.19 (Darstellungsformel) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes C^2 -Gebiet und sei (\mathbf{u}, p) eine hinreichend glatte Lösung der inhomogenen Oseen-Gleichungen $\mathcal{O}_p^\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}$ in Ω mit einer in Ω integrierbaren Vektorfunktion \mathbf{f} , so gilt für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ die folgende Darstellung in $x \in \Omega$ ($k = 1, 2, 3$):*

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(y) \cdot (E_{jk}^\kappa)_{j=1,2,3}(x - y) dy \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \left(T_p^\kappa \mathbf{u} \mathbf{n} \right) (y) \cdot (E_{jk}^\kappa)_{j=1,2,3}(x - y) do_y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(y) \cdot \left(T_y^{\kappa*} (E_{jk}^\kappa)_{j=1,2,3,4} \right) (x - y) \mathbf{n}(y) do_y. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Für den Druck p erhalten wir analog die Darstellung

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(y) \cdot (E_{j4}^{\kappa})_{j=1,2,3}(x-y) dy \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega} (T^{\kappa} \mathbf{u}_p \mathbf{n})(y) \cdot (E_{j4}^{\kappa})_{j=1,2,3}(x-y) do_y \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(y) \cdot (T_y^{\kappa*} (E_{j4}^{\kappa})_{j=1,2,3,4})(x-y) \mathbf{n}(y) do_y.
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Bemerkung 4.20 Die Darstellungsformeln (4.53) und (4.54) lassen sich auch in der folgenden Vektorform schreiben:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} (x) &= \int_{\Omega} E^{\kappa S}(x-y) \mathbf{f}(y) dy \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega} E^{\kappa S}(x-y) (T^{\kappa} \mathbf{u}_p \mathbf{n})(y) do + \int_{\partial\Omega} (T_y^{\kappa*} E^{\kappa}(x-y) \mathbf{n}(y))^T \mathbf{u}(y) do_y.
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Dabei bezeichnet $E^{\kappa S}$ die durch Streichen der letzten Spalte in der Matrix E^{κ} entstandene 4×3 -Matrix. Den 4-dimensionalen Spaltenvektor $(T^{\kappa*} E^{\kappa} \mathbf{n})^T \mathbf{u}$ erhalten wir, indem wir zuerst den Operator $T^{\kappa*}$ auf E^{κ} spaltenweise anwenden, dann die entstandenen vier 3×3 -Matrizen mit dem Vektor \mathbf{n} multiplizieren und anschließend die so erhaltene 3×4 -Matrix transponieren und mit dem Spaltenvektor \mathbf{u} multiplizieren.

Beweis: [von Satz 4.19] Wir leiten zuerst die Darstellungsformel für die Geschwindigkeit her. Sei dazu $x \in \Omega$ beliebig und $K_{\epsilon} := K_{\epsilon}(x)$ eine Kugel um x mit Radius $\epsilon > 0$, so dass $\overline{K_{\epsilon}} \subset \Omega$ gilt. Sei $\Omega_{\epsilon} := \Omega \setminus \overline{K_{\epsilon}}$ (vgl. Abbildung 6). Wir wenden in Ω_{ϵ} die zweite

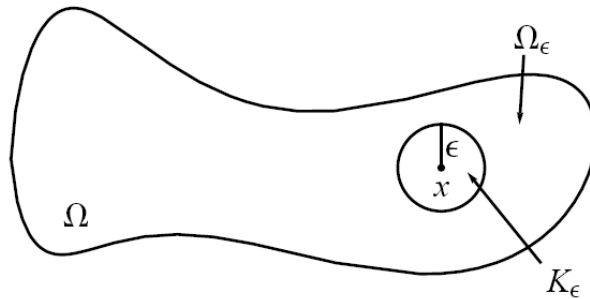


Abbildung 6:

Greensche Formel (4.8) an. Dabei setzen wir

$$\mathbf{v}(y) = (E_{jk}^{\kappa})_{j=1,2,3}(x-y), \quad q(y) = E_{4k}^{\kappa}(x-y)$$

für jedes $k = 1, 2, 3$. In Ω_ε erfüllen \mathbf{v} und q die benötigten Voraussetzungen ($\mathbf{v} \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})^3$, $q \in C^1(\overline{\Omega_\varepsilon})$, da $x - y \neq 0$ für alle $y \in \overline{\Omega_\varepsilon}$ gilt). Somit erhält man

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{f}(y) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (E_{jk}^\kappa)_j \\ E_{4k}^\kappa \end{pmatrix} (x - y) - \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} (y) \cdot \mathcal{O}_y^* \begin{pmatrix} (E_{jk}^\kappa)_j \\ E_{4k}^\kappa \end{pmatrix} (x - y) \right) dy \\
&= - \underbrace{\int_{\partial K_\varepsilon} T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{n}(y) \cdot (E_{jk}^\kappa)_j (x - y) do_y}_{=: I_2} + \underbrace{\int_{\partial K_\varepsilon} \mathbf{u}(y) \cdot T^* \begin{pmatrix} (E_{jk}^\kappa)_j \\ E_{4k}^\kappa \end{pmatrix} (x - y) \mathbf{n}(y) do_y}_{=: I_1} \\
&\quad - \underbrace{\int_{\partial K_\varepsilon} \kappa (\mathbf{u}(y) \cdot (E_{jk}^\kappa)_j (x - y)) n_1(y) do_y}_{=: I_3} \\
&\quad + \int_{\partial \Omega} \left(T^{\kappa \mathbf{u}} \mathbf{n}(y) \cdot (E_{jk}^\kappa)_j (x - y) - \mathbf{u}(y) \cdot T^{\kappa *} \begin{pmatrix} (E_{jk}^\kappa)_j \\ E_{4k}^\kappa \end{pmatrix} (x - y) \mathbf{n}(y) \right) do_y,
\end{aligned}$$

wobei hier die Definition der Operatoren T^κ und $T^{\kappa*}$ eingesetzt wurde (siehe (4.4) und (4.5)). Die Vorzeichen der Integrale I_1, I_2, I_3 ergeben sich daraus, dass die äußere Einheitsnormale ins Innere der Kugel zeigt. Der zweite Term im linken Integral verschwindet wegen (4.51). Wir zeigen nun, dass $I_2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, $I_3 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ und $I_1 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_k(x)$ gilt. Da der Fundamentaltensor E^κ das gleiche asymptotische Verhalten für $|x - y| \rightarrow 0$ wie der Fundamentaltensor der Stokes-Gleichungen besitzt, wie wir am Ende des Kapitels 4.3 bereits gezeigt haben, gilt analog zum Beweis der Darstellungsformel für die Stokes-Gleichungen $I_1 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_k(x)$ (vgl. [Odq30] S.336). Für das Integral I_3 gilt

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \int_{\partial K_\varepsilon} \kappa |(\mathbf{u}(y) \cdot (E_{jk}^\kappa)_j (x - y)) n_1(y)| do_y \\
&\leq \int_{\partial K_\varepsilon} \kappa |u_j(y)| |E_{jk}^\kappa(x - y)| do_y \\
&\leq \kappa \max_{j \in \{1, 2, 3\}} \max_{y \in \overline{\Omega}} |u_j(y)| \int_{\partial K_\varepsilon} (|E_{jk}(x - y)| + |\tilde{E}_{jk}^\kappa|) do_y \\
&= C_\varepsilon + \tilde{C}_\varepsilon \varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{u} \in C^2(\overline{\Omega})^3$ folgt analog $I_2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Somit ist die Darstellungsformel für die Geschwindigkeit bewiesen. Wir benutzen diese nun um die Darstellungsformel (4.54) für den Druck herzuleiten. Dazu lösen wir die Gleichung

$$\mathcal{O}_p^{\mathbf{u}}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}(x)$$

für $x \in \Omega$ nach ∇p auf und erhalten

$$\nabla p(x) = \mathbf{f}(x) - (-\Delta + k\partial_1)\mathbf{u}(x).$$

Verwenden wir für \mathbf{u} die Darstellung (4.53), so folgt

$$\begin{aligned} (\nabla p)^T(x) &= \mathbf{f}^T(x) - (-\Delta + \kappa \partial_{x_1}) \int_{\Omega} \mathbf{f}^T(y) E^{\kappa ZS}(x-y) dy \\ &\quad + (-\Delta + \kappa \partial_{x_1}) \int_{\partial\Omega} \left(T^{\kappa} \mathbf{u}_p \mathbf{n}(y) \right)^T E^{\kappa ZS}(x-y) do_y \\ &\quad - (-\Delta + \kappa \partial_{x_1}) \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^T(y) (T^{\kappa*} E^{\kappa S})(x-y) \mathbf{n}(y) do_y. \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir hier die Schreibweise aus Bemerkung (4.20). Als Nächstes wollen wir die rechte Seite umformen und gehen dabei wie folgt vor: Wir falten die Gleichung

$$(-\Delta + \kappa \partial_{x_1}) E^{\kappa ZS}(x) + \nabla (E_{4k}^{\kappa})_{k=1,2,3}(x) = I_3 \delta(x) \quad \text{für } x \in \Omega,$$

die den ersten drei Gleichungen der Identität (4.21) entspricht, mit \mathbf{f}^T und erhalten

$$\mathbf{f}^T(x) = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T(y) (-\Delta_x + \kappa \partial_{x_1}) E^{\kappa ZS}(x-y) dy + \int_{\Omega} \mathbf{f}^T(y) \nabla_x (E_{4k}^{\kappa})_{k=1,2,3}(x-y) dy, \quad (4.56)$$

wobei hier die Faltung spaltenweise erfolgt. Wegen

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} E_{4k}^{\kappa}(x-y) &= \partial_{x_j} \frac{x_k - y_k}{r^3} = -3 \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^5} + \frac{1}{r^3} \delta_{jk} \\ &= \partial_{x_k} \frac{x_j - y_j}{r^3} = \partial_{x_k} E_{4j}^{\kappa}(x-y) \end{aligned} \quad (4.57)$$

für alle $j, k = 1, 2, 3$ und alle $x \neq y$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^T(y) \nabla_x (E_{4k}^{\kappa})_{k=1,2,3}(x-y) &= (f_j(y) \partial_{x_j} E_{4k}^{\kappa}(x-y))_{k=1,2,3} \\ &= (f_j(y) \partial_{x_k} E_{4j}^{\kappa}(x-y))_{k=1,2,3} \\ &= \nabla_{x_k}^T \mathbf{f}^T(y) (E_{4k}^{\kappa})_{k=1,2,3}(x-y), \end{aligned}$$

also

$$\mathbf{f}^T(x) - (-\Delta_x + \kappa \partial_{x_1}) \int_{\Omega} \mathbf{f}^T(y) E^{\kappa ZS}(x-y) dy = \nabla_x^T \int_{\Omega} \mathbf{f}^T(y) (E_{4k}^{\kappa})_{k=1,2,3}(x-y) dy.$$

Analog folgt durch die Faltung der obigen Gleichung mit der Funktion $T^{\kappa} \mathbf{u}_p \mathbf{n}$ für $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \int_{\partial\Omega} \left(T^{\kappa} \mathbf{u}_p \mathbf{n} \right)^T(y) (-\Delta_x + \kappa \partial_{x_1}) E^{\kappa ZS}(x-y) do_y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \left(T^{\kappa} \mathbf{u}_p \mathbf{n} \right)^T(y) \nabla_x (E_{4k}^{\kappa})_{k=1,2,3}(x-y) do_y, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} & (-\Delta_x + \kappa \partial_{x_1}) \int_{\partial\Omega} \left(T^{\kappa} \frac{\mathbf{u}}{p} \mathbf{n} \right)^T (y) E^{\kappa Z S}(x-y) \, do_y \\ &= \nabla_x^T \int_{\partial\Omega} \left(T^{\kappa} \frac{\mathbf{u}}{p} \mathbf{n} \right)^T (y) (E_{4k}^{\kappa})_{k=1,2,3}(x-y) \, do_y, \end{aligned}$$

wobei die linke Seite gleich Null ist wegen $x \neq y$ für alle $x \in \Omega$ und $y \in \partial\Omega$. Somit können wir die drei ersten Summanden in der gewünschten Form schreiben. Schließlich betrachten wir den letzten Summanden. Wegen (4.21), (4.57) und wegen der Symmetrie des Fundamentaltensors gilt

$$(-\Delta_x + \kappa \partial_{x_1}) E^{\kappa S}(x-y) = -\nabla_x^T (E_{k4}^{\kappa})_{k=1,2,3,4}(x-y)$$

und somit

$$\begin{aligned} & -(-\Delta + \kappa \partial_{x_1}) \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^T(y) (T^{\kappa*} E^{\kappa S}(x-y) \mathbf{n}(y)) \, do_y \\ &= -\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^T(y) (T^{\kappa*} (-\Delta + \kappa \partial_{x_1}) E^{\kappa S}(x-y) \mathbf{n}(y)) \, do_y \\ &= \nabla_x^T \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^T(y) (T^{\kappa*} E^{\kappa S}(x-y) \mathbf{n}(y)) \, do_y. \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla_x^T p(x) &= \nabla_x^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{f}(y) \cdot (E_{j4}^{\kappa})_{j=1,2,3}(x-y) \, dy \right. \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \left(T^{\kappa} \frac{\mathbf{u}}{p} \mathbf{n} \right) (y) \cdot (E_{j4}^{\kappa})_{j=1,2,3}(x-y) \, do_y \\ &\quad \left. + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(y) \cdot \left(T_y^{\kappa*} \begin{pmatrix} E_{j4}^{\kappa} \\ E_{44}^{\kappa} \end{pmatrix}_{j=1,2,3} \right) (x-y) \mathbf{n}(y) \, do_y \right). \end{aligned}$$

□

Korollar 4.21 *Unter den gleichen Voraussetzungen wie im Satz 4.19 gilt für $x \notin \bar{\Omega}$*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} &= \int_{\Omega} E^{\kappa S}(x-y) \mathbf{f}(y) \, dy - \int_{\partial\Omega} E^{\kappa Z}(x-y) \left(T^{\kappa} \frac{\mathbf{u}}{p} \mathbf{n} \right) (y) \, do_y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (T_y^{\kappa*} E^{\kappa}(x-y) \mathbf{n}(y))^T \mathbf{u}(y) \, do_y. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Beweis: Für $x \notin \bar{\Omega}$ dürfen wir die zweite Greensche Formel auf die Funktionen (\mathbf{u}, p) sowie $(\mathbf{v}, q) = E^{\kappa S}$ anwenden, da in diesem Fall keine Singularitäten auftreten. Dies impliziert mit $\mathcal{O}_y^* E^{\kappa S}(x-y) = \mathbf{0}$ für $x \neq y$ die Behauptung. □

5 Flächenpotentiale

In Analogie zur hydrodynamischen Potentialtheorie definieren wir in diesem Kapitel das Einfach- bzw. das Doppelschichtpotential sowie die Oseen-Normalspannungen des Einfachschichtpotentials für die beiden Oseen-Operatoren und betrachten deren Eigenschaften.

5.1 Definition und Eigenschaften

Definition 5.1 Sei $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$. Dann heißt die Vektorfunktion

$$\mathbf{E}^\kappa \Psi : \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{E}^\kappa \Psi(x) := \int_{\partial\Omega} E^{\kappa S}(x-y) \Psi(y) \, do_y \quad (5.1)$$

Einfachschichtpotential für den Oseen-Operator mit Belegung Ψ . Mit

$$\mathbf{E}^{\kappa \bullet} \Psi : \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{E}^{\kappa \bullet} \Psi(x) := \int_{\partial\Omega} E^{\kappa SZ}(x-y) \Psi(y) \, do_y$$

bezeichnen wir seinen Geschwindigkeitsanteil. Die Vektorfunktion

$$\mathbf{D}^\kappa \Psi : \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{D}^\kappa \Psi(x) := \int_{\partial\Omega} D^\kappa(x,y) \Psi(y) \, do_y \quad (5.2)$$

mit der 4×3 -Matrix

$$D^\kappa(x,y) := (T_y^{\kappa*} E^\kappa(x-y) \mathbf{n}(y))^T$$

heißt Doppelschichtpotential für den Oseen-Operator mit Belegung Ψ . Den Spannungstensor $T^{\kappa*}$ haben wir in (4.5) definiert. Mit

$$\mathbf{D}^{\kappa \bullet} \Psi : \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{D}^{\kappa \bullet} \Psi(x) := \int_{\partial\Omega} D^{\kappa Z}(x,y) \Psi(y) \, do_y$$

bezeichnen wir den Geschwindigkeitsanteil von $\mathbf{D}^\kappa \Psi$.

Lemma 5.2 Für die Matrix D^κ aus Definition 5.1 gilt für $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \partial\Omega$, $x \neq y$

$$D^\kappa(x,y) = (D_{kj}^\kappa(x,y))_{k=1,2,3,4; j=1,2,3}$$

mit

$$\begin{aligned} D_{kj}^\kappa(x,y) &= \partial_{x_i} E_{jk}^\kappa(x-y) n_i(y) + \partial_{x_j} E_{ik}^\kappa(x-y) n_i(y) \\ &\quad - E_{4k}^\kappa(x-y) \delta_{ij} n_i(y) - \frac{\kappa}{2} E_{jk}^\kappa(x-y) \delta_{i1} n_i(y). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \partial\Omega$, $x \neq y$ gilt zunächst

$$\begin{aligned}
T_y^{\kappa*} E^\kappa(x-y) &= T_y^* E^\kappa(x-y) - \frac{\kappa}{2} (E^{\kappa Z}(x-y), \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= -\nabla_y E^{\kappa Z}(x-y) - (\nabla_y E^{\kappa Z}(x-y))^T - (E_{4k}^\kappa(x-y) I_3)_{k=1,2,3} \\
&\quad - \frac{\kappa}{2} (E^{\kappa Z}(x-y), \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= \nabla_x E^{\kappa Z}(x-y) + (\nabla_x E^{\kappa Z}(x-y))^T - (E_{4k}^\kappa(x-y) I_3)_{k=1,2,3} \\
&\quad - \frac{\kappa}{2} (E^{\kappa Z}(x-y), \mathbf{0}, \mathbf{0}).
\end{aligned}$$

Dabei wird der Differentialoperator $T_y^{\kappa*}$ spaltenweise auf den Fundamentaltensor angewandt, wobei wir bei dem letzten Summanden jede der vier Spalten von $E^{\kappa Z}$ zu einer 3×3 -Matrix mit Nullen ergänzen, d.h., der letzte Summand stellt die folgenden vier 3×3 -Matrizen dar:

$$(E^{\kappa Z}(x-y), \mathbf{0}, \mathbf{0}) = [(E_{jk}^\kappa)_{j=1,2,3}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]_{k=1,2,3,4}.$$

Multiplikation der oben erhaltenen vier 3×3 -Matrizen mit der äußeren Einheitsnormalen \mathbf{n} ergibt nun die folgende 3×4 -Matrix:

$$\begin{aligned}
T_y^{\kappa*} E^\kappa(x-y) \mathbf{n}(y) &= \left(\partial_{x_i} E_{jk}^\kappa(x-y) n_i(y) + \partial_{x_j} E_{ik}^\kappa(x-y) n_i(y) \right. \\
&\quad \left. - E_{4k}^\kappa(x-y) \delta_{ij} n_i(y) - \frac{\kappa}{2} E_{jk}^\kappa(x-y) \delta_{i1} n_i(y) \right)_{j=1,2,3; k=1,2,3,4}.
\end{aligned}$$

Das Vertauschen der Zeilen und Spalten liefert dann die gesuchte 4×3 -Matrix D^κ . \square

Definition 5.3 Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine Umgebung von $\partial\Omega$ und $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$. Dann heißt $H^{\kappa\bullet}\Psi : U \setminus \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\begin{aligned}
H^{\kappa\bullet}\Psi(x) &:= T_x^\kappa(\mathbf{E}^\kappa\Psi(x)) \mathbf{n}(x') = \int_{\partial\Omega} T_x^\kappa(E^{\kappa S}(x-y)\Psi(y)) \mathbf{n}(x') do_y \quad (5.4) \\
&=: \int_{\partial\Omega} H^\kappa(x, y)\Psi(y) do_y,
\end{aligned}$$

Oseen-Normalspannungen des Einfachschichtpotentials. Dabei ist x' die eindeutig bestimmte Projektion von $x \in U$ auf $\partial\Omega$ und $\mathbf{n}(x')$ die ins Äußere von Ω weisende Einheitsnormale in $x' \in \partial\Omega$.

Lemma 5.4 Für die Matrix H^κ aus der Definition 5.3 gilt für $x \in U$, $y \in \partial\Omega$ mit $x \neq y$ die Darstellung

$$H^\kappa(x, y) = (H_{ki}^\kappa(x, y))_{k,i=1,2,3}$$

mit

$$\begin{aligned}
H_{ki}^\kappa(x, y) &= -\partial_{x_j} E_{ki}^\kappa(x-y) n_j(x') - \partial_{x_k} E_{ji}^\kappa(x-y) n_j(x') \quad (5.5) \\
&\quad + E_{4i}^\kappa(x-y) \delta_{jk} n_j(x') + \frac{\kappa}{2} E_{ki}^\kappa(x-y) \delta_{j1} n_j(x').
\end{aligned}$$

Beweis: Sei $x \in U$, $y \in \partial\Omega$ mit $x \neq y$ und $k = 1, 2, 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& (T_x^\kappa(E^{\kappa S}(x-y)\Psi(y))\mathbf{n}(x'))_k \\
&= \left(T_x(E^{\kappa S}(x-y)\Psi(y))\mathbf{n}(x') + \frac{\kappa}{2} \left((E^{\kappa SZ}(x-y)\Psi(y)), \mathbf{0}, \mathbf{0} \right) \mathbf{n}(x') \right)_k \\
&= \left(-\partial_{x_j}(E_{ki}^\kappa(x-y)\Psi_i(y))n_j(x') - \partial_{x_k}(E_{ji}^\kappa(x-y)\Psi_i(y))n_j(x') \right. \\
&\quad \left. + E_{4i}^\kappa(x-y)\Psi_i(y)\delta_{kj}n_j(x') + \frac{\kappa}{2}E_{ki}^\kappa(x-y)\Psi_i(y)\delta_{j1}n_j(x') \right)_k \\
&= \left(-\partial_{x_j}E_{ki}^\kappa(x-y)n_j(x')\Psi_i(y) - \partial_{x_k}E_{ji}^\kappa(x-y)n_j(x')\Psi_i(y) \right. \\
&\quad \left. + E_{4i}^\kappa(x-y)\delta_{jk}n_j(x')\Psi_i(y) + \frac{\kappa}{2}E_{ki}^\kappa(x-y)\delta_{j1}n_j(x')\Psi_i(y) \right)_k \\
&=: (H_{ki}^\kappa(x, y)\Psi_i(y))_k
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
H_{ki}^\kappa(x, y) &= -\partial_{x_j}E_{ki}^\kappa(x-y)n_j(x') - \partial_{x_k}E_{ji}^\kappa(x-y)n_j(x') \\
&\quad + E_{4i}^\kappa(x-y)\delta_{jk}n_j(x') + \frac{\kappa}{2}E_{ki}^\kappa(x-y)\delta_{j1}n_j(x')
\end{aligned}$$

für $i = 1, 2, 3$, wie behauptet. \square

Die Potentiale $\mathbf{E}^\kappa\Psi$ und $\mathbf{D}^\kappa\Psi$ lösen die Oseen-Gleichungen, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 5.5 Die Potentiale $\mathbf{E}^\kappa\Psi$ und $\mathbf{D}^\kappa\Psi$ sind aus $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)^4$ und es gilt

$$\mathcal{O}\mathbf{E}^\kappa\Psi(x) = \mathcal{O}\mathbf{D}^\kappa\Psi(x) = \mathbf{0}$$

in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$.

Beweis: Da die Funktion $\Phi \circ s$ (vgl. (4.23)) für $x \neq y$ eine C^∞ -Funktion ist, dürfen wir Differentiation und Integration vertauschen, d.h., es gilt

$$\mathcal{O}\mathbf{E}^\kappa\Psi(x) = \int_{\partial\Omega} \mathcal{O}_x E^{\kappa S}(x-y)\Psi(y) \, do_y \stackrel{(4.48)}{=} \mathbf{0},$$

$$\mathcal{O}\mathbf{D}^\kappa\Psi(x) = \int_{\partial\Omega} (T_y^{\kappa*} \mathcal{O}_x E^\kappa(x-y)\mathbf{n}(y))^T \Psi(y) \, do_y \stackrel{(4.48)}{=} \mathbf{0}.$$

\square

Um die Untersuchung des Verhaltens der Potentiale $\mathbf{E}^{\kappa\bullet}\Psi$, $\mathbf{D}^{\kappa\bullet}\Psi$, $\mathbf{H}^{\kappa\bullet}\Psi$ beim Durchgang durch den Rand zu erleichtern, stellen wir diese analog zum skalaren Fall (siehe Kapitel 2) mit Hilfe von Lemma 4.9 als Summe der entsprechenden Potentiale $\mathbf{E}^\bullet\Psi$, $\mathbf{D}^\bullet\Psi$, $\mathbf{H}^\bullet\Psi$ des Stokes-Systems (siehe Kapitel 3) und eines Restterms dar. Dabei werden wir sehen, dass die Restterme wie auch im skalaren Fall stetige Funktionen sind.

Satz 5.6

- (i) Für den Geschwindigkeitsanteil $\mathbf{E}^{\kappa \bullet \Psi}$ des Einfachschichtpotentials gilt die Darstellung

$$\mathbf{E}^{\kappa \bullet \Psi} = \mathbf{E}^{\bullet \Psi} + \tilde{\mathbf{E}}^{\kappa \bullet \Psi} \quad (5.6)$$

mit der stetigen Funktion $\tilde{\mathbf{E}}^{\kappa \bullet \Psi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\tilde{\mathbf{E}}^{\kappa \bullet \Psi}(x) := \int_{\partial\Omega} \tilde{E}^{\kappa SZ}(x-y) \Psi(y) \, do_y. \quad (5.7)$$

Dabei bezeichnet die Funktion $\mathbf{E}^{\bullet \Psi}$ den Geschwindigkeitsanteil des Einfachschichtpotentials der Stokes-Gleichungen (siehe (3.15)).

- (ii) Der Druckanteil $(\mathbf{E}^{\kappa \Psi})_4$ des Einfachschichtpotentials der Oseen-Gleichungen stimmt mit dem Druckanteil $(\mathbf{E}^{\Psi})_4$ des Einfachschichtpotentials der Stokes-Gleichungen überein.

Beweis:

- (i) Mit der oben hergeleiteten Darstellung (4.28) des Fundamentaltensors E^{κ} erhalten wir für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$

$$\tilde{\mathbf{E}}^{\kappa \bullet \Psi}(x) = \int_{\partial\Omega} \tilde{E}^{\kappa SZ}(x-y) \Psi(y) \, do_y.$$

Mit Lemma 4.13 und da Ψ eine stetige Funktion auf einem Kompaktum ist, gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$\left| \tilde{E}^{\kappa SZ}(x-y) \Psi(y) \right| \leq C \quad \text{für } x \neq y,$$

d.h., der Integrand ist beschränkt. Mit Satz 1.2 ist die Stetigkeit der Funktion $\tilde{\mathbf{E}}^{\kappa \bullet \Psi}$ somit gezeigt.

- (ii) Folgt direkt aus der Definition des Einfachschichtpotentials (5.1) sowie der Darstellung (4.28) des Fundamentaltensors E^{κ} .

□

Um das Doppelschichtpotential $\mathbf{D}^{\kappa \bullet \Psi}$ bzw. die Oseen-Normalspannungen $\mathbf{H}^{\kappa \bullet \Psi}$ des Einfachschichtpotentials analog mit Hilfe des Doppelschichtpotentials $\mathbf{D}^{\bullet \Psi}$ bzw. der Normalspannungen $\mathbf{H}^{\bullet \Psi}$ des Einfachschichtpotentials der Stokes-Gleichungen darzustellen, zerlegen wir den Kern D^{κ} bzw. H^{κ} in die Kerne der entsprechenden Stokes-Potentiale und in Restterme, die sich wie $O(|x-y|^{-1})$ für $|x-y| \rightarrow 0$ verhalten.

Lemma 5.7 *Es gelten folgende Darstellungen:*

(i) Für die Funktion $D^{\kappa Z} : \mathbb{R}^3 \times \partial\Omega \setminus \{(y, y), y \in \partial\Omega\} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ aus Definition 5.1 gilt die Darstellung

$$D^{\kappa Z}(x, y) = D^Z(x, y) + \tilde{D}^{\kappa Z}(x, y)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{kj}^{\kappa}(x, y) &:= \partial_{x_i} \tilde{E}_{jk}^{\kappa}(x - y) n_i(y) + \partial_{x_j} \tilde{E}_{ik}^{\kappa}(x - y) n_i(y) \\ &\quad - \frac{\kappa}{2} \left(E_{jk}(x - y) + \tilde{E}_{jk}^{\kappa}(x - y) \right) \delta_{i1} n_i(y) \end{aligned}$$

für $k, j = 1, 2, 3$. Dabei ist D^Z in (3.22) definiert.

(ii) Für die Funktion $D_{4j}^{\kappa} : \mathbb{R}^3 \times \partial\Omega \setminus \{(y, y), y \in \partial\Omega\} \rightarrow \mathbb{R}$ für $j = 1, 2, 3$ aus Definition 5.1 gilt die Darstellung

$$D_{4j}^{\kappa}(x, y) = D_{4j}(x, y) + \tilde{D}_{4j}^{\kappa}(x, y)$$

mit

$$\tilde{D}_{4j}^{\kappa}(x, y) = -\tilde{E}_{44}^{\kappa}(x - y) \delta_{ij} n_i(y) - \frac{\kappa}{2} E_{j4}(x - y) \delta_{i1} n_i(y).$$

(iii) Für die Funktion $H^{\kappa} : (U \times \partial\Omega) \setminus \{(y, y), y \in \partial\Omega\} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ aus Definition 5.3 gilt die Darstellung

$$H^{\kappa}(x, y) = H(x, y) + \tilde{H}^{\kappa}(x, y)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{ki}^{\kappa}(x, y) &:= -\partial_{x_j} \tilde{E}_{ki}^{\kappa}(x - y) n_j(x') - \partial_{x_k} \tilde{E}_{ji}^{\kappa}(x - y) n_j(x') \\ &\quad + \frac{\kappa}{2} \left(E_{ki}(x - y) + \tilde{E}_{ki}^{\kappa}(x - y) \right) \delta_{j1} n_j(x') \end{aligned}$$

für $k, i = 1, 2, 3$. Dabei ist H in (3.31) definiert.

Beweis:

(i) Mit Lemma 5.2 gilt für $j, k = 1, 2, 3$, $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \partial\Omega$ mit $x \neq y$

$$\begin{aligned} D_{kj}^{\kappa}(x, y) &= \partial_{x_i} E_{jk}^{\kappa}(x - y) n_i(y) + \partial_{x_j} E_{ik}^{\kappa}(x - y) n_i(y) \\ &\quad - E_{4k}^{\kappa}(x - y) \delta_{ij} n_i(y) - \frac{\kappa}{2} E_{jk}^{\kappa}(x - y) \delta_{i1} n_i(y). \end{aligned}$$

Einsetzen des Fundamentaltensors E^{κ} in der Darstellung (4.28) liefert für $j, k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} D_{kj}^{\kappa}(x, y) &= \partial_{x_i} E_{jk}(x - y) n_i(y) + \partial_{x_j} E_{ik}(x - y) n_i(y) - E_{4k}(x - y) \delta_{ij} n_i(y) \\ &\quad + \partial_{x_i} \tilde{E}_{jk}^{\kappa}(x - y) n_i(y) + \partial_{x_j} \tilde{E}_{ik}^{\kappa}(x - y) n_i(y) \\ &\quad - \frac{\kappa}{2} \left(E_{jk}(x - y) + \tilde{E}_{jk}^{\kappa}(x - y) \right) \delta_{i1} n_i(y) \\ &=: D_{kj}(x, y) + \tilde{D}_{kj}^{\kappa}(x, y) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{kj}^\kappa(x, y) &= \left(\partial_{x_i} \tilde{E}_{jk}^\kappa(x - y) + \partial_{x_j} \tilde{E}_{ik}^\kappa(x - y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\kappa}{2} \left(E_{jk}(x - y) + \tilde{E}_{jk}^\kappa(x - y) \right) \delta_{i1} \right) n_i(y) \end{aligned} \quad (5.8)$$

(vgl. (3.22)).

- (ii) Mit Lemma 5.2, Lemma 4.9 sowie (3.22) folgt die Behauptung, denn für $j = 1, 2, 3$, $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \partial\Omega$ mit $x \neq y$ gilt

$$\begin{aligned} D_{4j}^\kappa(x, y) &= \partial_{x_i} E_{j4}^\kappa(x - y) n_i(y) + \partial_{x_j} E_{i4}^\kappa(x - y) n_i(y) \\ &\quad - E_{44}^\kappa(x - y) \delta_{ij} n_i(y) - \frac{\kappa}{2} E_{j4}^\kappa(x - y) \delta_{i1} n_i(y) \\ &= \partial_{x_i} E_{j4}(x - y) n_i(y) + \partial_{x_j} E_{i4}(x - y) n_i(y) \\ &\quad - E_{44}(x - y) \delta_{ij} n_i(y) - \tilde{E}_{44}^\kappa(x - y) \delta_{ij} n_i(y) - \frac{\kappa}{2} E_{j4}(x - y) \delta_{i1} n_i(y) \\ &= D_{4j}(x, y) + \tilde{D}_{4j}^\kappa(x, y) \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{D}_{4j}^\kappa(x, y) = -\tilde{E}_{44}^\kappa(x - y) \delta_{ij} n_i(y) - \frac{\kappa}{2} E_{j4}(x - y) \delta_{i1} n_i(y).$$

- (iii) Einsetzen der Darstellung (4.28) in (5.5) liefert für $k, i = 1, 2, 3$, $x \in U$, $y \in \partial\Omega$ mit $x \neq y$

$$\begin{aligned} H_{ki}^\kappa(x, y) &= -\partial_{x_j} E_{ki}(x - y) n_j(x') - \partial_{x_k} E_{ji}(x - y) n_j(x') + E_{4i}(x - y) \delta_{jk} n_j(x') \\ &\quad - \partial_{x_j} \tilde{E}_{ki}^\kappa(x - y) n_j(x') - \partial_{x_k} \tilde{E}_{ji}^\kappa(x - y) n_j(x') \\ &\quad + \frac{\kappa}{2} \left(E_{ki}(x - y) + \tilde{E}_{ki}^\kappa(x - y) \right) \delta_{j1} n_j(x') \\ &=: H_{ki}(x, y) + \tilde{H}_{ki}^\kappa(x, y) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{ki}^\kappa(x, y) &= \left(-\partial_{x_j} \tilde{E}_{ki}^\kappa(x - y) - \partial_{x_k} \tilde{E}_{ji}^\kappa(x - y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa}{2} \left(E_{ki}(x - y) + \tilde{E}_{ki}^\kappa(x - y) \right) \delta_{j1} \right) n_j(x') \end{aligned}$$

(vgl. (3.31)). Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Lemma 5.8 *Für alle $k, j = 1, 2, 3$ existieren $C_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), so dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \partial\Omega$, $x \neq y$ gilt*

$$\tilde{D}_{kj}^\kappa(x, y) \leq C_1 \frac{1}{|x - y|} + C_2 \frac{1}{|x - y|} \left(\frac{1}{(1 + s)} + \frac{1}{(1 + s)^2} \right) + C_3 \frac{1}{(1 + s)^2} + C_4 \frac{1}{(1 + s)^3}.$$

Beweis: Mit der expliziten Darstellung von \tilde{D}_{kj}^κ (siehe Lemma 8.1 im Anhang) sowie mit (4.35) und (4.38) folgt die Behauptung. \square

Satz 5.9 Für den Geschwindigkeitsanteil $D^{\kappa\bullet}\Psi$ des Doppelschichtpotentials gilt die Darstellung

$$D^{\kappa\bullet}\Psi = D^\bullet\Psi + \tilde{D}^{\kappa\bullet}\Psi \quad (5.9)$$

mit der stetigen Funktion $\tilde{D}^{\kappa\bullet}\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\tilde{D}^{\kappa\bullet}\Psi(x) := \int_{\partial\Omega} \tilde{D}^{\kappa Z}(x, y)\Psi(y) do_y. \quad (5.10)$$

Dabei ist die Matrix \tilde{D}^κ in Lemma 5.7 definiert, und $D^\bullet\Psi$ bezeichnet den Geschwindigkeitsanteil des Stokes-Doppelschichtpotentials (siehe (3.19)).

Beweis: Die Darstellung (5.9) erhält man direkt aus Lemma 5.7(i). Mit Lemma 5.8 folgt für $k, j = 1, 2, 3$

$$\tilde{D}_{kj}^\kappa(x, y) \leq C \frac{1}{|x - y|}, \quad C > 0 \quad (5.11)$$

für $|x - y| \rightarrow 0$. Somit genügt der Kern von $\tilde{D}^{\kappa\bullet}\Psi$ der Bedingung (1.3) und die Funktion $\tilde{D}^{\kappa\bullet}\Psi$ ist mit Satz 1.2 stetig. \square

Satz 5.10 Für die in Definition 5.3 definierten Oseen-Normalspannungen $H^{\kappa\bullet}\Psi$ des Einzelschichtpotentials gilt die Darstellung

$$H^{\kappa\bullet}\Psi = H^\bullet\Psi + \tilde{H}^{\kappa\bullet}\Psi \quad (5.12)$$

mit der stetigen Funktion $\tilde{H}^{\kappa\bullet}\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\tilde{H}^{\kappa\bullet}\Psi(x) := \int_{\partial\Omega} \tilde{H}^\kappa(x, y)\Psi(y) do_y. \quad (5.13)$$

Dabei ist die Matrix \tilde{H}^κ in Lemma 5.7 definiert, und $H^\bullet\Psi$ bezeichnet die Normalspannungen des Stokes-Einzelschichtpotentials (siehe (3.29)).

Beweis: Die Darstellung (5.12) folgt direkt aus Lemma 5.7(iii). Analog zum Beweis von Satz 5.9 wird

$$\tilde{H}^\kappa(x, y) = O(|x - y|^{-1}) \quad \text{für } |x - y| \rightarrow 0 \quad (5.14)$$

bewiesen. Somit genügt der Kern von $\tilde{H}^{\kappa\bullet}\Psi$ ebenso der Bedingung (1.3) und $\tilde{H}^{\kappa\bullet}\Psi$ ist daher mit Satz 1.2 stetig. \square

Satz (5.6), Satz (5.9) und Satz (5.10) implizieren das gleiche Verhalten der Flächenpotentiale der Oseen-Gleichungen beim Durchgang durch den Rand wie die entsprechenden Flächenpotentiale der Stokes-Gleichungen.

Satz 5.11 Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine Umgebung von $\partial\Omega$. Sei $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$. Dann gilt

(i) Für jedes $x \in \partial\Omega$ existieren die so genannten direkten Werte $\mathbf{E}^{\kappa\bullet\Psi}(x)$, $\mathbf{D}^{\kappa\bullet\Psi}(x)$ und $\mathbf{H}^{\kappa\bullet\Psi}(x)$.

(ii) $\mathbf{E}^{\kappa\bullet\Psi} \in C(\mathbb{R}^3)^3$.

(iii) $\mathbf{D}^{\kappa\bullet\Psi} \in C(\bar{\Omega})^3 \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)^3$ mit

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}^{\kappa\bullet\Psi})^i &= \frac{1}{2}\Psi^i + \mathbf{D}^{\kappa\bullet\Psi}^i, \\ (\mathbf{D}^{\kappa\bullet\Psi})^a &= -\frac{1}{2}\Psi^a + \mathbf{D}^{\kappa\bullet\Psi}^a. \end{aligned} \quad (5.15)$$

(iv) $\mathbf{H}^{\kappa\bullet\Psi} \in C(U \cap \bar{\Omega})^3 \cap C(U \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega))^3$ mit

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}^{\kappa\bullet\Psi})^i &= -\frac{1}{2}\Psi^i + \mathbf{H}^{\kappa\bullet\Psi}^i, \\ (\mathbf{H}^{\kappa\bullet\Psi})^a &= \frac{1}{2}\Psi^a + \mathbf{H}^{\kappa\bullet\Psi}^a. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Beweis: Alle Aussagen folgen aus der Darstellung (4.28), Satz 5.6, Satz 5.9, Satz 5.10 sowie Satz 3.7. \square

5.2 Flächenpotentiale für den adjungierten Oseen-Operator

Definition 5.12 Sei $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$. Dann heißt die Vektorfunktion

$$\mathbf{E}^{\kappa^* \Psi} : \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{E}^{\kappa^* \Psi}(x) := \int_{\partial\Omega} E^{\kappa^* S}(x-y)\Psi(y) do_y \quad (5.17)$$

Einfachschichtpotential für den adjungierten Oseen-Operator mit Belegung Ψ . Dabei bezeichnet

$$\mathbf{E}^{\kappa^{**} \Psi} : \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{E}^{\kappa^{**} \Psi}(x) := \int_{\partial\Omega} E^{\kappa^{**} SZ}(x-y)\Psi(y) do_y$$

seinen Geschwindigkeitsanteil. Die Vektorfunktion

$$\mathbf{D}^{\kappa^* \Psi} : \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{D}^{\kappa^* \Psi}(x) := \int_{\partial\Omega} D^{\kappa^*}(x,y)\Psi(y) do_y \quad (5.18)$$

mit der 4×3 -Matrix

$$D^{\kappa^*}(x,y) := (T_y^\kappa E^{\kappa^*}(x-y)\mathbf{n}(y))^T$$

heißt Doppelschichtpotential für den adjungierten Oseen-Operator mit Belegung Ψ . Dabei bezeichnet

$$\mathbf{D}^{\kappa^{**} \Psi} : \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{D}^{\kappa^{**} \Psi}(x) := \int_{\partial\Omega} D^{\kappa^{**} Z}(x,y)\Psi(y) do_y$$

seinen Geschwindigkeitsanteil.

Lemma 5.13 Für die Matrix D^{κ^*} aus Definition 5.12 gilt für $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \partial\Omega$ mit $x \neq y$

$$D^{\kappa^*}(x, y) = (D_{kj}^{\kappa^*}(x, y))_{k=1,2,3,4; j=1,2,3}$$

mit

$$\begin{aligned} D_{kj}^{\kappa^*}(x, y) &= \partial_{x_i} E_{jk}^{\kappa^*}(x - y) n_i(y) + \partial_{x_j} E_{ik}^{\kappa^*}(x - y) n_i(y) \\ &\quad + E_{4k}^{\kappa^*}(x - y) \delta_{ij} n_i(y) + \frac{\kappa}{2} E_{jk}^{\kappa^*}(x - y) \delta_{i1} n_i(y). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Beweis: Durch Nachrechnen, analog zum Beweis von Lemma 5.2. \square

Definition 5.14 Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine Umgebung von $\partial\Omega$ und $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$. Dann heißt $H^{\kappa^*} \Psi : U \setminus \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\begin{aligned} H^{\kappa^*} \Psi(x) &:= T_x^{\kappa^*} (\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi(x)) \mathbf{n}(x') = \int_{\partial\Omega} T_x^{\kappa^*} (E^{\kappa^* S}(x - y) \Psi(y)) \mathbf{n}(x') \, do_y \\ &=: \int_{\partial\Omega} H^{\kappa^*}(x, y) \Psi(y) \, do_y \end{aligned} \quad (5.20)$$

Oseen-Normalspannungen des adjungierten Einfachschichtpotentials. Dabei ist x' die eindeutig bestimmte Projektion von $x \in U$ auf $\partial\Omega$ und $\mathbf{n}(x')$ die ins Äußere von Ω weisende Einheitsnormale in $x' \in \partial\Omega$.

Lemma 5.15 Für die Matrix H^{κ^*} aus der Definition 5.14 gilt für $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \partial\Omega$ mit $x \neq y$

$$H^{\kappa^*}(x, y) = (H_{ki}^{\kappa^*}(x, y))_{k,i=1,2,3}$$

mit

$$\begin{aligned} H_{ki}^{\kappa^*}(x, y) &= -\partial_{x_j} E_{ki}^{\kappa^*}(x - y) n_j(x) - \partial_{x_k} E_{ji}^{\kappa^*}(x - y) n_j(x) \\ &\quad - E_{4i}^{\kappa^*}(x - y) \delta_{jk} n_j(x) - \frac{\kappa}{2} E_{ki}^{\kappa^*}(x - y) \delta_{j1} n_j(x). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Lemma 5.16 Für $x, y \in \partial\Omega$ mit $x \neq y$ gilt

$$D^{\kappa^* Z}(x, y) = (H^{\kappa^*}(y, x))^T \quad (5.22)$$

bzw.

$$D^{\kappa^* Z}(x, y) = (H^{\kappa}(y, x))^T. \quad (5.23)$$

Beweis: Durch Nachrechnen erhalten wir für $k, i = 1, 2, 3, x, y \in \partial\Omega, x \neq y$

$$\begin{aligned}
H_{ik}^{\kappa*}(y, x) &= -\partial_{y_j} E_{ik}^{\kappa*}(y-x)n_j(y) - \partial_{y_i} E_{jk}^{\kappa*}(y-x)n_j(y) \\
&\quad - E_{4k}^{\kappa*}(y-x)\delta_{ji}n_j(y) - \frac{\kappa}{2}E_{ik}^{\kappa*}(y-x)\delta_{j1}n_j(y) \\
&\stackrel{(4.50)}{=} -\partial_{y_j} E_{ik}^{\kappa}(x-y)n_j(y) - \partial_{y_i} E_{jk}^{\kappa}(x-y)n_j(y) \\
&\quad - E_{4k}^{\kappa}(x-y)\delta_{ji}n_j(y) - \frac{\kappa}{2}E_{ik}^{\kappa}(x-y)\delta_{j1}n_j(y) \\
&= \partial_{x_j} E_{ik}^{\kappa}(x-y)n_j(y) + \partial_{x_i} E_{jk}^{\kappa}(x-y)n_j(y) \\
&\quad - E_{4k}^{\kappa}(x-y)\delta_{ji}n_j(y) - \frac{\kappa}{2}E_{ik}^{\kappa}(x-y)\delta_{j1}n_j(y) \\
&= D_{ki}^{\kappa}(x, y),
\end{aligned}$$

also

$$(H^{\kappa*}(y, x))^T = D^{\kappa Z}(x, y).$$

Die zweite Gleichheit wird analog gezeigt. \square

Die nächsten Resultate für $\mathbf{E}^{\kappa*}\Psi, \mathbf{D}^{\kappa*}\Psi, \mathbf{H}^{\kappa*\bullet}\Psi$ werden analog zu den entsprechenden Eigenschaften von $\mathbf{E}^{\kappa}\Psi, \mathbf{D}^{\kappa}\Psi, \mathbf{H}^{\kappa\bullet}\Psi$ bewiesen.

Satz 5.17 Die Potentiale $\mathbf{E}^{\kappa*}\Psi$ und $\mathbf{D}^{\kappa*}\Psi$ sind aus $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)^4$ und es gilt

$$\mathcal{O}^* \mathbf{E}^{\kappa*}\Psi(x) = \mathcal{O}^* \mathbf{D}^{\kappa*}\Psi(x) = \mathbf{0}$$

in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$.

Satz 5.18

(i) Für den Geschwindigkeitsanteil $\mathbf{E}^{\kappa*\bullet}\Psi$ des Einfachschichtpotentials des adjungierten Oseen-Operators gilt die Darstellung

$$\mathbf{E}^{\kappa*\bullet}\Psi = \mathbf{E}^\bullet\Psi + \tilde{\mathbf{E}}^{\kappa*\bullet}\Psi \tag{5.24}$$

mit der stetigen Funktion $\tilde{\mathbf{E}}^{\kappa*\bullet}\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\tilde{\mathbf{E}}^{\kappa*\bullet}\Psi(x) := \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{E}}^{\kappa*SZ}(x-y)\Psi(y) \, do_y. \tag{5.25}$$

Dabei bezeichnet die Funktion $\mathbf{E}^\bullet\Psi$ den Geschwindigkeitsanteil des Einfachschichtpotentials der Stokes-Gleichungen (siehe (3.15)).

(ii) Der Druckanteil $(\mathbf{E}^{\kappa*}\Psi)_4$ des adjungierten Einfachschichtpotentials der Oseen-Gleichungen stimmt mit dem Druckanteil $(\mathbf{E}^*\Psi)_4$ des adjungierten Einfachschichtpotentials der Stokes-Gleichungen überein.

Lemma 5.19 *Es gelten folgende Darstellungen:*

(i) Für die Funktion $D^{\kappa*Z} : \mathbb{R}^3 \times \partial\Omega \setminus \{(y, y), y \in \partial\Omega\} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt

$$D^{\kappa*Z}(x, y) = D^{*Z}(x, y) + \tilde{D}^{\kappa*Z}(x, y)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{kj}^{\kappa*Z}(x, y) &:= \partial_{x_i} \tilde{E}_{jk}^{\kappa*}(x - y) n_i(y) + \partial_{x_j} \tilde{E}_{ik}^{\kappa*}(x - y) n_i(y) \\ &\quad + \frac{\kappa}{2} \left(E_{jk}(x - y) + \tilde{E}_{jk}^{\kappa*}(x - y) \right) \delta_{i1} n_i(y) \end{aligned}$$

für $k, j = 1, 2, 3$. Dabei ist D^{*Z} in (3.23) definiert.

(ii) Für die Funktion $D_{4j}^{\kappa*} : \mathbb{R}^3 \times \partial\Omega \setminus \{(y, y), y \in \partial\Omega\} \rightarrow \mathbb{R}$ für $j = 1, 2, 3$ gilt

$$D_{4j}^{\kappa*}(x, y) = D_{4j}^*(x, y) + \tilde{D}_{4j}^{\kappa*}(x, y)$$

mit

$$\tilde{D}_{4j}^{\kappa*}(x, y) = \tilde{E}_{44}^{\kappa*}(x - y) \delta_{ij} n_i(y) + \frac{\kappa}{2} E_{j4}(x - y) \delta_{i1} n_i(y).$$

(iii) Für die Funktion $H^{\kappa*} : U \times \partial\Omega \setminus \{(y, y), y \in \partial\Omega\} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ aus Definition 5.14 gilt die Darstellung

$$H^{\kappa*}(x, y) = H^*(x, y) + \tilde{H}^{\kappa*}(x, y)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{ki}^{\kappa*}(x, y) &:= -\partial_{x_j} \tilde{E}_{ki}^{\kappa*}(x - y) n_j(x') - \partial_{x_k} \tilde{E}_{ji}^{\kappa*}(x - y) n_j(x') \\ &\quad - \frac{\kappa}{2} \left(E_{ki}(x - y) + \tilde{E}_{ki}^{\kappa*}(x - y) \right) \delta_{j1} n_j(x') \end{aligned}$$

für $k, i = 1, 2, 3$. Dabei ist H^* in (3.30) definiert.

Lemma 5.20 *Für alle $k, i = 1, 2, 3$ existieren $C_j > 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$), so dass für alle $x \in U, y \in \partial\Omega, x \neq y$ gilt*

$$\tilde{H}_{ki}^{\kappa*}(x, y) \leq C_1 \frac{1}{|x - y|} + C_2 \frac{1}{|x - y|} \left(\frac{1}{(1 + p)} + \frac{1}{(1 + p)^2} \right) + C_3 \frac{1}{(1 + p)^2} + C_4 \frac{1}{(1 + p)^3}.$$

Beweis: Mit der expliziten Darstellung von $\tilde{H}_{ki}^{\kappa*}$ (siehe Lemma 8.2 im Anhang) sowie mit (4.35) und (4.38) folgt sofort die Behauptung. \square

Satz 5.21 *Für den Geschwindigkeitsanteil $D^{\kappa*\bullet\Psi}$ des Doppelschichtpotentials des adjungierten Oseen-Operators gilt die Darstellung*

$$D^{\kappa*\bullet\Psi} = D^{*\bullet\Psi} + \tilde{D}^{\kappa*\bullet\Psi} \tag{5.26}$$

mit der stetigen Funktion $\tilde{D}^{\kappa^* \bullet \Psi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\tilde{D}^{\kappa^* \bullet \Psi}(x) := \int_{\partial\Omega} \tilde{D}^{\kappa^* Z}(x, y) \Psi(y) do_y. \quad (5.27)$$

Dabei ist die Matrix \tilde{D}^{κ^*} in Lemma 5.19 definiert, und $D^{* \bullet \Psi}$ bezeichnet den Geschwindigkeitsanteil des adjungierten Stokes-Doppelschichtpotentials (siehe Kapitel 3).

Satz 5.22 Für die in Definition 5.14 definierten Oseen-Normalspannungen $H^{\kappa^* \bullet \Psi}$ des Einfachschichtpotentials des adjungierten Oseen-Operators gilt die Darstellung

$$H^{\kappa^* \bullet \Psi} = H^{* \bullet \Psi} + \tilde{H}^{\kappa^* \bullet \Psi} \quad (5.28)$$

mit der stetigen Funktion $\tilde{H}^{\kappa^* \bullet \Psi} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\tilde{H}^{\kappa^* \bullet \Psi}(x) := \int_{\partial\Omega} \tilde{H}^{\kappa^*}(x, y) \Psi(y) do_y. \quad (5.29)$$

Dabei ist die Matrix \tilde{H}^{κ^*} in Lemma 5.19 definiert, und $H^{* \bullet \Psi}$ bezeichnet die Normalspannungen des adjungierten Stokes-Einfachschichtpotentials (siehe Kapitel 3).

Satz 5.23 Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine Umgebung von $\partial\Omega$. Sei $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$. Dann gilt:

- (i) Für jedes $x \in \partial\Omega$ existieren die so genannten direkten Werte $E^{\kappa^* \bullet \Psi}(x)$, $D^{\kappa^* \bullet \Psi}(x)$ und $H^{\kappa^* \bullet \Psi}(x)$.
- (ii) $E^{\kappa^* \bullet \Psi} \in C(\mathbb{R}^3)^3$.
- (iii) $D^{\kappa^* \bullet \Psi} \in C(\bar{\Omega})^3 \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)^3$ mit

$$\begin{aligned} (D^{\kappa^* \bullet \Psi})^i &= \frac{1}{2} \Psi + D^{\kappa^* \bullet \Psi}, \\ (D^{\kappa^* \bullet \Psi})^a &= -\frac{1}{2} \Psi + D^{\kappa^* \bullet \Psi}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

- (iv) $H^{\kappa^* \bullet \Psi} \in C(U \cap \bar{\Omega})^3 \cap C(U \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega))^3$ mit

$$\begin{aligned} (H^{\kappa^* \bullet \Psi})^i &= -\frac{1}{2} \Psi + H^{\kappa^* \bullet \Psi}, \\ (H^{\kappa^* \bullet \Psi})^a &= \frac{1}{2} \Psi + H^{\kappa^* \bullet \Psi}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

5.3 Abklingverhalten der Flächenpotentiale für $|x| \rightarrow \infty$

In diesem Kapitel untersuchen wir die Einfachschichtpotentiale $E^\kappa \Psi(x)$, $E^{\kappa^* \bullet \Psi}(x)$, die Doppelschichtpotentiale $D^\kappa \Psi(x)$, $D^{\kappa^* \bullet \Psi}(x)$ sowie deren Ableitungen in Bezug auf ihr Abklingverhalten für $|x| \rightarrow \infty$. Aufgrund des kompakten Randes entspricht das Abklingverhalten der Potentiale dem Abklingverhalten der entsprechenden Oseen-Tensoren.

Lemma 5.24 Für die Einfachschichtpotentiale $\mathbf{E}^{\kappa}\Psi$ und $\mathbf{E}^{\kappa*}\Psi$ gilt für $|x| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\kappa\bullet}\Psi(x) &= O(\eta_{-1}^{-1}(x)), \\ \nabla\mathbf{E}^{\kappa\bullet}\Psi(x) &= O(\eta_{-3/2}^{-3/2}(x)), \\ \partial^n(\mathbf{E}^{\kappa}\Psi)_4(x) &= O(|x|^{-(n+2)}), \quad n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\kappa*\bullet}\Psi(x) &= O(\mu_{-1}^{-1}(x)), \\ \nabla\mathbf{E}^{\kappa*\bullet}\Psi(x) &= O(\mu_{-3/2}^{-3/2}(x)), \\ \partial^n(\mathbf{E}^{\kappa*}\Psi)_4(x) &= O(|x|^{-(n+2)}), \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Beweis: Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^3$

$$|\mathbf{E}^{\kappa\bullet}\Psi(x)| \leq \|\Psi\|_{\infty} \int_{\partial\Omega} |E^{\kappa ZS}(x-y)| \, do_y$$

bzw.

$$|\nabla\mathbf{E}^{\kappa\bullet}\Psi(x)| \leq \|\Psi\|_{\infty} \int_{\partial\Omega} |\nabla_x E^{\kappa ZS}(x-y)| \, do_y.$$

Mit Lemma 4.14 verhält sich daher $\mathbf{E}^{\kappa\bullet}\Psi(x)$ bzw. $\nabla\mathbf{E}^{\kappa\bullet}\Psi(x)$ für $|x| \rightarrow \infty$ genau wie der Fundamentaltensor E^{κ} bzw. dessen Gradient. Wegen $(\mathbf{E}^{\kappa}\Psi)_4 = (\mathbf{E}\Psi)_4$ besitzt der Druck $(\mathbf{E}^{\kappa}\Psi)_4$ das gleiche Abklingverhalten wie der Druck $(\mathbf{E}\Psi)_4$ (siehe 3.10). Das Abklingverhalten für das adjungierte Einfachschichtpotential zeigt man analog. \square

Lemma 5.25 Für die Doppelschichtpotentiale $\mathbf{D}^{\kappa}\Psi(x)$ und $\mathbf{D}^{\kappa*}\Psi(x)$ gilt für $|x| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^{\kappa\bullet}\Psi(x) &= O(\eta_{-1}^{-1}(x)), \\ \nabla\mathbf{D}^{\kappa\bullet}\Psi(x) &= O(\eta_{-3/2}^{-3/2}(x)), \\ \partial^n(\mathbf{D}^{\kappa}\Psi)_4(x) &= O(|x|^{-(n+2)}), \quad n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^{\kappa*\bullet}\Psi(x) &= O(\mu_{-1}^{-1}(x)), \\ \nabla\mathbf{D}^{\kappa*\bullet}\Psi(x) &= O(\mu_{-3/2}^{-3/2}(x)), \\ \partial^n(\mathbf{D}^{\kappa*}\Psi)_4(x) &= O(|x|^{-(n+2)}), \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Beweis: Mit

$$|D^{\kappa Z}(x,y)| \leq |\nabla_x E^{\kappa ZS}(x-y)| + |(E_{4k}^{\kappa})_{k=1,2,3}(x-y)| + |E^{\kappa ZS}(x-y)|$$

folgt für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$

$$|D^{\kappa\bullet}\Psi(x)| \leq \|\Psi\|_\infty \int_{\partial\Omega} (|\nabla_x E^{\kappa ZS}(x-y)| + |(E_{4k}^\kappa)_k(x-y)| + |E^{\kappa ZS}(x-y)|) do_y.$$

Für $|x| \geq 1$ gilt

$$\frac{(1+|x|)(1+s(x))}{|x|^2} \leq \frac{(1+|x|)}{|x|} \frac{(1+2|x|)}{|x|} \leq 6.$$

Mit Lemma 4.14 ergibt sich daher

$$\begin{aligned} |D^{\kappa\bullet}\Psi(x)|(1+|x|)(1+s(x)) &\leq \|\Psi\|_\infty \int_{\partial\Omega} \left(C_1 \frac{(1+|x|)(1+s(x))}{(1+|x|)^{3/2}(1+s(x))^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + C_2 \frac{(1+|x|)(1+s(x))}{|x|^2} + C_3 \right) do_y \\ &\leq C \|\Psi\|_\infty |\partial\Omega| \end{aligned}$$

für $|x| \rightarrow \infty$. Mit

$$|\nabla D^{\kappa Z}(x,y)| \leq |\partial_x^2 E^{\kappa ZS}(x-y)| + |\nabla_x (E_{4k}^\kappa)_{k=1,2,3}(x-y)| + |\nabla_x E^{\kappa ZS}(x-y)|$$

erhalten wir mit Lemma 4.14 für den Gradienten

$$\begin{aligned} |\nabla D^{\kappa\bullet}\Psi(x)|(1+|x|)^{3/2}(1+s(x))^{3/2} &\leq \|\Psi\|_\infty (1+|x|)^{3/2}(1+s(x))^{3/2} \int_{\partial\Omega} |\nabla_x D^{\kappa Z}(x,y)| do_y \\ &\leq \|\Psi\|_\infty \int_{\partial\Omega} \left(C_1 \frac{(1+|x|)^{3/2}(1+s(x))^{3/2}}{(1+|x|)^2(1+s(x))^2} \right. \\ &\quad \left. + C_2 \frac{(1+|x|)^{3/2}(1+s(x))^{3/2}}{|x|^3} + C_3 \right) do_y \\ &\leq \|\Psi\|_\infty |\partial\Omega| C \end{aligned}$$

für $|x| \rightarrow \infty$. Wegen

$$|D_{4j}^\kappa(x,y)| \leq |D_{4j}(x,y)| + |\tilde{E}_{44}^\kappa(x-y)| + |E_{j4}(x-y)|$$

und wegen der expliziten Darstellung (3.25) von D_{4j}^κ sowie Lemma 4.14 und der expliziten Darstellung (3.10) des Stokes-Fundamentaltensors existiert ein $C > 0$ mit

$$|D_{4j}^\kappa(x,y)| \leq C \frac{1}{|x-y|^2} \quad \text{für } x \neq y.$$

Somit folgt das Abklingverhalten für den Druck $(D^{\kappa\bullet}\Psi)_4$. Das Abklingverhalten seiner n -ten partiellen Ableitungen ($n \in \mathbb{N}$) zeigt man analog. \square

6 Randwertaufgaben zum Oseen-System

6.1 Definition der Randwertaufgaben

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit zusammenhängendem Rand $\partial\Omega \in C^2$ und $\Omega^* := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ ein Außengebiet mit $\partial\Omega^* = \partial\Omega$. Wir definieren die folgenden RWA'n für das Oseen-System: Sei $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$ ein vorgegebener Randwert.

Inneres Dirichlet-Problem (ID)

Gesucht ist ein Vektorfeld $\mathbf{u} \in C^2(\Omega)^3 \cap C(\overline{\Omega})^3$ und eine Funktion $p \in C^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Inneres Neumann-Problem (IN)

Gesucht ist ein Vektorfeld $\mathbf{u} \in C^2(\Omega)^3 \cap C(\overline{\Omega})^3$ und eine Funktion $p \in C^1(\Omega)$, so dass $T_p^{\kappa\mathbf{u}}\mathbf{n}(x)$ für jedes $x \in \partial\Omega$ existiert und $T_p^{\kappa\mathbf{u}}\mathbf{n}(x - t\mathbf{n}(x))$ gleichmäßig für alle $x \in \partial\Omega$ gegen $T_p^{\kappa\mathbf{u}}\mathbf{n}(x)$ für $t \rightarrow 0_+$ konvergiert (siehe [Vla88]), mit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \\ T_p^{\kappa\mathbf{u}}\mathbf{n} &= \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Äußeres Dirichlet-Problem (AD)

Gesucht ist ein Vektorfeld $\mathbf{u} \in C^2(\Omega^*)^3 \cap C(\overline{\Omega^*})^3$ und eine Funktion $p \in C^1(\Omega^*)$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^*, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Äußeres Neumann-Problem (AN)

Gesucht ist ein Vektorfeld $\mathbf{u} \in C^2(\Omega^*)^3 \cap C(\overline{\Omega^*})^3$ und eine Funktion $p \in C^1(\Omega^*)$, so dass $T_p^{\kappa\mathbf{u}}\mathbf{n}(x)$ für jedes $x \in \partial\Omega$ existiert und $T_p^{\kappa\mathbf{u}}\mathbf{n}(x + t\mathbf{n}(x))$ gleichmäßig für alle $x \in \partial\Omega$ gegen $T_p^{\kappa\mathbf{u}}\mathbf{n}(x)$ für $t \rightarrow 0_+$ konvergiert, mit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^*, \\ T_p^{\kappa\mathbf{u}}\mathbf{n} &= \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Analog definieren wir die RWA'n für das adjungierte Oseen-System: Sei $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$ ein vorgegebener Randwert.

Adjungiertes inneres Dirichlet-Problem (ID*)

Gesucht ist ein Vektorfeld $\mathbf{u} \in C^2(\Omega)^3 \cap C(\overline{\Omega})^3$ und eine Funktion $p \in C^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_p^* \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Adjungiertes inneres Neumann-Problem (IN*)

Gesucht ist ein Vektorfeld $\mathbf{u} \in C^2(\Omega)^3 \cap C(\overline{\Omega})^3$ und eine Funktion $p \in C^1(\Omega)$, so dass $T^{\kappa*} \frac{\mathbf{u}}{p} \mathbf{n}(x)$ für jedes $x \in \partial\Omega$ existiert und $T^{\kappa*} \frac{\mathbf{u}}{p} \mathbf{n}(x - t\mathbf{n}(x))$ gleichmäßig für alle $x \in \partial\Omega$ gegen $T^{\kappa*} \frac{\mathbf{u}}{p} \mathbf{n}(x)$ für $t \rightarrow 0_+$ konvergiert, mit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_p^* \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \\ T^{\kappa*} \frac{\mathbf{u}}{p} \mathbf{n} &= \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Adjungiertes äußeres Dirichlet-Problem (AD*)

Gesucht ist ein Vektorfeld $\mathbf{u} \in C^2(\Omega^*)^3 \cap C(\overline{\Omega^*})^3$ und eine Funktion $p \in C^1(\Omega^*)$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_p^* \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^*, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Adjungiertes äußeres Neumann-Problem (AN*)

Gesucht ist ein Vektorfeld $\mathbf{u} \in C^2(\Omega^*)^3 \cap C(\overline{\Omega^*})^3$ und eine Funktion $p \in C^1(\Omega^*)$, so dass $T^{\kappa*} \frac{\mathbf{u}}{p} \mathbf{n}(x)$ für jedes $x \in \partial\Omega$ existiert und $T^{\kappa*} \frac{\mathbf{u}}{p} \mathbf{n}(x + t\mathbf{n}(x))$ gleichmäßig für alle $x \in \partial\Omega$ gegen $T^{\kappa*} \frac{\mathbf{u}}{p} \mathbf{n}(x)$ für $t \rightarrow 0_+$ konvergiert, mit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_p^* \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^*, \\ T^{\kappa*} \frac{\mathbf{u}}{p} \mathbf{n} &= \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.8}$$

6.2 Eindeutigkeitsätze

Wir untersuchen nun die vorliegenden RWA'n auf Eindeutigkeit der Lösungen. Dabei werden zunächst keine Aussagen über die Existenz der Lösungen gemacht. Für diese Untersuchungen benötigen wir das folgende Lemma (siehe [Lad69] S. 60):

Lemma 6.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $\mathbf{u} \in C^1(\Omega)^3$ mit

$$\partial_i u_j + \partial_j u_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6.9)$$

für alle $i, j = 1, 2, 3$. Dann ist \mathbf{u} stets eine Linearkombination der folgenden sechs linear unabhängigen Lösungen von (6.9):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Wir nennen das Vektorfeld \mathbf{u} eine Starrkörperbewegung in Ω .

Satz 6.2 Der Geschwindigkeitsanteil \mathbf{u} der Lösung von (ID) (vgl. (6.1)) ist eindeutig und der Druck p ist eindeutig bis auf eine additive Konstante. Die Lösung von (ID) kann nur existieren, falls der Randwert \mathbf{b} die Bedingung

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0 \quad (6.11)$$

erfüllt. Die Lösung (\mathbf{u}, p) von (IN) (vgl. (6.2)) ist eindeutig. Die Lösung (\mathbf{u}, p) von (AD) (vgl. (6.3)) bzw. von (AN) (vgl. (6.4)) ist eindeutig, falls (\mathbf{u}, p) die Abklingbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x) &= O(\eta_{-1}^{-1}(x)), \\ \nabla \mathbf{u}(x) &= O(\eta_{-3/2}^{-3/2}(x)), \\ p(x) &= O(|x|^{-2}) \end{aligned} \quad (6.12)$$

für $|x| \rightarrow \infty$ erfüllt. Dabei wurde die Gewichtsfunktion η in Definition 2.1 eingeführt.

Beweis: Löst (\mathbf{u}, p) das Problem (ID), so gilt wegen $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ in Ω mit dem Satz von Gauß

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, dy = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

d.h., (6.11) ist eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung von (ID).

Nun nehmen wir an, (\mathbf{v}, q) und (\mathbf{w}, r) seien zwei Lösungen von (ID) bzw. (IN). Dann genügt $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{v}, q) - (\mathbf{w}, r)$ den Oseen-Gleichungen $\mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ in Ω und der Dirichlet-Randbedingung $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ auf $\partial\Omega$ bzw. der Neumann-Randbedingung $T_p^{\kappa} \mathbf{u} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ auf $\partial\Omega$. Im Falle (ID) folgt aus der Regularitätstheorie von Cattabriga (siehe [Cat61]) sowie wegen des Sobolevschen Einbettungssatzes (siehe [AF03], S. 85)

$$(\mathbf{u}, p) \in C^1(\overline{\Omega})^3 \times C(\overline{\Omega}).$$

Wir dürfen also die erste Greensche Formel (4.6) auf (\mathbf{u}, p) anwenden und erhalten mit den obigen Randbedingungen

$$0 = 2 \int_{\Omega} |D\mathbf{u}|^2 \, dy - \int_{\Omega} \kappa \mathbf{u} \cdot \partial_1 \mathbf{u} \, dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\kappa}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) n_1 \, d\sigma.$$

Mit $\mathbf{u} \cdot \partial_1 \mathbf{u} = \frac{1}{2} \partial_1 (\mathbf{u}^2)$ und dem Satz von Gauß folgt dann

$$-\int_{\Omega} \kappa \mathbf{u} \cdot \partial_1 \mathbf{u} \, dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\kappa}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) n_1 \, do = -\int_{\partial\Omega} \frac{\kappa}{2} \mathbf{u}^2 n_1 \, do + \int_{\partial\Omega} \frac{\kappa}{2} \mathbf{u}^2 n_1 \, do = 0$$

und somit

$$\int_{\Omega} |D\mathbf{u}|^2 \, dy = 0,$$

also $D\mathbf{u} = 0$ in Ω , d.h., \mathbf{u} ist eine Starrkörperbewegung in Ω (vgl. Lemma 6.1). Laut Lemma 6.1 ist \mathbf{u} stets eine Linearkombination der sechs linear unabhängigen Vektorfelder aus (6.10). Bei (ID) mit Randwert $\mathbf{b} = 0$ muss \mathbf{u} jedoch identisch Null auf dem Rand sein, was $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ in $\bar{\Omega}$ impliziert. Mit $\mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ in Ω folgt $\nabla p = \mathbf{0}$ in Ω , d.h., $p = \text{const}$ in Ω . Dies beweist die Eindeutigkeitsaussage für die Lösungen von (ID).

Bei (IN) setzen wir $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^6 \lambda_i \mathbf{v}_i$ mit \mathbf{v}_i aus (6.10) und erhalten

$$\mathbf{0} = \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} = -\Delta \mathbf{u} + \kappa \partial_1 \mathbf{u} + \nabla p = \kappa \partial_1 \mathbf{u} + \nabla p \quad \text{in } \Omega,$$

also

$$\nabla p = \kappa \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_5 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \quad \text{in } \Omega,$$

d.h.,

$$p = C + \kappa \lambda_5 x_2 + \kappa \lambda_4 x_3 \quad \text{in } \Omega$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Außerdem erfüllt (\mathbf{u}, p) die Bedingung

$$\mathbf{0} = T_p^{\kappa \mathbf{u}} \mathbf{n} = -2(D\mathbf{u})\mathbf{n} + p\mathbf{n} + \frac{\kappa}{2} \mathbf{u} n_1 = p\mathbf{n} + \frac{\kappa}{2} \mathbf{u} n_1 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (6.13)$$

Aus der ersten Gleichung von (6.13) folgt

$$C + \kappa \lambda_5 x_2 + \kappa \lambda_4 x_3 + \frac{\kappa}{2} (\lambda_1 + \lambda_4 x_3 + \lambda_5 x_2) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

also

$$\lambda_4 = \lambda_5 = 0, \quad \lambda_1 = -\frac{2}{\kappa} C, \quad p = \text{const}.$$

Die zweite Gleichung von (6.13) liefert für $x \in \partial\Omega$ mit $\mathbf{n}(x) = (1, 0, 0)$ die Bedingung $u_2 = 0$ und somit $\lambda_2 = \lambda_6 = 0$. Für $x \in \partial\Omega$ mit $\mathbf{n}(x) = (0, 1, 0)$ folgt $p = 0$, also auch $\lambda_1 = 0$. Analog folgt aus der dritten Gleichung $\lambda_3 = 0$, denn für $x \in \partial\Omega$ mit

$\mathbf{n}(x) = (1, 0, 0)$ gilt $u_3 = 0$. Wir haben dabei die Surjektivität der Gaußabbildung benutzt: Ist $\partial\Omega \in C^2$ geschlossen, so existiert ein $x \in \partial\Omega$ mit $n(x) = e_i$ für $i = 1, 2, 3$.

Für die äußeren RWA'n wenden wir die erste Greensche Formel (4.6) auf die Differenz zweier Lösungen $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{v}, q) - (\mathbf{w}, r)$ in $\Omega_R^* := \Omega^* \cap K_R(0)$ an. Dabei ist $K_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ die offene Kugel um den Ursprung, wobei deren Radius $R > 0$ so groß gewählt wird, dass $\partial\Omega \subset K_R(0)$ gilt. Mit $\mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ in Ω_R^* sowie $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ auf $\partial\Omega$ im Falle von (AD*) und $T^{\kappa} \mathbf{u}_p = \mathbf{0}$ auf $\partial\Omega$ im Falle von (AN*) erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega_R^*} T^{\kappa} \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, do + 2 \int_{\Omega_R^*} |D\mathbf{u}|^2 \, dy \\ &= \int_{\partial K_R(0)} T^{\kappa} \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, do + 2 \int_{\Omega_R^*} |D\mathbf{u}|^2 \, dy. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Genügen die Lösungen (\mathbf{v}, q) und (\mathbf{w}, r) den Abklingbedingungen (6.12), so auch ihre Differenz (\mathbf{u}, p) , und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_R(0)} T^{\kappa} \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, do &\leq \int_{\partial K_R(0)} 2|\nabla \mathbf{u}| |\mathbf{u}| + |p| |\mathbf{u}| + \frac{\kappa}{2} |\mathbf{u}|^2 \, do \\ &= \max_{|y|=R} \left(O(\eta(y)_{-5/2}^{-5/2}) + O(\eta(y)_{-1}^{-1}) O(|y|^{-2}) \right) \int_{\partial K_R(0)} 1 \, do \\ &\quad + C \int_{\partial K_R(0)} \eta(y)_{-2}^{-2} \, do_y \\ &\stackrel{(2.22)}{\leq} C_1 \frac{R^2}{(1+R)^{5/2}} + C_2 \frac{1}{1+R} + C_3 \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Grenzübergang in (6.14) für $R \rightarrow \infty$ liefert somit

$$0 = 2 \int_{\Omega^*} |D\mathbf{u}|^2 \, dy,$$

d.h., $D\mathbf{u} = 0$ in Ω^* . Also ist \mathbf{u} eine Starrkörperbewegung in Ω^* . Die Abklingbedingungen (6.12) implizieren $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ in $\overline{\Omega^*}$. Wegen $\mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ in Ω^* folgt $\nabla p = \mathbf{0}$ in Ω^* , d.h., $p = \text{const}$ in Ω^* . Mit den Abklingbedingungen (6.12) folgt dann, dass die Konstante gleich Null sein muss. Somit sind die Eindeutigkeitsaussagen für die äußeren RWA'n bewiesen. \square

Für die adjungierten RWA'n existieren analoge Eindeutigkeitsaussagen:

Satz 6.3 *Der Geschwindigkeitsanteil \mathbf{u} der Lösung von (ID*) (vgl. (6.5)) ist eindeutig und der Druck p ist eindeutig bis auf eine additive Konstante. Die Lösung von (ID*) kann nur existieren, falls der Randwert \mathbf{b} die Bedingung*

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, do = 0 \quad (6.15)$$

erfüllt. Die Lösung (\mathbf{u}, p) von (IN^*) (vgl. (6.6)) ist eindeutig. Die Lösung (\mathbf{u}, p) von (AD^*) (vgl. (6.7)) bzw. von (AN^*) (vgl. (6.8)) ist eindeutig, falls (\mathbf{u}, p) die Abklingbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x) &= O(\mu_{-1}^{-1}(x)), \\ \nabla \mathbf{u}(x) &= O(\mu_{-3/2}^{-3/2}(x)), \\ p(x) &= O(|x|^{-2}) \end{aligned} \tag{6.16}$$

für $|x| \rightarrow \infty$ erfüllen. Dabei wurde die Gewichtsfunktion μ in Definition 2.1 eingeführt.

6.3 Existenz der Lösungen

Im Folgenden beschränken wir uns auf (ID) (vgl. (6.1)) bzw. (AD) (vgl. (6.3)) sowie auf (IN^*) (vgl. (6.6)) bzw. (AN^*) (vgl. (6.8)). Um die Existenz der Lösungen der obigen RWA'n zu zeigen, benutzen wir die Methode der Randintegralgleichungen in $C(\partial\Omega)^3$. Dazu wählen wir für die Dirichlet-Probleme als Ansatz das Doppelschichtpotential $\mathbf{D}^\kappa \Psi$ und für die adjungierten Neumann-Probleme das Einfachschichtpotential $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi$. Aus den vorliegenden Randbedingungen resultieren dann die entsprechenden RIGL-Systeme (Randintegralgleichungssysteme).

Satz 6.4

- (i) Das Doppelschichtpotential $\mathbf{D}^\kappa \Psi$ mit $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ ist genau dann eine Lösung von (ID) (vgl. (6.3)) mit gegebenem Randwert $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$, wenn Ψ eine Lösung des RIGL-Systems

$$\frac{1}{2} \Psi + \mathbf{D}^{\kappa \bullet} \Psi = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{6.17}$$

darstellt.

- (ii) Das Doppelschichtpotential $\mathbf{D}^\kappa \Psi$ mit $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ ist genau dann eine Lösung von (AD) (vgl. (6.3)) mit gegebenem Randwert $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$, wenn Ψ eine Lösung des RIGL-Systems

$$-\frac{1}{2} \Psi + \mathbf{D}^{\kappa \bullet} \Psi = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{6.18}$$

darstellt.

Beweis: Ist $(\mathbf{u}, p) = \mathbf{D}^\kappa \Psi$ eine Lösung von (ID) bzw. (AD), so gilt

$$\mathbf{b} = (\mathbf{D}^{\kappa \bullet} \Psi)^i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{b} = (\mathbf{D}^{\kappa \bullet} \Psi)^a.$$

Die Sprungrelationen (5.15) des Doppelschichtpotentials implizieren dann das RIGL-System (6.17) bzw. (6.18).

Genügt andererseits Ψ dem RIGL-System (6.17) bzw. (6.18), so stimmt das Vektorfeld $\mathbf{D}^{\kappa \bullet} \Psi$ wiederum wegen (5.15) mit \mathbf{b} auf $\partial\Omega$ überein. Außerdem gilt $\mathcal{O} \mathbf{D}^\kappa \Psi = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$ und $\mathbf{D}^\kappa \Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)^4$ sowie $\mathbf{D}^{\kappa \bullet} \Psi \in C(\bar{\Omega})^3 \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)^3$ (vgl. Satz 5.5 und Satz 5.11), d.h., das Doppelschichtpotential $\mathbf{D}^\kappa \Psi$ löst (ID) bzw. (AD). \square

Satz 6.5

(i) Das Einfachschichtpotential $\mathbf{E}^{\kappa^*}\Psi$ mit $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ ist genau dann eine Lösung von (IN^*) (vgl. (6.6)) mit gegebenem Randwert $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$, wenn Ψ eine Lösung des RIGL-Systems

$$-\frac{1}{2}\Psi + \mathbf{H}^{\kappa^*\bullet}\Psi = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (6.19)$$

darstellt.

(ii) Das Einfachschichtpotential $\mathbf{E}^{\kappa^*}\Psi$ mit $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ ist genau dann eine Lösung von (AN^*) (vgl. (6.8)) mit gegebenem Randwert $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$, wenn Ψ eine Lösung des RIGL-Systems

$$\frac{1}{2}\Psi + \mathbf{H}^{\kappa^*\bullet}\Psi = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (6.20)$$

darstellt.

Beweis: Ist $(\mathbf{u}, p) = \mathbf{E}^{\kappa^*}\Psi$ eine Lösung von (IN^*) bzw. (AN^*) , so gilt

$$\mathbf{b} = (T^{\kappa^*}(\mathbf{E}^{\kappa^*}\Psi)\mathbf{n})^i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{b} = (T^{\kappa^*}(\mathbf{E}^{\kappa^*}\Psi)\mathbf{n})^a.$$

Definition 5.14 der Oseen-Normalspannungen des adjungierten Einfachschichtpotentials sowie ihre Sprungrelationen (5.31) implizieren dann das RIGL-System (6.19) bzw. (6.20).

Genügt andererseits Ψ dem RIGL-System (6.19) bzw. (6.20), so gilt wegen der Sprungrelationen (5.31)

$$(T^{\kappa^*}(\mathbf{E}^{\kappa^*}\Psi)\mathbf{n})^i = (\mathbf{H}^{\kappa^*\bullet}\Psi)^i = -\frac{1}{2}\Psi + \mathbf{H}^{\kappa^*\bullet}\Psi = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega$$

bzw.

$$(T^{\kappa^*}(\mathbf{E}^{\kappa^*}\Psi)\mathbf{n})^a = (\mathbf{H}^{\kappa^*\bullet}\Psi)^a = \frac{1}{2}\Psi + \mathbf{H}^{\kappa^*\bullet}\Psi = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

d.h., $\mathbf{E}^{\kappa^*}\Psi$ genügt der Neumann-Bedingung auf dem Rand. Außerdem gilt $\mathbf{O}^*\mathbf{E}^{\kappa^*}\Psi = 0$ außerhalb des Randes $\partial\Omega$ und $\mathbf{E}^{\kappa^*}\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)^4$ sowie $\mathbf{H}^{\kappa^*\bullet}\Psi$ ist von innen und außen auf $\partial\Omega$ stetig fortsetzbar (vgl. Satz 5.17 und Satz 5.23). Damit löst das adjungierte Einfachschichtpotential $\mathbf{E}^{\kappa^*}\Psi$ das Problem (IN^*) bzw. (AN^*) . \square

Satz 6.6 Die Operatoren $\mathbf{D}^{\kappa^*}, \mathbf{H}^{\kappa^*\bullet} : C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)$ sind zueinander adjungiert bzgl. der Bilinearform

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle := \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^3 f_i g_i \, d\sigma,$$

d.h., es gilt

$$\langle \mathbf{D}^{\kappa^*}\Psi, \mathbf{\Lambda} \rangle = \langle \Psi, \mathbf{H}^{\kappa^*\bullet}\mathbf{\Lambda} \rangle$$

für alle $\Psi, \mathbf{\Lambda} \in C(\partial\Omega)^3$.

Beweis: Seien $\Psi, \Lambda \in C(\partial\Omega)^3$. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{D}^{\kappa\bullet}\Psi, \Lambda \rangle &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{D}^{\kappa\bullet}\Psi(x) \cdot \Lambda(x) \, do_x \\
&= \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} (D^{\kappa Z}(x, y)\Psi(y)) \cdot \Lambda(x) \, do_y \, do_x \\
&= \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} D_{ik}^{\kappa}(x, y)\Psi_k(y)\Lambda_i(x) \, do_y \, do_x \\
&= \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} H_{ki}^{\kappa*}(y, x)\Lambda_i(x)\Psi_k(y) \, do_x \, do_y \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\partial\Omega} H_{ki}^{\kappa*}(y, x)\Lambda_i(x) \, do_x \right) \Psi_k(y) \, do_y \\
&= \int_{\partial\Omega} \Psi(y) \cdot \mathbf{H}^{\kappa*\bullet}\Lambda(y) \, do_y = \langle \Psi, \mathbf{H}^{\kappa*\bullet}\Lambda \rangle.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir den Satz von Fubini und die Eigenschaft (5.22) verwendet. \square

Nun zeigen wir die Kompaktheit des Operators $\mathbf{D}^{\kappa\bullet} : C(\partial\Omega)^3 \rightarrow C(\partial\Omega)^3$. Der Operator $\mathbf{H}^{\kappa*\bullet} : C(\partial\Omega)^3 \rightarrow C(\partial\Omega)^3$ ist dann ebenso kompakt als der zu $\mathbf{D}^{\kappa\bullet}$ adjungierte Operator (vgl. Satz 1.6).

Satz 6.7 *Der Integraloperator $\mathbf{D}^{\kappa\bullet} : C(\partial\Omega)^3 \rightarrow C(\partial\Omega)^3$ ist kompakt.*

Beweis: Der Integraloperator $\mathbf{D}^{\kappa\bullet} = \mathbf{D}^{\bullet} + \tilde{\mathbf{D}}^{\kappa\bullet}$ (siehe Satz 5.9) besitzt einen schwach singulären Kern $D^Z + \tilde{D}^{\kappa Z}$ (vgl. S. 40, Lemma 5.7 und Lemma 5.8 bzw. Beweis von Satz 5.9). Mit Satz 1.11 folgt dann die Behauptung. \square

Wir haben gezeigt, dass die Operatoren $\mathbf{D}^{\kappa\bullet}$ und $\mathbf{H}^{\kappa*\bullet}$ auf $C(\partial\Omega)^3$ kompakt und zu einander adjungiert sind. D.h., die Fredholmsche Alternative (Satz 1.9) gilt für die RIGL-Systeme (6.17) - (6.20). Wir betrachten zuerst das zueinander adjungierte Paar (6.17) und (6.20), d.h., die zu (ID) und (AN*) gehörenden RIGL-Systeme.

Lemma 6.8 *Die Nullräume der Operatoren*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa\bullet} &: C(\partial\Omega)^3 \rightarrow C(\partial\Omega)^3 \\
\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{H}^{\kappa*\bullet} &: C(\partial\Omega)^3 \rightarrow C(\partial\Omega)^3
\end{aligned}$$

sind eindimensional. Insbesondere gilt

$$\mathcal{N} \left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{H}^{\kappa*\bullet} \right) = \{\alpha \mathbf{n} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad (6.21)$$

Dabei ist \mathbf{n} die ins Äußere von Ω weisende Einheitsnormale.

Beweis: Als Erstes zeigen wir, dass die Normale \mathbf{n} eine Lösung des Systems (6.20) zum Randwert $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ist. Wir rechnen für $x \in \partial\Omega$ nach:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{n}(x) + (\mathbf{H}^{\kappa*\bullet}\mathbf{n})(x) &= \frac{1}{2}\mathbf{n}(x) + \int_{\partial\Omega} H^{\kappa*}(x, y)\mathbf{n}(y) \, do_y \\ &\stackrel{(5.22)}{=} \frac{1}{2}\mathbf{n}(x) + \int_{\partial\Omega} D^{\kappa ZT}(y, x)\mathbf{n}(y) \, do_y \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{n}(x) + \int_{\partial\Omega} D^{ZT}(y, x)\mathbf{n}(y) \, do_y + \int_{\partial\Omega} \tilde{D}^{\kappa ZT}(y, x)\mathbf{n}(y) \, do_y. \end{aligned}$$

Hier haben wir im letzten Schritt Lemma 5.7 benutzt. Mit D bezeichnen wir den Kern des Doppelschichtpotentials für die Stokes-Gleichungen (siehe (3.19)). Wegen

$$D^{ZT}(y, x)\mathbf{n}(y) = -D^Z(x, y)\mathbf{n}(x)$$

sowie mit Hilfe des Stokes-Doppelschichtpotentials konstanter Belegung (3.28) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{n}(x) + (\mathbf{H}^{\kappa*\bullet}\mathbf{n})(x) &= \frac{1}{2}\mathbf{n}(x) - \frac{1}{2}\mathbf{n}(x) + \int_{\partial\Omega} \tilde{D}^{\kappa ZT}(y, x)\mathbf{n}(y) \, do_y \\ &= \int_{\partial\Omega} \tilde{D}^{\kappa ZT}(y, x)\mathbf{n}(y) \, do_y \\ &= \int_{\Omega} \left(\nabla_y \cdot \tilde{D}^{\kappa Z}(y, x) \right)^T dy \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dabei folgt die vorletzte Gleichheit aus dem Satz von Gauß angewandt auf eine stetig differenzierbare 3×3 -Matrix A : $\int_{\partial\Omega} A^T(y)\mathbf{n}(y) \, do_y = \int_{\Omega} (\nabla \cdot A(y))^T dy$. Die letzte Gleichheit gilt wegen $\nabla \cdot E^\kappa = 0$ sowie $\nabla \cdot E = 0$. Dies impliziert

$$\mathbf{n} \in \mathcal{N} \left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{H}^{\kappa*\bullet} \right).$$

Nun zeigen wir, dass jede Lösung $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ des homogenen Systems

$$\left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{H}^{\kappa*\bullet} \right) \Psi = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{6.22}$$

in der Form $\Psi = \alpha\mathbf{n}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann. Sei dazu $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ eine Lösung von (6.22). Dann löst das adjungierte Einfachschichtpotential $\mathbf{E}^{\kappa*}\Psi$ das Problem

(AN*) zum Randwert $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, denn $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi$ löst das adjungierte Oseen-System und erfüllt die homogene Neumann-Randbedingung wegen

$$T^{\kappa^*}(\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi) \mathbf{n} = (\mathbf{H}^{\kappa^* \bullet} \Psi)^a = \frac{1}{2} \Psi + \mathbf{H}^{\kappa^* \bullet} \Psi = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Außerdem erfüllt $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi$ wegen Lemma 5.24 die Abklingbedingungen (6.16) und fällt somit in die Eindeigkeitsklasse der Lösungen von (AN*). Da dieses aber auch durch $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$ gelöst wird, gilt $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi = \mathbf{0}$ in Ω^* . Wegen der Stetigkeit von $\mathbf{E}^{\kappa^* \bullet} \Psi$ im \mathbb{R}^3 folgt

$$\mathbf{E}^{\kappa^* \bullet} \Psi = \mathbf{0} \quad \text{in } \overline{\Omega^*}.$$

Darüber hinaus löst $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi$ das Problem (ID*) zum Randwert $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, da

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^*(\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi) &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{E}^{\kappa^* \bullet} \Psi &= \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

gilt. Wegen der Eindeigkeitsaussage (siehe Satz 6.3) für (ID*) gilt dann

$$\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ c \end{pmatrix} \quad \text{in } \Omega$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Es folgt nun

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}^{\kappa^* \bullet} \Psi)^a &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{H}^{\kappa^* \bullet} \Psi)^i &= (T^{\kappa^*}(\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi) \mathbf{n})^i = -c \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Mit den Sprungrelationen (5.31) erhalten wir schließlich

$$-c \mathbf{n} = (\mathbf{H}^{\kappa^* \bullet} \Psi)^a - (\mathbf{H}^{\kappa^* \bullet} \Psi)^i = \Psi.$$

Somit haben wir das Lemma bewiesen. □

Lemma 6.8 besagt also, dass bei den RIGL-Systemen (6.17) und (6.20) der zweite Fall der Fredholmschen Alternative (siehe Satz 1.9) auftritt und somit diese nicht eindeutig lösbar sind. Außerdem ist das RIGL-System (6.17) genau dann lösbar, wenn die Bedingung

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$$

erfüllt ist. Diese ist auch notwendig für die Existenz einer Lösung für (ID), d.h., wir erhalten hier keine zusätzliche Kompatibilitätsbedingung an den Randwert \mathbf{b} . Im Fall des RIGL-Systems (6.20) liegt jedoch eine andere Situation vor, denn die Fredholmsche Alternative besagt, dass eine Lösung von (6.20) genau dann existiert, wenn die rechte Seite \mathbf{b} der Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 = 0 \quad \forall \Psi_0 \in \mathcal{N} \left(\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \right) \quad (6.23)$$

genügt. Dies bedeutet, dass wir mit dem verwendeten Potentialansatz $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi$ das Problem (AN*) nur für solche Randwerte \mathbf{b} lösen können, die der Orthogonalitätsbedingung (6.23) genügen. Da wir aber die Existenz einer eindeutigen Lösung von (AN*) für beliebige Randwerte $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$ sichern wollen, werden wir einen gemischten Ansatz aus Einfach- und Doppelschichtpotential für die Lösungen wählen, der für beliebige Randwerte eine Lösung von (AN*) liefert. Hierzu benötigen wir das nächste Lemma.

Lemma 6.9 Für $\mathbf{0} \neq \tilde{\Psi}_0 \in \mathcal{N} \left(\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \right)$ gilt stets

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \tilde{\Psi}_0 \, d\sigma \neq 0. \quad (6.24)$$

Beweis: Analog zu Lemma 6.8 können wir zeigen, dass

$$\dim \mathcal{N} \left(\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \right) = 1$$

gilt. Sei nun $\mathbf{0} \neq \tilde{\Psi}_0 \in \mathcal{N} \left(\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \right)$. Dann löst $\mathbf{D}^{\kappa^*} \tilde{\Psi}_0$ das Problem (ID*) zum Randwert $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, denn es gilt mit (5.30)

$$\left(\mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \tilde{\Psi}_0 \right)^i = \frac{1}{2} \tilde{\Psi}_0 + \mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \tilde{\Psi}_0 = \mathbf{0}.$$

Mit dem Eindeutigkeitsatz 6.3 gilt die Darstellung

$$\mathbf{D}^{\kappa^*} \tilde{\Psi}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{in } \Omega, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (6.25)$$

Wegen

$$\left(T^{\kappa^*} (\mathbf{D}^{\kappa^*} \tilde{\Psi}_0) \mathbf{n} \right)^i = -\alpha \mathbf{n}$$

löst $\mathbf{D}^{\kappa^*} \tilde{\Psi}_0$ das Problem (IN*) zum Randwert $\mathbf{b} = -\alpha \mathbf{n}$. Mit den Regularisierungseigenschaften des Doppelschichtpotentials $\mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \tilde{\Psi}_0$ (vgl. Faxén [Fax29] im Fall $\kappa = 0$) folgt aus $\mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \tilde{\Psi}_0 = -\frac{1}{2} \tilde{\Psi}_0$ auf $\partial\Omega$ schließlich $\tilde{\Psi}_0 \in C^2(\partial\Omega)$ und somit die Stetigkeit der Normalableitungen des Doppelschichtpotentials beim Durchgang durch den Rand:

$$\left(T^{\kappa^*} (\mathbf{D}^{\kappa^*} \tilde{\Psi}_0) \mathbf{n} \right)^i = \left(T^{\kappa^*} (\mathbf{D}^{\kappa^*} \tilde{\Psi}_0) \mathbf{n} \right)^a$$

(vgl. [Lei67] im Fall der Laplace-Gleichung). Damit löst $\mathbf{D}^{\kappa^*} \tilde{\Psi}_0$ auch (AN*) zum Randwert $\mathbf{b} = -\alpha \mathbf{n}$. Wir zeigen nun $\alpha \neq 0$: Andernfalls löst $\mathbf{D}^{\kappa^*} \tilde{\Psi}_0$ sowohl (IN*) als auch (AN*) zum Randwert $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Mit Satz 6.3 folgt dann $\mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \tilde{\Psi}_0 = \mathbf{0}$ in Ω und in Ω^* . Die Sprungrationen (5.30) liefern dann

$$\mathbf{0} = (\mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \tilde{\Psi}_0)^i - (\mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \tilde{\Psi}_0)^a = \tilde{\Psi}_0,$$

was der Annahme $\tilde{\Psi}_0 \neq \mathbf{0}$ widerspricht. Also wir haben gezeigt:

$$\left(T^{\kappa^*}(\mathbf{D}^{\kappa^*} \tilde{\Psi}_0) \mathbf{n} \right)^a = -\alpha \mathbf{n}, \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}. \quad (6.26)$$

Außerdem gilt wegen $(\mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \tilde{\Psi}_0)^i = \mathbf{0}$ mit den Sprungrelationen (5.30) die Beziehung

$$(\mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \tilde{\Psi}_0)^a = -\tilde{\Psi}_0. \quad (6.27)$$

Nun wenden wir die erste Greensche Formel (4.7) auf

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{\kappa^*} \tilde{\Psi}_0$$

in $\Omega_R^* := \Omega^* \cap K_R(0)$ an und erhalten wie im Eindeutigkeitsatz 6.2

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{\partial \Omega_R^*} \left(T^{\kappa^*} \mathbf{u}_p \mathbf{n} \right)^a \cdot (\mathbf{u})^a \, do + \int_{\partial K_R(0)} T^{\kappa^*} \mathbf{u}_p \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, do + 2 \int_{\Omega_R^*} |D\mathbf{u}|^2 \, dy \\ & + \int_{\Omega_R^*} \kappa \mathbf{u} \cdot \partial_1 \mathbf{u} \, dy - \int_{\partial \Omega_R^*} \frac{\kappa}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) n_1 \, do_y. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Integrale verschwinden wie im Beweis des Eindeutigkeitsatzes 6.2. Für $R \rightarrow \infty$ verschwindet auch das Integral über $\partial K_R(0)$ und wir erhalten

$$2 \int_{\Omega_R^*} |D\mathbf{u}|^2 \, dy = \int_{\partial \Omega} \alpha \mathbf{n} \cdot \tilde{\Psi}_0 \, do.$$

Das Integral links ist ungleich Null, woraus die Behauptung des Lemmas folgt: Andernfalls ist \mathbf{u} eine Starrkörperbewegung in Ω^* (vgl. Lemma 6.1). Die Abklingbedingungen des Doppelschichtpotentials $\mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \tilde{\Psi}_0$ (vgl. Lemma 5.25) implizieren dann $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ in Ω^* , also

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}^a = (\mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \tilde{\Psi}_0)^a = -\tilde{\Psi}_0,$$

und dies ist ein Widerspruch zur Annahme $\tilde{\Psi}_0 \neq \mathbf{0}$. □

Analog gilt das folgende Lemma, das wir im Beweis von Satz 6.11 benötigen.

Lemma 6.10 Für $\mathbf{0} \neq \Psi_0 \in \mathcal{N} \left(\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \right)$ gilt

$$\int_{\partial \Omega} \mathbf{n} \cdot \Psi_0 \, do \neq 0. \quad (6.28)$$

Beweis: Analog zu Lemma 6.9 □

Seien nun $\mathbf{0} \neq \Psi_0 \in \mathcal{N} \left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa \bullet \bullet} \right)$ normiert in der Form

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \Psi_0 \, d\sigma = 1$$

und $\mathbf{0} \neq \tilde{\Psi}_0 \in \mathcal{N} \left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa \bullet \bullet} \right)$. Zur Lösung von (AN*) verwenden wir einen gemischten Ansatz der Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} (x) := \mathbf{E}^{\kappa \bullet \bullet} \Psi(x) - \beta \mathbf{D}^{\kappa \bullet \bullet} \tilde{\Psi}_0(x), \quad x \in \Omega^*, \quad (6.29)$$

mit der Konstanten

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \, d\sigma$$

und $\alpha \in \mathbb{R}$ aus (6.26). Es folgt

$$\begin{aligned} (T^{\kappa \bullet \bullet} \mathbf{u}_p \mathbf{n})^a &= (T^{\kappa \bullet \bullet} (\mathbf{E}^{\kappa \bullet \bullet} \Psi) \mathbf{n})^a - \beta (T^{\kappa \bullet \bullet} (\mathbf{D}^{\kappa \bullet \bullet} \tilde{\Psi}_0) \mathbf{n})^a \\ &= (\mathbf{H}^{\kappa \bullet \bullet} \Psi)^a - \beta (-\alpha \mathbf{n}) \\ &= \frac{1}{2} \Psi + \mathbf{H}^{\kappa \bullet \bullet} \Psi + \mathbf{n} \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \, d\sigma. \end{aligned}$$

D.h., (\mathbf{u}, p) ist genau dann eine Lösung von (AN*), wenn $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ das RIGL-System

$$\frac{1}{2} \Psi + \mathbf{H}^{\kappa \bullet \bullet} \Psi = \mathbf{b} - \mathbf{n} \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \, d\sigma =: \tilde{\mathbf{b}} \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (6.30)$$

löst. Die rechte Seite $\tilde{\mathbf{b}}$ genügt jedoch der Orthogonalitätsbedingung (6.23):

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{b}} \cdot \Psi_0 \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \, d\sigma - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \Psi_0 \, d\sigma}_{=1} \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \, d\sigma = 0.$$

Damit existiert für beliebige $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$ eine Lösung $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ des RIGL-Systems (6.30).

Wir haben somit gezeigt, dass die RIGL-Systeme (6.17) für (ID) und (6.30) für (AN*) in $C(\partial\Omega)^3$ gelöst werden können, deren Lösungen jedoch nicht eindeutig sind. Unser Ziel im Folgenden ist es, die hier vorliegenden RIGL-Systeme derart zu modifizieren, dass sie einerseits eindeutig gelöst werden können und andererseits Lösungen für die ursprünglichen RIGL-Systeme (6.17) und (6.30) liefern. Hierzu gilt

Satz 6.11 Sei $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$. Sei

$$\mathbf{P} : C(\partial\Omega)^3 \rightarrow C(\partial\Omega)^3, \quad \mathbf{P}\Psi(x) := \mathbf{n}(x) \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} \Psi(y) \cdot \mathbf{n}(y) \, do_y. \quad (6.31)$$

Für $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ existiert genau eine Lösung $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ des RIGL-Systems

$$\left(\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{D}^{\kappa \bullet} + \lambda \mathbf{P} \right) \Psi = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (6.32)$$

bzw.

$$\left(\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{H}^{\kappa \bullet} + \lambda \mathbf{P} \right) \Psi = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (6.33)$$

Erfüllt die rechte Seite $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$ von (6.32) zusätzlich die Bedingung

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, do = 0, \quad (6.34)$$

so löst die eindeutige Lösung Ψ von (6.32) auch das nicht modifizierte RIGL-System (6.17). Erfüllt die rechte Seite $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$ von (6.33) zusätzlich die Bedingung

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \, do = 0 \quad \forall \Psi_0 \in \mathcal{N} \left(\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{D}^{\kappa \bullet} \right), \quad (6.35)$$

so löst die eindeutige Lösung Ψ von (6.33) auch das nicht modifizierte RIGL-System (6.20).

Beweis: Es gilt für alle $\Psi, \Lambda \in C(\partial\Omega)^3$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}\Psi, \Lambda \rangle &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}\Psi(x) \cdot \Lambda(x) \, do_x & (6.36) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\mathbf{n}(x) \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} \Psi(y) \cdot \mathbf{n}(y) \, do_y \right) \cdot \Lambda(x) \, do_x \\ &= \int_{\partial\Omega} \Psi(y) \cdot \mathbf{n}(y) \, do_y \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\partial\Omega|} \Lambda(x) \cdot \mathbf{n}(x) \, do_x \\ &= \int_{\partial\Omega} \Psi(y) \cdot \left(\mathbf{n}(y) \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} \Lambda(x) \cdot \mathbf{n}(x) \, do_x \right) \, do_y \\ &= \int_{\partial\Omega} \Psi(y) \cdot \mathbf{P}\Lambda(y) \, do_y \\ &= \langle \Psi, \mathbf{P}\Lambda \rangle, \end{aligned}$$

d.h., \mathbf{P} ist selbstadjungiert. Mit Satz 6.6 sind die Operatoren

$$\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa\bullet} + \lambda\mathbf{P} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}I_3 + \mathbf{H}^{\kappa**} + \lambda\mathbf{P}$$

somit zueinander adjungiert. Um zu zeigen, dass die RIGL-Systeme (6.32) und (6.33) eindeutig lösbar sind, genügt es nach der Fredholmschen Alternative zu beweisen, dass eines der zugehörigen homogenen RIGL-Systeme nur durch die triviale Lösung gelöst wird. Dies zeigen wir durch einen Widerspruchsbeweis.

Sei also $0 \neq \Psi \in C(\partial\Omega)^3$ eine Lösung des homogenen Systems

$$\left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa\bullet} + \lambda\mathbf{P}\right)\Psi = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (6.37)$$

Mit Satz 6.6 und Lemma 6.8 folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa\bullet} + \lambda\mathbf{P}\right)\Psi, \mathbf{n} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa\bullet}\right)\Psi, \mathbf{n} \right\rangle + \lambda \langle \mathbf{P}\Psi, \mathbf{n} \rangle \\ &= \langle \Psi, \left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{H}^{\kappa**}\right)\mathbf{n} \rangle + \lambda \langle \mathbf{P}\Psi, \mathbf{n} \rangle = 0 + \lambda \langle \mathbf{P}\Psi, \mathbf{n} \rangle, \end{aligned}$$

also

$$\lambda \langle \mathbf{P}\Psi, \mathbf{n} \rangle = 0.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \lambda \langle \mathbf{P}\Psi, \mathbf{n} \rangle &= \lambda \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}\Psi(x) \cdot \mathbf{n}(x) \, do_x = \lambda \int_{\partial\Omega} \left(\mathbf{n}(x) \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} \Psi(y) \cdot \mathbf{n}(y) \, do_y \right) \cdot \mathbf{n}(x) \, do_x \\ &= \lambda \int_{\partial\Omega} \Psi(y) \cdot \mathbf{n}(y) \, do_y \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{n}(x) \, do_x = \lambda \int_{\partial\Omega} \Psi(y) \cdot \mathbf{n}(y) \, do_y, \end{aligned}$$

also

$$\int_{\partial\Omega} \Psi \cdot \mathbf{n} \, do = 0,$$

da $\lambda \neq 0$. Folglich gilt $\mathbf{P}\Psi = \mathbf{0}$ und somit $\Psi \in \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa\bullet}\right)$. Lemma 6.10 liefert dann einen Widerspruch, d.h., das homogene RIGL-System (6.37) besitzt nur die triviale Lösung und das RIGL-System (6.32) ist eindeutig lösbar.

Ist nun $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ die eindeutige Lösung von (6.32) und gilt zusätzlich $\int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, do = 0$, so erhalten wir $\int_{\partial\Omega} \Psi \cdot \mathbf{n} \, do = 0$, denn es gilt wie oben

$$0 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle = \lambda \langle \mathbf{P}\Psi, \mathbf{n} \rangle = \lambda \int_{\partial\Omega} \Psi \cdot \mathbf{n} \, do.$$

Somit löst Ψ auch das RIGL-System (6.17).

Ist nun $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ die eindeutige Lösung von (6.33) und gilt zusätzlich $\int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \, do = 0$ für alle $\Psi_0 \in \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa\bullet}\right)$, so erhalten wir $\int_{\partial\Omega} \Psi \cdot \mathbf{n} \, do = 0$, denn es gilt mit Lemma 6.10

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{b}, \Psi_0 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{H}^{\kappa\bullet\bullet} \right) \Psi, \Psi_0 \right\rangle + \langle \lambda \mathbf{P}\Psi, \Psi_0 \rangle \\ &= \langle \Psi, \left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa\bullet} \right) \Psi_0 \rangle + \lambda \langle \mathbf{P}\Psi, \Psi_0 \rangle \\ &= \lambda \langle \mathbf{P}\Psi, \Psi_0 \rangle = \lambda \int_{\partial\Omega} \Psi \cdot \mathbf{n} \, do \underbrace{\frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \Psi_0 \, do}_{\neq 0}. \end{aligned}$$

Somit gilt $\mathbf{P}\Psi = \mathbf{0}$ und Ψ löst auch das RIGL-System (6.30). □

Wir fassen nun die obigen Resultate im folgenden Satz zusammen.

Satz 6.12 *Das Doppelschichtpotential $\mathbf{D}^{\kappa}\Psi$ mit der eindeutig bestimmten Lösung $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ des RIGL-Systems*

$$\left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa\bullet} + \lambda \mathbf{P} \right) \Psi = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (6.38)$$

repräsentiert die eindeutige Lösung (wobei der Druck bis auf eine additive Konstante eindeutig ist) von (ID) (vgl. (6.1)), falls $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$ der Bedingung

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, do = 0$$

genügt.

Das Potential

$$\mathbf{E}^{\kappa\bullet}\Psi - \beta \mathbf{D}^{\kappa\bullet}\tilde{\Psi}_0 \quad (6.39)$$

mit $0 \neq \tilde{\Psi}_0 \in \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa\bullet\bullet}\right)$ und

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \, do$$

mit

$$0 \neq \Psi_0 \in \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa\bullet}\right), \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \Psi_0 \, do = 1,$$

sowie

$$\alpha = (\mathbf{D}^{\kappa^*} \tilde{\Psi}_0)_4, \quad (\text{vgl. (6.25)}),$$

und mit der eindeutig bestimmten Lösung $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ des RIGL-Systems

$$\left(\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{H}^{\kappa^*} + \lambda \mathbf{P} \right) \Psi = \mathbf{b} - \mathbf{n} \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (6.40)$$

repräsentiert die eindeutige Lösung von (AN^*) (vgl. (6.8)) für beliebige Randwerte $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$.

Beweis: Der erste Teil des Satzes folgt sofort aus Satz 6.2, Satz 6.4 sowie Satz 6.11. Nun zum zweiten Teil. Zunächst löst der Potentialansatz (6.39) das Oseen-System. Die rechte Seite des RIGL-Systems (6.40) erfüllt die Bedingung (6.35), denn es gilt

$$\int_{\partial\Omega} \left(\mathbf{b} - \mathbf{n} \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \right) \cdot \Psi_0 \, do = \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \, do - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \Psi_0 \, do}_{=1} \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \, do = 0.$$

Mit Satz 6.11 löst Ψ dann das RIGL-System

$$\frac{1}{2} \Psi + \mathbf{H}^{\kappa^*} \Psi = \mathbf{b} - \mathbf{n} \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \, do \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Somit folgt dann

$$\begin{aligned} T^{\kappa^*} \left(\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi - \beta \mathbf{D}^{\kappa^*} \tilde{\Psi}_0 \right) \mathbf{n}^a &= (T^{\kappa^*} (\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi) \mathbf{n})^a - \beta (T^{\kappa^*} (\mathbf{D}^{\kappa^*} \tilde{\Psi}_0) \mathbf{n})^a \\ &\stackrel{(6.26)}{=} (\mathbf{H}^{\kappa^*} \Psi)^a - \beta (-\alpha \mathbf{n}) \\ &\stackrel{(5.16)}{=} \frac{1}{2} \Psi + \mathbf{H}^{\kappa^*} \Psi + \mathbf{n} \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \Psi_0 \, do \\ &= \mathbf{b}, \end{aligned}$$

d.h., der gewählte Potentialansatz genügt der Neumann-Bedingung und löst somit das Problem (AN^*) . \square

Für elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist das so genannte Maximum-Prinzip wohlbekannt. Hiermit lässt sich beispielsweise die Eindeutigkeit der Lösungen des inneren Dirichlet-Problems zeigen (siehe [Eva98] im Fall der Laplace-Gleichung und [MSV12] im Fall der skalaren Oseen-Gleichung). Bei Differentialgleichungssystemen ist es allerdings nicht möglich ein Maximum-Prinzip zu beweisen, es besteht jedoch Hoffnung auf eine so genannte Maximum-Modulus-Abschätzung, mit der man auch die Eindeutigkeit der Lösungen des inneren Dirichlet-Problems zeigen kann. Das folgende Resultat ist daher von Interesse.

Satz 6.13 (Max-Modulus-Abschätzung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes C^2 -Gebiet mit zusammenhängendem Rand. Sei (\mathbf{u}, p) eine Lösung von (ID) (siehe 6.1) mit dem Randwert $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$. Dann gibt es ein $C > 0$ mit

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| \leq C \max_{x \in \partial\Omega} |\mathbf{b}(x)|. \quad (6.41)$$

Beweis: Mit Satz 6.4 und Satz 6.11 gilt $(\mathbf{u}, p) = \mathbf{D}^{\kappa} \Psi$ mit der eindeutig bestimmten Lösung $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ des RIGL-Systems

$$\left(\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{D}^{\kappa \bullet} + \lambda \mathbf{P} \right) \Psi = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (6.42)$$

Dabei ist $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}^3$ und der Operator \mathbf{P} in (6.31) definiert. Da das RIGL-System (6.42) nach Satz 6.11 eindeutig lösbar ist, ist der Operator

$$A : C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega), \quad A := \frac{1}{2} I_3 + \mathbf{D}^{\kappa \bullet} + \lambda \mathbf{P}$$

bijektiv. Mit Satz 1.3 ist A^{-1} somit beschränkt und es gilt

$$\Psi = A^{-1} \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \|\Psi\|_{\infty} \leq \|A^{-1}\| \|\mathbf{b}\|_{\infty}.$$

Mit der Darstellung des Kerns von $\mathbf{D}^{\kappa \bullet} \Psi$ aus Lemma 5.7 gilt für alle $x \in \mathbb{R}^3$

$$\int_{\partial\Omega} |D^{\kappa Z}(x, y)| \, do_y \leq \int_{\partial\Omega} |D^Z(x, y)| \, do_y + \int_{\partial\Omega} |\tilde{D}^{\kappa Z}(x, y)| \, do_y.$$

Wir werden sehen, dass die beiden Integrale auf der rechten Seite durch eine von x unabhängige Konstante abgeschätzt werden können. Für das erste Integral gilt nämlich mit (3.24) die Abschätzung

$$\int_{\partial\Omega} |D^Z(x, y)| \, do_y = \int_{\partial\Omega} \frac{3}{4\pi} \frac{|(x-y) \cdot \mathbf{n}(y)|}{|x-y|^3} \, do_y \leq C_1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

mit einer Konstanten C_1 , die die letzte Abschätzung erfüllt (vgl. [Fol01] (S. 125-126)).

Für das zweite Integral machen wir eine Fallunterscheidung. Gilt $x \in \{z \in \mathbb{R}^3, \text{dist}(z, \partial\Omega) > 1\}$, so folgt mit Lemma 5.8

$$\int_{\partial\Omega} |\tilde{D}^{\kappa Z}(x, y)| \, do_y \leq \int_{\partial\Omega} C \, do_y = C |\partial\Omega|.$$

Andererseits ist das Integral nach Satz 1.2 stetig, da sein Kern wegen Lemma 5.8 der Bedingung (1.3) genügt. Das Integral nimmt deswegen in $U := \{z \in \mathbb{R}^3, \text{dist}(z, \partial\Omega) \leq 1\}$ sein Maximum an. Es folgt

$$\int_{\partial\Omega} |\tilde{D}^{\kappa Z}(x, y)| \, do_y \leq \int_{\partial\Omega} \hat{C} \frac{1}{|x-y|} + \tilde{C} \, do_y \leq \max_{x \in U} \int_{\partial\Omega} \hat{C} \frac{1}{|x-y|} \, do_y + \tilde{C} |\partial\Omega|.$$

Setzt man

$$C_2 := \max\{C|\partial\Omega|, \max_{x \in U} \int_{\partial\Omega} \hat{C} \frac{1}{|x-y|} do_y + \tilde{C}|\partial\Omega|\},$$

so folgt

$$\int_{\partial\Omega} |D^{\kappa Z}(x, y)| do_y \leq C_1 + C_2,$$

wobei die beiden Konstanten unabhängig von x sind.

Zusammenfassend folgt

$$\begin{aligned} \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| &= \max_{x \in \bar{\Omega}} |\mathbf{D}^{\kappa\bullet}\Psi(x)| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |\mathbf{D}^{\kappa\bullet}A^{-1}\mathbf{b}(x)| \\ &= \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \int_{\partial\Omega} D^{\kappa Z}(x, y) A^{-1}\mathbf{b}(y) do_y \right| \\ &\leq \max_{x \in \bar{\Omega}} \int_{\partial\Omega} |D^{\kappa Z}(x, y)| \|A^{-1}\| \max_{y \in \partial\Omega} |\mathbf{b}(y)| do_y \\ &\leq \|A^{-1}\| (C_1 + C_2) \max_{y \in \partial\Omega} |\mathbf{b}(y)|. \end{aligned}$$

□

Anschließend untersuchen wir nun (AD) (vgl. (6.3)) und (IN*) (vgl. (6.6)).

Lemma 6.14 *Für die Nullräume der Operatoren*

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa\bullet} &: C(\partial\Omega)^3 \rightarrow C(\partial\Omega)^3, \\ -\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{H}^{\kappa*\bullet} &: C(\partial\Omega)^3 \rightarrow C(\partial\Omega)^3 \end{aligned}$$

gilt

$$\mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{D}^{\kappa\bullet}\right) = \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{H}^{\kappa*\bullet}\right) = \{\mathbf{0}\}. \quad (6.43)$$

Beweis: Sei $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ eine Lösung von

$$\left(-\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{H}^{\kappa*\bullet}\right)\Psi = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (6.44)$$

Dann löst das adjungierte Einfachschichtpotential $\mathbf{E}^{\kappa*\bullet}\Psi$ das Problem (IN*) zum Randwert $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, denn mit Satz 5.17 ist $\mathbf{E}^{\kappa*\bullet}\Psi$ eine Lösung des adjungierten Oseen-Systems und wegen

$$T^{\kappa*}(\mathbf{E}^{\kappa*\bullet}\Psi)\mathbf{n} = (\mathbf{H}^{\kappa*\bullet}\Psi)^i \stackrel{(5.31)}{=} \left(-\frac{1}{2}I_3 + \mathbf{H}^{\kappa*\bullet}\right)\Psi = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega$$

erfüllt $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi$ die homogene Neumann-Randbedingung. Mit dem Eindeutigkeitsatz 6.3 gilt dann $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi = \mathbf{0}$ in Ω und die Stetigkeit von $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi$ liefert $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi = \mathbf{0}$ in $\bar{\Omega}$. D.h., $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi$ löst auch (AN*) mit Randwert $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, und da $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi$ auch den Abklingbedingungen (6.16) genügt (siehe Lemma 5.24), fällt $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi$ in die Eindeigkeitsklasse von (AN*). Dies impliziert $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi = \mathbf{0}$ in Ω^* und somit

$$(\mathbf{H}^{\kappa^* \bullet} \Psi)^a = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Mit den Sprungrelationen (5.31) erhalten wir schließlich

$$\Psi = (\mathbf{H}^{\kappa^* \bullet} \Psi)^a - (\mathbf{H}^{\kappa^* \bullet} \Psi)^i = \mathbf{0},$$

d.h., $\mathcal{N} \left(-\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{H}^{\kappa^* \bullet} \right) = \{\mathbf{0}\}$. Mit der Fredholmschen Alternative besitzt dann das zu (6.44) adjungierte RIGL-System

$$\left(-\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \right) \Psi = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega$$

(vgl. Satz 6.6) ebenso nur die triviale Lösung. Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Satz 6.15 *Das Doppelschichtpotential $\mathbf{D}^{\kappa} \Psi$ mit der eindeutig bestimmten Lösung $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ des RIGL-Systems*

$$\left(-\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{D}^{\kappa^* \bullet} \right) \Psi = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{6.45}$$

repräsentiert die eindeutige Lösung von (AD) (vgl. (6.3)) für beliebige Randwerte $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$.

Das adjungierte Einfachschichtpotential $\mathbf{E}^{\kappa^*} \Psi$ mit der eindeutig bestimmten Lösung $\Psi \in C(\partial\Omega)^3$ des RIGL-Systems

$$\left(-\frac{1}{2} I_3 + \mathbf{H}^{\kappa^* \bullet} \right) \Psi = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{6.46}$$

repräsentiert die eindeutige Lösung von (IN*) (vgl. (6.6)) für beliebige Randwerte $\mathbf{b} \in C(\partial\Omega)^3$.

Beweis: Die Aussage folgt mit Satz 6.2, Satz 6.3, Satz 6.4, Satz 6.5, Lemma 6.14 sowie der Fredholmschen Alternative (vgl. Satz 1.9). \square

7 Randwertaufgaben in Gebieten mit Rissen

In diesem Kapitel betrachten wir eine Randwertaufgabe für das Oseen-System in einem beschränkten Gebiet G mit einem Riss S , indem wir die Dirichlet-Bedingung auf dem Rand ∂G des Gebietes ohne den Riss und Sprünge der Geschwindigkeit, sowie der Normalkomponenten des Oseen-Spannungstensors auf dem Riss vorschreiben.

Sei also $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes C^2 -Gebiet mit zusammenhängendem Rand ∂G , das einen Riss $S \subset \mathbb{R}^3$ enthält. Den Riss S definieren wir als eine nichtleere kompakte Teilmenge der Oberfläche eines beschränkten C^2 -Gebietes $V \subset \mathbb{R}^3$ mit zusammenhängendem Rand ∂V . Wir lassen zu, dass der Riss S bis zum Rand ∂G des Gebietes reicht, d.h., wir setzen $S \subset \partial V \cap \overline{G}$, und wir schließen auf dem Rand des Gebietes verlaufende „Risse“ aus, d.h., wir fordern $\overline{G \cap S} = S$. Das zu V gehörende Außengebiet bezeichnen wir mit V^* , also $V^* := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{V}$, und das Gebiet G ohne den Riss bezeichnen wir mit Ω , also $\Omega := G \setminus S$ (vgl. Abbildung 7). Damit definieren wir die folgende Randwertaufgabe:

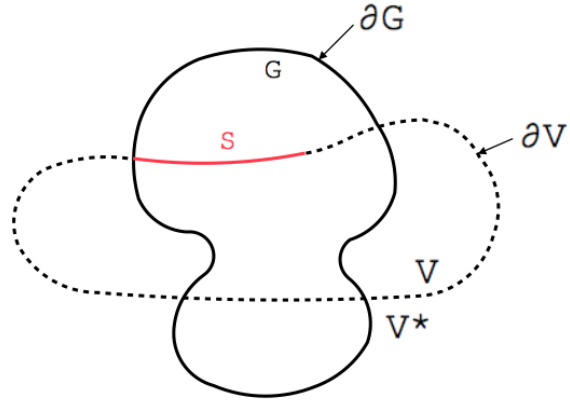


Abbildung 7: Gebiet G mit Riss S .

Inneres Dirichlet-Problem mit Riss (IDR)

Gesucht ist ein Vektorfeld $\mathbf{v} \in C^2(\Omega)^3 \cap C(\overline{\Omega \setminus S})^3$, das auf $\overline{V \cap \Omega}$ und $\overline{V^* \cap \Omega}$ und dessen Gradient $\nabla \mathbf{v}$ auf $\overline{V \cap G}$ und $\overline{V^* \cap G}$ stetig fortsetzbar ist, sowie eine Funktion $q \in C^1(\Omega)$, die auf $\overline{V \cap G}$ und $\overline{V^* \cap G}$ stetig fortsetzbar ist, mit

$$\mathcal{O}_q^{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (7.1)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus S, \quad (7.2)$$

$$\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^a = \mathbf{g} \quad \text{auf } S, \quad (7.3)$$

$$\left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right)^i - \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right)^a = \mathbf{h} \quad \text{auf } S \cap G. \quad (7.4)$$

Dabei sind $\mathbf{f} \in C(\partial\Omega \setminus S)^3$, $\mathbf{g} \in C(S)^3$ und $\mathbf{h} \in C(S \cap G)^3$ vorgegeben.

Mit den Indizes i bzw. a bezeichnen wir wieder den Grenzwert der betreffenden Funktion von $V \cap G$ bzw. $V^* \cap G$ auf den Riss S , d.h., es gilt

$$\mathbf{u}^i(x) = \lim_{V \cap G \ni z \rightarrow x \in S} \mathbf{u}(z),$$

$$\mathbf{u}^a(x) = \lim_{V^* \cap G \ni z \rightarrow x \in S} \mathbf{u}(z).$$

Zunächst einmal existiert eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (IDR):

Satz 7.1 *Eine Lösung des Problems (IDR) kann nur existieren, wenn die Kompatibilitätsbedingung*

$$\int_{\partial\Omega \setminus S} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, do + \int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, do = 0 \quad (7.5)$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnet \mathbf{n} die ins Äußere von Ω bzw. von V weisende Einheitsnormale.

Beweis: Sei (\mathbf{v}, q) eine Lösung des Problems (IDR). Mit dem Satz von Gauß folgt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dy = \int_{V \cap G} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dy + \int_{V^* \cap G} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dy \\ &= \int_{\overline{V} \cap \partial G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, do + \int_{\partial V \cap G} \mathbf{v}^i \cdot \mathbf{n} \, do + \int_{\overline{V^*} \cap \partial G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, do + \int_{\partial V^* \cap G} \mathbf{v}^a \cdot \mathbf{n} \, do \\ &= \int_{\partial\Omega \setminus S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, do + \int_S \mathbf{v}^i \cdot \mathbf{n} \, do - \int_S \mathbf{v}^a \cdot \mathbf{n} \, do \\ &= \int_{\partial\Omega \setminus S} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, do + \int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, do. \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz gibt Auskunft über den Zusammenhang der Lösungen von (ID) und (IDR), wenn die auf dem Riss vorgegebenen Sprünge verschwinden.

Satz 7.2 *Sei (\mathbf{v}, q) eine Lösung des Problems (IDR) mit $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Dann kann (\mathbf{v}, q) auf G fortgesetzt werden, so dass (\mathbf{v}, q) eine Lösung des Oseen-Systems in G darstellt. Gilt zusätzlich $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, dann ist $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ und q konstant.*

Beweis: Sei $x \in S \cap G$ ein Punkt im Inneren des Risses. Wir wählen $r > 0$ so klein, dass $|x - y| > r$ für alle $y \in \partial G$ gilt. Dann trennt ∂V die Kugel $K_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^3, |x - y| < r\}$ in zwei Komponenten $K := K_r(x) \cap V$ und $K^* := K_r(x) \cap V^*$, so dass $\partial K \cap \partial K^* = \partial V \cap K_r(x)$ gilt. Sei $z \in K$ beliebig und sei $\rho > 0$ so klein, dass $K_\rho(z) \subset K$ gilt (vgl. Abbildung 8). Dann löst nach Konstruktion (\mathbf{v}, q) das Oseen-System in $K_\rho(z)$, und die Darstellungsformel (4.55) liefert

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} (z) &= - \int_{\partial K_\rho(z)} E^{\kappa S}(z - y) \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right) (y) \, do_y \\ &\quad + \int_{\partial K_\rho(z)} \left(T_y^{\kappa*} E^{\kappa}(z - y) \mathbf{n}(y) \right)^T \mathbf{v}(y) \, do_y. \end{aligned} \quad (7.6)$$

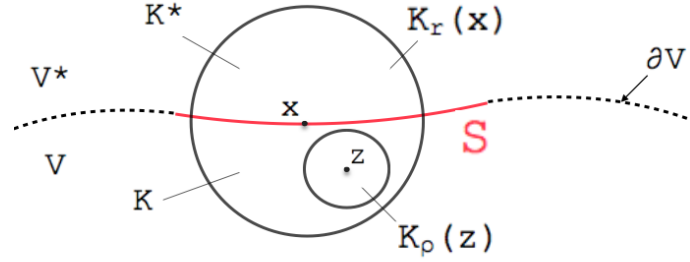


Abbildung 8:

Wegen $z \notin \overline{K \setminus K_\rho(z)}$ und $\partial(K \setminus K_\rho(z)) = \partial K_\rho(z) \cup \partial K$ liefert Korollar 4.21

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} &= - \int_{\partial K} E^{\kappa S}(z-y) \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right) (y) \, do_y \\
 &+ \int_{\partial K} \left(T_y^{\kappa*} E^{\kappa}(z-y) \mathbf{n}(y) \right)^T \mathbf{v}(y) \, do_y \\
 &+ \int_{\partial K_\rho(z)} E^{\kappa S}(z-y) \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right) (y) \, do_y \\
 &- \int_{\partial K_\rho(z)} \left(T_y^{\kappa*} E^{\kappa}(z-y) \mathbf{n}(y) \right)^T \mathbf{v}(y) \, do_y.
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Dabei resultiert der Vorzeichenwechsel in den beiden letzten Integralen aus der Richtungsänderung der Normalen \mathbf{n} , die hier die äußere Normale bzgl. $K_\rho(z)$ bezeichnet. Analog erhält man wegen $z \notin \overline{K^*}$ die Darstellung

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} &= - \int_{\partial K^*} E^{\kappa S}(z-y) \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right) (y) \, do_y \\
 &+ \int_{\partial K^*} \left(T_y^{\kappa*} E^{\kappa}(z-y) \mathbf{n}(y) \right)^T \mathbf{v}(y) \, do_y.
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Durch Addition von (7.6), (7.7) und (7.8) verschwinden die Integrale über $\partial K_\rho(z)$. Darüber hinaus verschwinden die Integrale über den Randanteil $\partial K \cap \partial K^*$ wegen des Vorzeichenwechsels der Normalen und wegen der Bedingungen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}^i - \mathbf{v}^a &= \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial K \cap \partial K^*, \\
 \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right)^i - \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right)^a &= \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial K \cap \partial K^*,
 \end{aligned}$$

nach Voraussetzung. Man erhält folglich in $z \in K$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} (z) &= - \int_{\partial K_r(x)} E^{\kappa S}(z-y) \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right) (y) do_y \\ &\quad + \int_{\partial K_r(x)} \left(T_y^{\kappa*} E^{\kappa}(z-y) \mathbf{n}(y) \right)^T \mathbf{v}(y) do_y \\ &=: - \mathbf{E}_{K_r(x)}^{\kappa} \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right) (z) + \mathbf{D}_{K_r(x)}^{\kappa} \mathbf{v}(z), \end{aligned} \quad (7.9)$$

wobei wir mit $\mathbf{E}_{K_r(x)}^{\kappa} \Psi$ das Einfachschichtpotential und mit $\mathbf{D}_{K_r(x)}^{\kappa} \Psi$ das Doppelschichtpotential mit Belegung Ψ bzgl. $K_r(x)$ bezeichnen.

Analog erhalten wir für $z \in K^*$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} (z) &= - \int_{\partial K_r(x)} E^{\kappa S}(z-y) \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right) (y) do_y \\ &\quad + \int_{\partial K_r(x)} \left(T_y^{\kappa*} E^{\kappa}(z-y) \mathbf{n}(y) \right)^T \mathbf{v}(y) do_y \\ &= - \mathbf{E}_{K_r(x)}^{\kappa} \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right) (z) + \mathbf{D}_{K_r(x)}^{\kappa} \mathbf{v}(z). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Für den Grenzwert $K \ni z \rightarrow s \in S \cap K_r(x)$ folgt dann

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix}^i (s) = \lim_{K \ni z \rightarrow s \in S \cap K_r(x)} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} (z) = - \mathbf{E}_{K_r(x)}^{\kappa} \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right) (s) + \mathbf{D}_{K_r(x)}^{\kappa} \mathbf{v}(s),$$

und für den Grenzwert $K^* \ni z \rightarrow s \in S \cap K_r(x)$ folgt ebenso

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix}^a (s) = \lim_{K^* \ni z \rightarrow s \in S \cap K_r(x)} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} (z) = - \mathbf{E}_{K_r(x)}^{\kappa} \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right) (s) + \mathbf{D}_{K_r(x)}^{\kappa} \mathbf{v}(s).$$

Beide Potentiale rechts sind stetig in $K_r(x)$, da das Einfachschichtpotential im \mathbb{R}^3 stetig ist und das Doppelschichtpotential bzgl. $K_r(x)$ in $K_r(x)$ ebenso stetig ist. D.h., wir erhalten für alle $z \in K_r(x)$ die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} (z) = - \mathbf{E}_{K_r(x)}^{\kappa} \left(T^{\kappa} \mathbf{v}_q \mathbf{n} \right) (z) + \mathbf{D}_{K_r(x)}^{\kappa} \mathbf{v}(z).$$

Also gilt $(\mathbf{v}, q) \in C^\infty(K_r(x))$, da bei den Potentialen die Integration über $\partial K_r(x)$ erfolgt und daher keine Singularitäten auftreten. Außerdem löst (\mathbf{v}, q) das Oseen-System in $K_r(x)$ und somit in G . Der erste Teil des Satzes ist hiermit bewiesen.

Ist nun zusätzlich $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ in $\partial\Omega \setminus S$, so gilt wegen $\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^a = \mathbf{0}$ auf S die Randbedingung $\mathbf{v} = \mathbf{f} = \mathbf{0}$ auf ∂G . D.h., (\mathbf{v}, q) löst das Problem (ID) (siehe 6.1) in G zum Randwert $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, und der Eindeutigkeitsatz 6.2 impliziert dann $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ und $q = \text{const.}$ \square

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, das Rissproblem (IDR) für das Oseen-System auf das Dirichlet-Problem (ID) zurückzuführen:

Satz 7.3 Seien $\mathbf{g} \in C^2(\partial V)^3$ und $\mathbf{h} \in C^1(\partial V)^3$ mit $\mathbf{g} = \mathbf{h} = \mathbf{0}$ auf $\partial V \setminus S$. Sei $\mathbf{f} \in C(\partial\Omega \setminus S)^3$ stetig fortsetzbar auf $\bar{V} \cap \partial G$ und $\bar{V}^* \cap \partial G$ mit $\mathbf{f}^i - \mathbf{f}^a = \mathbf{g}$ auf $S \cap \partial G$. Es gelte außerdem

$$\int_{\partial\Omega \setminus S} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, do + \int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, do = 0,$$

mit \mathbf{n} als ins Äußere von Ω bzw. V weisende Einheitsnormale. Definiere für $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ r \end{pmatrix} (x) &:= -\mathbf{E}_V^\kappa \mathbf{h}(x) + \mathbf{D}_V^\kappa \mathbf{g}(x) \\ &= -\int_{\partial V} E^{\kappa S}(x-y) \mathbf{h}(y) \, do_y + \int_{\partial V} (T_y^{\kappa*} E^\kappa(x-y) \mathbf{n}(y))^T \mathbf{g}(y) \, do_y. \end{aligned}$$

Sei $\mathbf{b} := \mathbf{f} - \mathbf{w}$ auf $\partial\Omega \setminus S$. Dann gilt: Die Funktion

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ r \end{pmatrix}$$

ist genau dann eine Lösung des Problems (IDR), d.h., es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_q^{\mathbf{v}} &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{f} \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus S, \\ \mathbf{v}^i - \mathbf{v}^a &= \mathbf{g} \quad \text{auf } S, \\ (T_q^{\kappa \mathbf{v}} \mathbf{n})^i - (T_q^{\kappa \mathbf{v}} \mathbf{n})^a &= \mathbf{h} \quad \text{auf } S \cap G, \end{aligned}$$

wenn (\mathbf{u}, p) eine Lösung des Problems (ID) ist, d.h., es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} \quad \text{in } G, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial G. \end{aligned}$$

Beweis: Da das Einfachschichtpotential $\mathbf{E}_V^{\kappa \bullet} \mathbf{h}$ stetig im \mathbb{R}^3 und das Doppelschichtpotential $\mathbf{D}_V^{\kappa \bullet} \mathbf{g}$ stetig fortsetzbar auf $\bar{V} \cap \bar{G}$ und $\bar{V}^* \cap \bar{G}$ ist, gilt für den Geschwindigkeitsanteil $\mathbf{w} \in C(\bar{V} \cap \bar{G})^3 \cap C(\bar{V}^* \cap \bar{G})^3$. Der Druck r und der Gradient $\nabla \mathbf{w}$ sind stetig fortsetzbar auf $\bar{V} \cap G$ und $\bar{V}^* \cap G$ (vgl. [Lei67] im Fall der Laplace-Gleichung). Außerdem gilt mit den Sprungrelationen (5.15) für $x \in S$

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}^i - \mathbf{w}^a)(x) &= -\mathbf{E}_V^{\kappa \bullet} \mathbf{h}(x) + \frac{1}{2} \mathbf{g}(x) + \mathbf{D}_V^{\kappa \bullet} \mathbf{g}(x) \\ &\quad - \left(-\mathbf{E}_V^{\kappa \bullet} \mathbf{h}(x) - \frac{1}{2} \mathbf{g}(x) + \mathbf{D}_V^{\kappa \bullet} \mathbf{g}(x) \right) \\ &= \mathbf{g}(x). \end{aligned} \tag{7.11}$$

Darüber hinaus folgt mit den Sprungrelationen (5.16) für $x \in S \cap G$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
& (T^\kappa \mathbf{w}_r \mathbf{n})^i(x) - (T^\kappa \mathbf{w}_r \mathbf{n})^a(x) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{h}(x) - (T^\kappa(\mathbf{E}_V^\kappa \mathbf{h}) \mathbf{n})(x) + (T^\kappa(\mathbf{D}_V^\kappa \mathbf{g}) \mathbf{n})(x)^i \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathbf{h}(x) + (T^\kappa(\mathbf{E}_V^\kappa \mathbf{h}) \mathbf{n})(x) - (T^\kappa(\mathbf{D}_V^\kappa \mathbf{g}) \mathbf{n})^a(x) \\
&= \mathbf{h}(x).
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Stetigkeit der Oseen-Spannungen des Doppelschichtpotentials $\mathbf{D}_V^\kappa \mathbf{g}$ mit $\mathbf{g} \in C^2(\partial V)$ beim Durchgang durch den Rand ∂V benutzt (vgl. [Lei67] im Fall der Laplace-Gleichung), also

$$\mathbf{g} \in C^2(\partial V) \quad \Rightarrow \quad (T^\kappa(\mathbf{D}_V^\kappa \mathbf{g}) \mathbf{n})^i(x) = (T^\kappa(\mathbf{D}_V^\kappa \mathbf{g}) \mathbf{n})^a(x). \tag{7.13}$$

Darüber hinaus löst (\mathbf{w}, r) das Oseen-System in Ω . Zusammenfassend gilt also: (\mathbf{w}, r) löst das Problem (IDR) zum Randwert \mathbf{w} auf $\partial\Omega \setminus S$.

Sei nun zunächst (\mathbf{v}, q) eine Lösung des Problems (IDR). Dann löst $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{v}, q) - (\mathbf{w}, r)$ wegen $\mathbf{f} - \mathbf{w} = \mathbf{b}$ auf $\partial\Omega \setminus S$ das Problem

$$\begin{aligned}
& \mathcal{O}_p^{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \\
& \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus S, \\
& \mathbf{u}^i - \mathbf{u}^a = \mathbf{0} \quad \text{auf } S, \\
& (T^\kappa \mathbf{u}_p \mathbf{n})^i - (T^\kappa \mathbf{u}_p \mathbf{n})^a = \mathbf{0} \quad \text{auf } S \cap G.
\end{aligned}$$

Mit Satz 7.2 löst dann (\mathbf{u}, p) das Oseen-System in G . Wegen (7.11) und da \mathbf{f} nach Voraussetzungen stetig fortsetzbar ist auf $\overline{V} \cap \partial G$ und $\overline{V^*} \cap \partial G$ mit $\mathbf{f}^i - \mathbf{f}^a = \mathbf{g}$ auf $S \cap \partial G$, kann die Funktion \mathbf{b} zu einer stetigen Funktion auf ∂G fortgesetzt werden:

$$\mathbf{b}^i - \mathbf{b}^a = \mathbf{f}^i - \mathbf{f}^a - (\mathbf{w}^i - \mathbf{w}^a) = \mathbf{g} - \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{auf } S \cap \partial G.$$

Also gilt $\mathbf{u} = \mathbf{b}$ auf ∂G und (\mathbf{u}, p) löst somit das Problem (ID).

Sei nun umgekehrt (\mathbf{u}, p) eine Lösung von (ID) und $(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{u}, p) + (\mathbf{w}, r)$. Dann gilt

$$(\mathbf{v}, q) \in C^2(\Omega), \quad \mathbf{v} \in C(\overline{\Omega} \setminus S) \cap C(\overline{V \cap G})^3 \cap C(\overline{V^* \cap G})^3$$

sowie

$$\nabla \mathbf{v}, q \in C(\overline{V \cap G}) \cap C(\overline{V^* \cap G}).$$

Außerdem löst (\mathbf{v}, q) das Oseen-System in Ω und erfüllt

$$\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus S.$$

Darüber hinaus gelten die Sprünge

$$\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^a = \mathbf{g} \quad \text{auf } S$$

sowie

$$(T^\kappa \mathbf{v}_q \mathbf{n})^i - (T^\kappa \mathbf{v}_q \mathbf{n})^a = (T^\kappa \mathbf{w}_r \mathbf{n})^i - (T^\kappa \mathbf{w}_r \mathbf{n})^a = \mathbf{h} \quad \text{auf } S \cap G.$$

D.h., (\mathbf{v}, q) löst das Problem (IDR). □

8 Anhang

8.1 Berechnungen zur skalaren Oseen-Gleichung

Die Fundamentallösungen e_κ bzw. e_κ^* der skalaren Oseen-Gleichung bzw. der adjungierten skalaren Oseen-Gleichung sind gegeben durch

$$e_\kappa(x) := \frac{1}{4\pi\nu r} e^{-\kappa s/2\nu}, \quad e_\kappa^*(x) := \frac{1}{4\pi\nu r} e^{-\kappa p/2\nu}$$

mit $r := |x|$, $s := r - x_1$ und $p := r + x_1$. Für den Gradienten von e_κ bzw. e_κ^* erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla e_\kappa(x) &= \frac{1}{4\pi\nu} \left(-\frac{x}{r^3} - \frac{k}{2\nu r} \nabla s(x) \right) e^{-\kappa s/2\nu}, \\ \nabla e_\kappa^*(x) &= \frac{1}{4\pi\nu} \left(-\frac{x}{r^3} - \frac{k}{2\nu r} \nabla p(x) \right) e^{-\kappa p/2\nu}, \end{aligned}$$

mit

$$\nabla s(x) = \frac{x}{r} - (1, 0, 0)^T, \quad \nabla p(x) = \frac{x}{r} + (1, 0, 0)^T.$$

Hieraus berechnen wir die Kerne d^κ und $d^{\kappa*}$ der Doppelschichtpotentiale, definiert in (2.30) und (2.31):

$$\begin{aligned} d^\kappa(x, y) &:= \nabla_y^{\kappa*} e_\kappa(x - y) \cdot \mathbf{n}(y) = -\nu \nabla_y e_\kappa(x - y) \cdot \mathbf{n}(y) - \frac{\kappa}{2} e_\kappa(x - y) n_1(y) \\ &= -\nu \frac{1}{4\pi\nu} \left(\frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(y)}{r^3} - \frac{k}{2\nu r} \nabla_y s(x - y) \cdot \mathbf{n}(y) \right) e^{-\kappa s/2\nu} - \frac{\kappa n_1(y)}{8\pi\nu r} e^{-\kappa s/2\nu} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(y)}{r^3} + \frac{k}{2\nu r} \left(-\frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(y)}{r} \right) + \frac{\kappa n_1(y)}{2\nu r} - \frac{\kappa n_1(y)}{2\nu r} \right) e^{-\kappa s/2\nu} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(y)}{r^3} - \frac{k}{2\nu} \frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(y)}{r^2} \right) e^{-\kappa s/2\nu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^{\kappa*}(x, y) &:= \nabla_y^\kappa e_\kappa^*(x - y) \cdot \mathbf{n}(y) = -\nu \nabla_y e_\kappa^*(x - y) \cdot \mathbf{n}(y) + \frac{\kappa}{2} e_\kappa^*(x - y) n_1(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(y)}{r^3} - \frac{k}{2\nu} \frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(y)}{r^2} \right) e^{-\kappa p/2\nu}. \end{aligned}$$

Analog berechnen wir den Kern h^κ der Oseen-Normalableitung des Einfachschichtpotentials e_κ , definiert in (2.32), bzw. den Kern $h^{\kappa*}$ der adjungierten Oseen-Normalableitung des adjungierten Einfachschichtpotentials e_κ^* , definiert in (2.33):

$$\begin{aligned} h^\kappa(x, y) &:= \nabla_x^\kappa e_\kappa(x - y) \cdot \mathbf{n}(x') = -\nu \nabla_x e_\kappa(x - y) \cdot \mathbf{n}(x') + \frac{\kappa}{2} e_\kappa(x - y) n_1(x') \\ &= -\nu \frac{1}{4\pi\nu} \left(-\frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(x')}{r^3} - \frac{k}{2\nu r} \nabla_x s(x - y) \cdot \mathbf{n}(x') \right) e^{-\kappa s/2\nu} + \frac{\kappa n_1(x')}{8\pi\nu r} e^{-\kappa s/2\nu} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(x')}{r^3} + \frac{k}{2\nu r} \left(\frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(x')}{r} \right) - \frac{\kappa n_1(x')}{2\nu r} + \frac{\kappa n_1(x')}{2\nu r} \right) e^{-\kappa s/2\nu} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(x')}{r^3} + \frac{k}{2\nu} \frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(x')}{r^2} \right) e^{-\kappa s/2\nu}, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} h^{\kappa*}(x, y) &:= \nabla_x^{\kappa*} e_{\kappa}^*(x - y) \cdot \mathbf{n}(x') = -\nu \nabla_x e_{\kappa}^*(x - y) \cdot \mathbf{n}(x') - \frac{\kappa}{2} e_{\kappa}^*(x - y) n_1(x') \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(x')}{r^3} + \frac{k}{2\nu} \frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(x')}{r^2} \right) e^{-\kappa p/2\nu}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $x' \in \partial\Omega$ die eindeutig bestimmte Projektion von $x \in U$ auf den Rand $\partial\Omega \in C^2$.

8.2 Berechnungen zum Oseen-System

Lemma 8.1 Für die in Lemma 5.7 definierte Matrix $\tilde{D}^{\kappa Z}$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{kj}^{\kappa}(z, y) &= \frac{d^3\Phi}{ds^3} \left(-\frac{2x_i x_j x_k}{r^3} + \frac{2}{r^2} (\delta_{1j} x_i x_k + \delta_{1k} x_i x_j + \delta_{1i} x_j x_k) + \frac{2s}{r^2} (\delta_{jk} x_i + \delta_{ik} x_j) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2s}{r} (\delta_{jk} \delta_{1i} + \delta_{ik} \delta_{1j}) - \frac{2}{r} (\delta_{1j} \delta_{1k} x_i + \delta_{1i} \delta_{1k} x_j + \delta_{1j} \delta_{1i} x_k) \right) n_i \\ &+ \frac{d^2\Phi}{ds^2} \left(-\frac{6x_i x_j x_k}{r^4} - \frac{2s}{r^3} (\delta_{jk} x_i + \delta_{ik} x_j) - \frac{2}{r^3} (\delta_{1j} x_i x_k + \delta_{1k} x_i x_j + \delta_{1i} x_j x_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{r^2} (\delta_{jk} x_i + \delta_{ik} x_j - \delta_{ij} x_k) - \frac{2}{r} (\delta_{1j} \delta_{ik} + \delta_{1i} \delta_{jk} - \delta_{ij} \delta_{1k}) \right) n_i \\ &- \frac{\kappa}{2} \frac{d^2\Phi}{ds^2} \left(\delta_{jk} \frac{2s}{r} - \frac{x_j x_k}{r^2} + \frac{\delta_{1j} x_k + \delta_{1k} x_j}{r} - \delta_{1j} \delta_{1k} \right) n_1 \\ &- \frac{\kappa}{2} \frac{d\Phi}{ds} \left(\frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{x_k x_j}{r^3} \right) n_1 \\ &+ \left(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{8\pi} \right) \left(\frac{2\delta_{ij} x_k}{r^3} - \frac{6x_k x_j x_i}{r^5} \right) n_i \end{aligned}$$

für $k, j \in \{1, 2, 3\}$ und $x := z - y$.

Beweis: Für $k, j \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\begin{aligned} \partial_i \tilde{E}_{jk}^{\kappa}(x) &= \frac{d^3\Phi}{ds^3} \left(\frac{x_i}{r} - \delta_{1i} \right) \left(\delta_{jk} \frac{2s}{r} - \frac{x_j x_k}{r^2} + \frac{\delta_{1j} x_k + \delta_{1k} x_j}{r} - \delta_{1j} \delta_{1k} \right) \\ &+ \frac{d^2\Phi}{ds^2} \left(\frac{2\delta_{jk} x_i}{r^2} - \frac{2\delta_{jk} \delta_{1i}}{r} - \frac{s x_i}{r^3} - \frac{\delta_{ij} x_k + \delta_{ik} x_j}{r^2} + \frac{2x_i x_j x_k}{r^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta_{1j} \delta_{ik} + \delta_{1k} \delta_{ij}}{r} - \frac{\delta_{1j} x_k x_i + \delta_{1k} x_j x_i}{r^3} + \left(\frac{x_i}{r} - \delta_{1i} \right) \left(\delta_{jk} \frac{1}{r} + \frac{x_j x_k}{r^3} \right) \right) \\ &+ \left(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{8\pi} \right) \left(-\delta_{jk} \frac{x_i}{r^3} + \frac{\delta_{ij} x_k + \delta_{ik} x_j}{r^3} - \frac{3x_k x_j x_i}{r^5} \right) \\ &=: S_1^{ijk} + S_2^{ijk} + S_3^{ijk}, \end{aligned}$$

sowie

$$\partial_j \tilde{E}_{ik}^{\kappa}(x) = S_1^{jik} + S_2^{jik} + S_3^{jik}.$$

Summiert man $\partial_i \tilde{E}_{jk}^\kappa$ und $\partial_j \tilde{E}_{ik}^\kappa$, so erhält man für die einzelnen Summanden

$$S_1^{ijk} + S_1^{jik} = \frac{d^3\Phi}{ds^3} \left(-\frac{2x_i x_j x_k}{r^3} + \frac{2}{r^2} (\delta_{1j} x_i x_k + \delta_{1k} x_i x_j + \delta_{1i} x_j x_k) + \frac{2s}{r^2} (\delta_{jk} x_i + \delta_{ik} x_j) \right. \\ \left. - \frac{2s}{r} (\delta_{jk} \delta_{1i} + \delta_{ik} \delta_{1j}) - \frac{2}{r} (\delta_{1j} \delta_{1k} x_i + \delta_{1i} \delta_{1k} x_j + \delta_{1j} \delta_{1i} x_k) \right)$$

und

$$S_2^{ijk} + S_2^{jik} = \frac{d^2\Phi}{ds^2} \left(-\frac{6x_i x_j x_k}{r^4} - \frac{2s}{r^3} (\delta_{jk} x_i + \delta_{ik} x_j) - \frac{2}{r^3} (\delta_{1j} x_i x_k + \delta_{1k} x_i x_j + \delta_{1i} x_j x_k) \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2} (\delta_{jk} x_i + \delta_{ik} x_j - \delta_{ij} x_k) - \frac{2}{r} (\delta_{1j} \delta_{ik} + \delta_{1i} \delta_{jk} - \delta_{ij} \delta_{1k}) \right)$$

sowie

$$S_3^{ijk} + S_3^{jik} = \left(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{8\pi} \right) \left(\frac{2\delta_{ij} x_k}{r^3} - \frac{6x_k x_j x_i}{r^5} \right).$$

Es gilt außerdem

$$-\frac{\kappa}{2} (E_{jk} + \tilde{E}_{jk}^\kappa) \delta_{1i} = -\frac{\kappa}{2} \frac{d\Phi}{ds} \left(\frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{x_k x_j}{r^3} \right) \delta_{1i} \\ - \frac{\kappa}{2} \frac{d^2\Phi}{ds^2} \left(\delta_{jk} \frac{2s}{r} - \frac{x_j x_k}{r^2} + \frac{\delta_{1j} x_k + \delta_{1k} x_j}{r} - \delta_{1j} \delta_{1k} \right) \delta_{1i}.$$

Mit Lemma 5.7 folgt dann die Behauptung. \square

Lemma 8.2 Für die in Lemma 5.19 definierte Matrix $\tilde{H}^{\kappa*}$ gilt

$$\tilde{H}_{ki}^{\kappa*}(z, y) = \frac{d^3\Phi}{dp^3} \left(\frac{2x_i x_j x_k}{r^3} + \frac{2}{r^2} (\delta_{1k} x_i x_j + \delta_{1i} x_k x_j + \delta_{1j} x_i x_k) - \frac{2p}{r^2} (\delta_{ik} x_j + \delta_{ij} x_k) \right. \\ \left. - \frac{2p}{r} (\delta_{ik} \delta_{1j} + \delta_{ij} \delta_{1k}) + \frac{2}{r} (\delta_{1i} \delta_{1k} x_j + \delta_{1i} \delta_{1j} x_k + \delta_{1j} \delta_{1k} x_i) \right) n_j \\ + \frac{d^2\Phi}{dp^2} \left(\frac{6x_i x_j x_k}{r^4} + \frac{2p}{r^3} (\delta_{ik} x_j + \delta_{ij} x_k) - \frac{2}{r^3} (\delta_{1k} x_i x_j + \delta_{1i} x_k x_j + \delta_{1j} x_i x_k) \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} (\delta_{ik} x_j + \delta_{ij} x_k - \delta_{kj} x_i) - \frac{2}{r} (\delta_{1k} \delta_{ij} + \delta_{1j} \delta_{ik} - \delta_{kj} \delta_{1i}) \right) n_j \\ - \frac{\kappa}{2} \frac{d^2\Phi}{dp^2} \left(\delta_{ik} \frac{2p}{r} - \frac{x_i x_k}{r^2} - \frac{\delta_{1k} x_i + \delta_{1i} x_k}{r} - \delta_{1k} \delta_{1i} \right) n_1 \\ - \frac{\kappa}{2} \frac{d\Phi}{dp} \left(\frac{\delta_{ik}}{r} + \frac{x_k x_i}{r^3} \right) n_1 \\ + \left(\frac{d\Phi}{dp} - \frac{1}{8\pi} \right) \left(-\frac{2\delta_{kj} x_i}{r^3} + \frac{6x_k x_j x_i}{r^5} \right) n_j$$

für $k, i \in \{1, 2, 3\}$ und $x := z - y$.

Beweis: Die Aussage folgt sofort aus Lemma 8.1 und Lemma 5.16. Außerdem wird $s(z, y) = p(y, z)$ für $z, y \in \mathbb{R}$ im Beweis verwendet. \square

Literatur

- [AB08a] Chérif Amrouche and Hamid Bouzit. L^p -inequalities for scalar Oseen potential. *J. Math. Anal. Appl.*, 337(2):753–770, 2008.
- [AB08b] Chérif Amrouche and Hamid Bouzit. The scalar Oseen operator $-\Delta + \partial/\partial x_1$ in \mathbb{R}^2 . *Appl. Math.*, 53(1):41–80, 2008.
- [AF03] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.
- [Alt06] Hans W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [AR07] Chérif Amrouche and Ulrich Razafison. Weighted Sobolev spaces for a scalar model of the stationary Oseen equations in \mathbb{R}^3 . *J. Math. Fluid Mech.*, 9(2):181–210, 2007.
- [AV05] Jürgen Appell and Martin Väth. *Elemente der Funktionalanalysis: Vektorräume, Operatoren und Fixpunktsätze*. Studium : Mathematik. Vieweg+Teubner Verlag, 2005.
- [Bem78] Josef Bemelmans. Eine Aussenraumaufgabe für die instationären Navier-Stokes-Gleichungen. *Math. Z.*, 162(2):145–173, 1978.
- [Cat61] Lamberto Cattabriga. Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 31:308–340, 1961.
- [Deu06] Paul Deuring. On volume potentials related to the time-dependent Oseen system. *WSEAS Trans. Math.*, 5(3):252–259, 2006.
- [Deu08] Paul Deuring. On boundary-driven time-dependent Oseen flows. In *Parabolic and Navier-Stokes equations. Part 1*, volume 81 of *Banach Center Publ.*, pages 119–132. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2008.
- [Deu09] Paul Deuring. Spatial decay of time-dependent Oseen flows. *SIAM J. Math. Anal.*, 41(3):886–922, 2009.
- [DL00] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Volume 5. , Evolution Problems I*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
- [DvW89] Paul Deuring and Wolf von Wahl. Das lineare Stokes-System in \mathbf{R}^3 . II. Das Außenraumproblem. *Bayreuth. Math. Schr.*, (28):1–109, 1989.
- [DvWW88] Paul Deuring, Wolf von Wahl, and Peter Weidemaier. Das lineare Stokes-System in \mathbf{R}^3 . I. Vorlesungen über das Innenraumproblem. *Bayreuth. Math. Schr.*, (27):vi+252, 1988.

- [ES05] Yuko Enomoto and Yoshihiro Shibata. On the rate of decay of the Oseen semigroup in exterior domains and its application to Navier-Stokes equation. *J. Math. Fluid Mech.*, 7(3):339–367, 2005.
- [Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998.
- [Far92] Reinhard Farwig. The stationary exterior 3D-problem of Oseen and Navier-Stokes equations in anisotropically weighted Sobolev spaces. *Math. Z.*, 211(3):409–447, 1992.
- [Fax29] Hilding Faxén. Fredholmsche Integralgleichungen zu der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten i. *Arkiv för Matematik, Astronimi och Fysik*, (21 A. (14)):1–40, 1929.
- [Fin61] Robert Finn. Estimates at infinity for steady state solutions of the Navier-Stokes equations. In *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. IV*, pages 143–148. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.
- [Fin65] Robert Finn. On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 19:363–406, 1965.
- [Fol01] Gerald B. Folland. *Introduction To Partial Differential Equations*. Prentice-Hall Of India Pvt. Limited, 2001.
- [FS98] Reinhard Farwig and Hermann Sohr. Weighted estimates for the Oseen equations and the Navier-Stokes equations in exterior domains. In *Theory of the Navier-Stokes equations*, volume 47 of *Ser. Adv. Math. Appl. Sci.*, pages 11–30. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.
- [Gal11] Giovanni P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2011. Steady-state problems.
- [Gün57] Nikolai M. Günther. *Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957.
- [Hac97] Wolfgang Hackbusch. *Integralgleichungen : Theorie und Numerik ; mit zahlreichen Beispielen und Übungsaufgaben*, volume 68 of *Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1997.
- [KMN13] Stanislav Kračmar, Dagmar Medková, Šárka Nečasová, and Werner Varnhorn. A maximum modulus theorem for the Oseen problem. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 192(6):1059–1076, 2013.
- [KNP01] Stanislav Kračmar, Antonín Novotný, and Milan Pokorný. Estimates of Oseen kernels in weighted L^p spaces. *J. Math. Soc. Japan*, 53(1):59–111, 2001.

- [Kre89] Rainer Kress. *Linear integral equations*, volume 82 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [KS98] Takayuki Kobayashi and Yoshihiro Shibata. On the Oseen equation in the three-dimensional exterior domains. *Math. Ann.*, 310(1):1–45, 1998.
- [Lad69] Olga A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Second English edition, revised and enlarged. Translated from the Russian by Richard A. Silverman and John Chu. Mathematics and its Applications, Vol. 2. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.
- [Lei67] R. Leis. *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. BI-Hochschultaschenbücher, 165/165a. Hochschultaschenbücher - Verl., 1967.
- [Lic68] Leon Lichtenstein. *Grundlagen der Hydromechanik*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 30. Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- [Mar68] Erich Martensen. *Potentialtheorie*. Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Band 12. B. G. Teubner, Stuttgart, 1968.
- [MSV12] Dagmar Medková, Emma Skopin, and Werner Varnhorn. The boundary value problems for the scalar Oseen equation. *Math. Nachr.*, 285(17-18):2208–2221, 2012.
- [MSV13] Dagmar Medková, Emma Skopin, and Werner Varnhorn. The Robin problem for the scalar Oseen equation. *Math. Methods Appl. Sci.*, 36(16):2237–2242, 2013.
- [MV08] Dagmar Medková and Werner Varnhorn. Boundary value problems for the Stokes equations with jumps in open sets. *Appl. Anal.*, 87(7):829–849, 2008.
- [Odv30] Folke K. G. Odqvist. Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten. *Math. Z.*, 32(1):329–375, 1930.
- [Ose27] Carl W. Oseen. *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*. 1927.
- [Pok99] Milan Pokorný. Asymptotic behaviour of solutions to certain pde's describing the flow of fluids. 1999.
- [Sko10] Emma Skopin. Zur Potentialtheorie der skalaren Oseen-Gleichung in \mathbb{R}^3 . 2010.
- [Soh01] Hermann Sohr. *The Navier-Stokes equations : an elementary functional analytic approach*. Birkhäuser Verlag, Basel; Boston, 2001.

-
- [Var91] Werner Varnhorn. An explicit potential theory for the Stokes resolvent boundary value problems in three dimensions. *Manuscripta Math.*, 70(4):339–361, 1991.
- [Var94] Werner Varnhorn. *The Stokes equations*, volume 76 of *Mathematical Research*. Akademie-Verlag, Berlin, 1994.
- [Var04] Werner Varnhorn. The boundary value problems of the Stokes resolvent equations in n dimensions. *Math. Nachr.*, 269/270:210–230, 2004.
- [Vla88] Vasily. S. Vladimirov. *Uravneniya matematicheskoi fiziki*. “Nauka”, Moscow, fifth edition, 1988.
- [Wal71] Wolfgang Walter. *Einführung in die Potentialtheorie*. Bibliographisches Institut, Mannheim-Vienna-Zurich, 1971. Mit einem Kapitel über elliptische Differentialgleichungen 2. Ordnung, B. I.-Hochschulschriften, No 765a*.
- [Wer00] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer. Springer, 2000.

Symbolverzeichnis

Allgemein

A^S	Matrix A ohne letzte Spalte (S. 7)
A^Z	Matrix A ohne letzte Zeile (S. 7)
o, O	Landau-Symbole
\mathbf{n}	Einheitsnormalenvektor
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$	Schwartzscher Raum (S. 47)
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$	Raum der temperierten Distributionen (S. 47)
D	Deformationstensor (S. 33)

Skalare Oseen-Gleichung

$\mathcal{O}, \mathcal{O}^*$	skalare Oseen-Operatoren
$\nabla^\kappa, \nabla^{\kappa*}$	Oseen-Normalableitung (S. 15)
e_κ, e_κ^*	Fundamentallösungen (S. 16)
$e^\kappa\varphi, e^{\kappa*}\psi$	Einfachschichtpotentiale (S. 22)
$d^\kappa\varphi, d^{\kappa*}\psi$	Doppelschichtpotentiale (S. 22)
$d^\kappa(\cdot, \cdot), d^{\kappa*}(\cdot, \cdot)$	Kern von $d^\kappa\varphi$ bzw. $d^{\kappa*}\psi$ (S. 22)
$h^\kappa\varphi, h^{\kappa*}\psi$	Oseen-Normalableitungen der Einfachschichtpotentiale (S. 23)
$h^\kappa(\cdot, \cdot), h^{\kappa*}(\cdot, \cdot)$	Kern von $h^\kappa\varphi$ bzw. $h^{\kappa*}\psi$ (S. 23)

Stokes-System

\mathbf{S}, \mathbf{S}^*	Stokes-Operatoren (S. 33)
T, T^*	Spannungstensoren (S. 33)
E, E^*	Fundamentaltensoren (S. 36)
$\mathbf{E}\Psi, \mathbf{E}^*\Psi$	Einfachschichtpotentiale (S. 37)
$\mathbf{E}^\bullet\Psi, \mathbf{E}^{*\bullet}\Psi$	Geschwindigkeitsanteil von $\mathbf{E}\Psi$ bzw. $\mathbf{E}^*\Psi$ (S. 37)
$\mathbf{D}\Psi, \mathbf{D}^*\Psi$	Doppelschichtpotentiale (S. 38)
$D(\cdot, \cdot), D^*(\cdot, \cdot)$	Kern von $\mathbf{D}\Psi$ bzw. $\mathbf{D}^*\Psi$ (S. 38)
$\mathbf{D}^\bullet\Psi, \mathbf{D}^{*\bullet}\Psi$	Geschwindigkeitsanteil von $\mathbf{D}\Psi$ bzw. $\mathbf{D}^*\Psi$ (S. 38)
$\mathbf{H}^\bullet\Psi, \mathbf{H}^{*\bullet}\Psi$	Normalspannungen der Einfachschichtpotentiale (S. 39)
$H(\cdot, \cdot), H^*(\cdot, \cdot)$	Kern von $\mathbf{H}^\bullet\Psi$ bzw. $\mathbf{H}^{*\bullet}\Psi$ (S. 39)

Oseen-System

$\mathcal{O}, \mathcal{O}^*$	Oseen-Operatoren (S. 41)
$T^\kappa, T^{\kappa*}$	Oseen-Spannungstensoren (S. 42)
$E^\kappa, E^{\kappa*}$	Fundamentaltensoren f (S. 48)
$\mathbf{E}^\kappa\Psi, \mathbf{E}^{\kappa*}\Psi$	Einfachschichtpotentiale (S. 63 bzw. 70)
$\mathbf{E}^{\kappa^\bullet}\Psi, \mathbf{E}^{\kappa^*\bullet}\Psi$	Geschwindigkeitsanteil von $\mathbf{E}^\kappa\Psi$ bzw. $\mathbf{E}^{\kappa*}\Psi$ (S. 63 bzw. 70)
$\mathbf{D}^\kappa\Psi, \mathbf{D}^{\kappa*}\Psi$	Doppelschichtpotentiale (S. 63 bzw. S. 70)

$D^\kappa(\cdot, \cdot), D^{\kappa*}(\cdot, \cdot)$	Kern von $D^\kappa\Psi$ bzw. $D^{\kappa*}\Psi$ (S. 63 bzw. S. 70)
$D^{\kappa\bullet}\Psi, D^{\kappa*\bullet}\Psi$	Geschwindigkeitsanteil von $D^\kappa\Psi$ bzw. $D^{\kappa*}\Psi$ (S. 63 bzw. S. 70)
$H^{\kappa\bullet}\Psi, H^{\kappa*\bullet}\Psi$	Oseen-Normalspannungen der Einfachschichtpotentiale (S. 64 bzw. S. 71)
$H^\kappa(\cdot, \cdot), H^{\kappa*}(\cdot, \cdot)$	Kern von $H^{\kappa\bullet}\Psi$ bzw. $H^{\kappa*\bullet}\Psi$ (S. 64 bzw. S. 71)

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig, ohne unerlaubte Hilfe Dritter angefertigt und andere als die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Dritte waren an der inhaltlichen Erstellung der Dissertation nicht beteiligt, insbesondere habe ich nicht die Hilfe eines kommerziellen Promotionsberaters in Anspruch genommen. Kein Teil dieser Arbeit ist in einem anderen Promotions- oder Habilitationsverfahren durch mich verwendet worden.